А.Д.Полянин

СПРАВОЧНИК ПО ЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЯМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 576 с.

Справочник содержит решения более 2000 линейных уравнений и задач математической физики. Рассматриваются нестационарные и стационарные уравнения с постоянными и переменными коэффициентами (параболического, гиперболического и эллиптического типов). Описан ряд новых решений линейных уравнений и краевых задач. Особое внимание уделено уравнениям и задачам общего вида, которые зависят от произвольных функций. Помимо уравнений второго порядка рассматриваются также уравнения более высоких порядков. В целом справочник содержит больше уравнений и задач математической физики, чем любые другие книги.

Приведены решения ряда задач, встречающихся в различных областях механики, теоретической физики и химической технологии (в теории тепло- и массопереноса, теории волн, акустики, теории упругости, гидродинамике, электростатике, квантовой механике и др.).

Справочник предназначен для широкого круга научных работников, преподавателей вузов, инженеров и студентов, специализирующихся в различных областях математики, физики, механики, теории управления и инженерных наук.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Дифференциальные уравнения математической физики встречаются в различных областях науки и многочисленных приложениях (в теории тепло- и массопереноса, теории волн, гидродинамике, аэродинамике, теории упругости, акустике, электростатике, электродинамике, электротехнике, теории дифракции, квантовой механике, теории управления, химической технологии, биомеханике и др.).

Книга содержит краткие формулировки и точные решения более 2000 уравнений и задач математической физики. Рассматриваются нестационарные и стационарные уравнения с постоянными и переменными коэффициентами (параболического, гиперболического и эллиптического типов). Описан ряд новых решений линейных уравнений и краевых задач. Особое внимание уделено уравнениям и задачам общего вида, которые зависят от произвольных функций. Приведены формулы для эффективного построения решений неоднородных краевых задач различного типа. Помимо уравнений второго порядка рассматриваются также уравнения более высоких порядков (и соответствующие краевые задачи). В целом, справочник содержит больше уравнений и задач математической физики, чем любые другие книги.

Для удобства читателя, во введении книги даны некоторые определения и кратко описаны основные уравнения, задачи и методы математической физики. Там же приведены полезные формулы, позволяющие выражать решения стационарных и нестационарных краевых задач общего вида через функции Грина.

Расположение уравнений во всех главах книги отвечает принципу «от простого к сложному». Многие разделы можно читать независимо друг от друга, что облегчает работу с материалом. Обширное оглавление поможет читателю находить искомые уравнения и краевые задачи. При ссылках в тексте на конкретные уравнения запись вида «1.8.5.2» означает «уравнение 2 из раздела 1.8.5».

Для максимального расширения круга потенциальных читателей с разной математической подготовкой автор по возможности старался избегать использования специальной терминологии. Поэтому некоторые результаты описаны схематически и упрощенно (опущены детали), чего вполне достаточно для их применения в большинстве приложений.

Отдельные разделы книги могут быть использованы в качестве основы для проведения практических занятий и лекций по уравнениям математической физики.

Автор благодарен А. И. Журову за полезные замечания по рукописи книги.

Автор надеется, что справочник будет полезен широкому кругу научных работников, преподавателей вузов, инженеров и студентов в различных областях математики, физики, механики, теории управления и инженерных наук.

А. Д. Полянин

Основные обозначения

Латинский алфавит

$\mathscr{E}$ — фундаментальное решение;
$\operatorname{Im}[A]$ — мнимая часть комплексной величины A;
G — функция Грина;
$\mathcal{R}^n$ — n-мерное пространство, $\mathcal{R}^n = \{-\infty < x_k < \infty;\ k = 1, \dots, n\}$;
$\operatorname{Re}[A]$ — действительная часть комплексной величины A;
r, φ, z — цилиндрические координаты, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$;
r, θ, φ — сферические координаты, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;
t — время ($t \geqslant 0$);
w — искомая функция (зависимая переменная);
x, y, z — пространственные переменные (декартовы координаты);
$x_1, \dots, x_n$ — декартовы координаты в n-мерном пространстве;
$\mathbf{x}$ — n-мерный вектор, $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$;
$|\mathbf{x}|$ — модуль (длина) n-мерного вектора, $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$;
$\mathbf{y}$ — n-мерный вектор, $\mathbf{y} = \{y_1, \dots, y_n\}$.

Греческий алфавит

Δ — оператор Лапласа;
Δ_2 — двумерный оператор Лапласа, $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$;
Δ_3 — трехмерный оператор Лапласа, $\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$;
Δ_n — n-мерный оператор Лапласа, $\Delta_n = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$;
$\delta(x)$ — дельта-функция; $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(y)\delta(x-y)\,dy = f(x)$, где $f(x)$ — любая непрерывная функция, $a > 0$;
δ_{nm} — символ Кронекера, $\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{при } n = m, \\ 0 & \text{при } n \neq m; \end{cases}$
$\vartheta(x)$ — единичная функция Хевисайда, $\vartheta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$

Краткие обозначения частных производных

$$\partial_t w = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad \partial_x w = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \partial_{tt} w = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \partial_{xx} w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \partial_{xxx} w = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}.$$

Специальные функции

$\operatorname{Ai}(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \cos\left(\tfrac{1}{3}t^3 + xt\right)dt$ — функция Эйри; $\operatorname{Ai}(x) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1}{3}x}\,K_{1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)$;

$\operatorname{Ce}_{2n+p}(x,q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+p}^{2n+p}\operatorname{ch}[(2k+p)x]$ — четные модифицированные функции Матье ($p = 0, 1$); $\operatorname{Ce}_{2n+p}(x,q) = \operatorname{ce}_{2n+p}(ix,q)$;

$\operatorname{ce}_{2n}(x,q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} A_{2k}^{2n}\cos 2kx$ — четные π-периодические функции Матье; они удовлетворяют уравнению $y'' + (a - 2q\cos 2x)y = 0$, где $a = a_{2n}(q)$ — собственные значения;

$\operatorname{ce}_{2n+1}(x,q)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_{2k+1}^{2n+1}\cos[(2k+1)x]$ — четные 2π-периодические функции Матье; они удовлетворяют уравнению $y''+(a-2q\cos 2x)y=0$, где $a=a_{2n+1}(q)$ — собственные значения;

$D_\nu=D_\nu(x)$ — функция параболического цилиндра (см. разд. 7.3.4-1); она удовлетворяет уравнению $y''+\left(\nu+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x^2\right)y=0$;

$\operatorname{erf} x=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^x \exp\left(-\xi^2\right)d\xi$ — интеграл вероятностей;

$\operatorname{erfc} x=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_x^\infty \exp\left(-\xi^2\right)d\xi$ — дополнительный интеграл вероятностей;

$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\dfrac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$ — полином Эрмита;

$H_\nu^{(1)}(x)=J_\nu(x)+iY_\nu(x)$ — функция Ханкеля первого рода, $i^2=-1$;

$H_\nu^{(2)}(x)=J_\nu(x)-iY_\nu(x)$ — функция Ханкеля второго рода, $i^2=-1$;

$F(a,b,c;x)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\dfrac{x^n}{n!}$ — гипергеометрическая функция, $(a)_n=a(a+1)\ldots(a+n-1)$;

$I_\nu(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x/2)^{\nu+2n}}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)}$ — модифицированная функция Бесселя первого рода;

$J_\nu(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(x/2)^{\nu+2n}}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)}$ — функция Бесселя первого рода;

$K_\nu(x)=\dfrac{\pi}{2}\dfrac{I_{-\nu}(x)-I_\nu(x)}{\sin(\pi\nu)}$ — модифицированная функция Бесселя второго рода;

$L_n^s(x)=\dfrac{1}{n!}x^{-s}e^x\dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^{n+s}e^{-x}\right)$ — обобщенные полиномы Лаггера;

$P_n(x)=\dfrac{1}{n!\,2^n}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ — полиномы Лежандра;

$P_n^m(x)=(1-x^2)^{m/2}\dfrac{d^m}{dx^m}P_n(x)$ — присоединенные функции Лежандра;

$\operatorname{Se}_{2n+p}(x,q)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} B_{2k+p}^{2n+p}\operatorname{sh}[(2k+p)x]$ — нечетные модифицированные функции Матье, где $p=0,1$; $\operatorname{Se}_{2n+p}(x,q)=-i\operatorname{se}_{2n+p}(ix,q)$;

$\operatorname{se}_{2n}(x,q)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} B_{2k}^{2n}\sin 2kx$ — нечетные π-периодические функции Матье; они удовлетворяют уравнению $y''+(a-2q\cos 2x)y=0$, где $a=b_{2n}(q)$ — собственные значения;

$\operatorname{se}_{2n+1}(x,q)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} B_{2k+1}^{2n+1}\sin[(2k+1)x]$ — нечетные 2π-периодические функции Матье; они удовлетворяют уравнению $y''+(a-2q\cos 2x)y=0$, где $a=b_{2n+1}(q)$ — собственные значения;

$Y_\nu(x)=\dfrac{J_\nu(x)\cos(\pi\nu)-J_{-\nu}(x)}{\sin(\pi\nu)}$ — функция Бесселя второго рода;

$\gamma(\alpha,x)=\displaystyle\int_0^x e^{-\xi}\xi^{\alpha-1}\,d\xi$ — неполная гамма-функция;

$\Gamma(\alpha)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-\xi}\xi^{\alpha-1}\,d\xi$ — гамма-функция;

$\Phi(a,b;x)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(a)_n}{(b)_n}\dfrac{x^n}{n!}$ — вырожденная гипергеометрическая функция, $(a)_n=a(a+1)\ldots(a+n-1)$.

Введение. Некоторое определения, формулы, методы и решения

0.1. Классификация уравнений с частными производными второго порядка

0.1.1. Уравнения с двумя независимыми переменными

0.1.1-1. Примеры уравнений, встречающихся в приложениях.

Выделяют три основных типа дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка, решения которых имеют характерные качественные различия.

Простейший пример уравнения *параболического типа* — уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \tag{1}$$

где переменная t играет роль времени, а переменная x — пространственной координаты. Отметим, что в уравнении (1) имеется только один член со старшими производными.

Простейший пример уравнения *гиперболического типа* — волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \tag{2}$$

где переменная t играет роль времени, а переменная x — пространственной координаты. Отметим, что члены со старшими производными в уравнении (2) имеют разные знаки.

Простейший пример уравнения *эллиптического типа* — уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \tag{3}$$

где переменные x и y играют роль пространственных координат. Отметим, что члены со старшими производными в уравнении (3) имеют одинаковые знаки.

Любое линейное уравнение второго порядка в частных производных с двумя независимыми переменными с помощью подходящих преобразований может быть приведено к более простому уравнению, у которого будет одна из трех комбинаций старших производных, указанных выше в конкретных примерах (1), (2) и (3).

0.1.1-2. Типы уравнений. Уравнения характеристик.

Рассмотрим линейное уравнение с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными*

$$a(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = F\Big(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}\Big), \tag{4}$$

где a, b, c — некоторые функции от x и y, имеющие непрерывные производные до второго порядка включительно.

Уравнение (4) в точке (x, y) принадлежит к

параболическому типу, если $b^2 - ac = 0$;

гиперболическому типу, если $b^2 - ac > 0$;

эллиптическому типу, если $b^2 - ac < 0$.

* Правая часть уравнения (4) может быть нелинейной. Классификация и процедура приведения таких уравнений к каноническому виду определяются только левой частью уравнения.

Для того, чтобы привести уравнение (4) к каноническому виду, надо записать уравнение характеристик

$$a\,dy^2 - 2b\,dx\,dy + c\,dx^2 = 0,$$

которое распадается на два уравнения

$$a\,dy - \bigl(b + \sqrt{b^2 - ac}\,\bigr)\,dx = 0, \tag{5}$$

$$a\,dy - \bigl(b - \sqrt{b^2 - ac}\,\bigr)\,dx = 0, \tag{6}$$

и найти их общие интегралы.

0.1.1-3. Канонический вид уравнений параболического типа, $b^2 - ac = 0$.

Уравнения (5) и (6) в этом случае совпадают и имеют один общий интеграл

$$\varphi(x, y) = C.$$

Переходя от x, y к новым независимым переменным ξ, η по формулам

$$\xi = \varphi(x, y), \qquad \eta = \eta(x, y),$$

где $\eta = \eta(x, y)$ — любая дважды дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию невырожденности якобиана $\dfrac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)}$ в рассматриваемой области, приведем уравнение (4) к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = F_1\Bigl(\xi, \eta, w, \frac{\partial w}{\partial \xi}, \frac{\partial w}{\partial \eta}\Bigr). \tag{7}$$

В качестве функции η можно выбрать $\eta = x$ или $\eta = y$.

Видно, что преобразованное уравнение (7), как и уравнение теплопроводности (1), имеет только один член со старшей производной.

Замечание. В вырожденном случае, когда функция F_1 не зависит от производной $\partial_\xi w$, уравнение (7) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение относительно переменной η, в котором ξ играет роль параметра.

0.1.1-4. Канонический вид уравнений гиперболического типа, $b^2 - ac > 0$.

Общие интегралы

$$\varphi(x, y) = C_1, \qquad \psi(x, y) = C_2$$

уравнений (5) и (6) будут вещественными и различными. Они определяют два различных семейства вещественных характеристик.

Переходя от x, y к новым независимым переменным ξ, η по формулам

$$\xi = \varphi(x, y), \qquad \eta = \psi(x, y),$$

приведем уравнение (4) к каноническому виду (первая каноническая форма)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = F_2\Bigl(\xi, \eta, w, \frac{\partial w}{\partial \xi}, \frac{\partial w}{\partial \eta}\Bigr).$$

Преобразование

$$\xi = t + z, \qquad \eta = t - z$$

приводит полученное уравнение к другому каноническому виду (вторая каноническая форма)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = F_3\Bigl(t, z, w, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial z}\Bigr),$$

где $F_3 = 4F_2$. Левая часть этого уравнения с точностью до переобозначений совпадает с левой частью волнового уравнения (2).

ТАБЛИЦА 1
Классификация уравнений со многими независимыми переменными.

Тип уравнения (8) в точке $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$	Коэффициенты канонической формы (11)
Параболический (в широком смысле)	Хотя бы один коэффициент c_i равен нулю
Гиперболический (в широком смысле)	Все c_i отличны от нуля и некоторые c_i имеют разные знаки
Эллиптический	Все c_i отличны от нуля и имеют одинаковые знаки

0.1.1-5. Канонический вид уравнений эллиптического типа, $b^2 - ac < 0$.

Общие интегралы уравнений (5) и (6) в этом случае будут комплексно сопряженными и определяют два семейства мнимых характеристик.

Пусть общий интеграл уравнения (5) имеет вид

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = C, \qquad i^2 = -1,$$

где $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — вещественные функции.

Переходя от x, y к новым независимым переменным ξ, η по формулам

$$\xi = \varphi(x, y), \qquad \eta = \psi(x, y),$$

приведем уравнение (4) к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = F_4\Big(\xi, \eta, w, \frac{\partial w}{\partial \xi}, \frac{\partial w}{\partial \eta}\Big).$$

Левая часть этого уравнения с точностью до переобозначений совпадает с левой частью уравнения Лапласа (3).

0.1.2. Уравнения со многими независимыми переменными

Рассмотрим уравнение с частными производными второго порядка с n независимыми переменными $x_1, \dots, x_n$ вида

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} = F\Big(\mathbf{x}, w, \frac{\partial w}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial w}{\partial x_n}\Big), \tag{8}$$

где a_{ij} — некоторые функции, имеющие непрерывные производные по всем переменным до второго порядка включительно, $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$. [Правая часть уравнения (8) может быть нелинейной. Для классификации нужна только левая часть уравнения.]

Уравнению (8) в точке $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ ставится в соответствие квадратичная форма

$$Q = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x}_0) \xi_i \xi_j. \tag{9}$$

Квадратичную форму (9) при помощи подходящего линейного невырожденного преобразования

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik} \eta_k \qquad (i = 1, \dots, n) \tag{10}$$

можно привести к каноническому виду

$$Q = \sum_{i=1}^{n} c_i \eta_i^2, \tag{11}$$

где коэффициенты c_i принимают значения 1, -1 и 0. Число отрицательных и нулевых коэффициентов формы (11) не зависит от способа приведения этой формы к каноническому виду.

В табл. 1 указаны основные признаки, по которым происходит классификация уравнений со многими независимыми переменными.

Пусть все коэффициенты уравнения (8) при старших производных постоянны: $a_{ij} = \text{const}$. Вводя новые независимые переменные $y_1, \ldots, y_n$ по формулам $y_i = \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_{ik} x_k$, где β_{ik} — коэффициенты линейного преобразования (10), приводим уравнение (8) к каноническому виду

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial^2 w}{\partial y_i^2} = F_1\Bigl(\mathbf{y}, w, \frac{\partial w}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial w}{\partial y_n}\Bigr). \qquad (12)$$

Здесь c_i — те же самые коэффициенты, что и в квадратичной форме (11), $\mathbf{y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$.

Замечание 1. Из уравнений параболического типа принято выделять уравнения параболические в узком смысле [когда только один из коэффициентов c_k равен нулю, а остальные c_i одинаковы; при этом в правую часть уравнения (12) должна входить частная производная первого порядка по переменной x_k].

Замечание 2. Уравнения гиперболического типа в свою очередь делятся на уравнения нормального гиперболического типа (когда все коэффициенты c_i кроме одного имеют одинаковые знаки) и ультрагиперболического типа (имеется больше одного положительного и больше одного отрицательного коэффициента c_i).

Конкретные уравнения параболического, эллиптического и гиперболического типов со многими независимыми переменными будут рассматриваться далее в разд. 0.2.

⦿ *Литература к разделу 0.1*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 21–30), С. Л. Соболев (1966, стр. 39–51), А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972, стр. 11–22), А. В. Бицадзе (1978, стр. 15–29), S. J. Farlow (1982, стр. 174–182, 331–339), Zauderer (1983, стр. 78–85, 91–97), D. Zwillinger (1989, стр. 22–29).

0.2. Основные задачи математической физики

0.2.1. Начальные и граничные условия. Задача Коши. Краевые задачи

Каждое уравнение математической физики описывает бесконечное множество качественно аналогичных явлений или процессов. Это обстоятельство является следствием того, что дифференциальные уравнения имеют бесконечное множество частных решений. Конкретное решение, описывающее рассматриваемое физическое явление, выделяется из множества частных решений данного дифференциального уравнения с помощью начальных и граничных условий.

Далее будем рассматривать линейные уравнения в n-мерном евклидовом пространстве $\mathcal{R}^n$ или в открытой (не включающей границу) пространственной области $V \in \mathcal{R}^n$ с достаточно гладкой границей $S = \partial V$.

0.2.1-1. Уравнения параболического типа. Начальное и граничное условия.

В общем случае линейное уравнение с частными производными второго порядка параболического типа с n независимыми переменными можно записать так:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - L_{\mathbf{x},t}[w] = \Phi(\mathbf{x}, t), \qquad (1)$$

где

$$L_{\mathbf{x},t}[w] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial w}{\partial x_i} + c(\mathbf{x}, t) w, \qquad (2)$$

$$\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}, \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x}, t) \xi_i \xi_j \geqslant \sigma \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad \sigma > 0.$$

Уравнения параболического типа описывают неустановившиеся тепловые, диффузионные и другие процессы, которые зависят от времени t.

Уравнение (1) называется однородным, если $\Phi(\mathbf{x}, t) \equiv 0$.

Задача Коши ($t \geqslant 0$, $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$). Требуется найти функцию w, удовлетворяющую уравнению (1) при $t > 0$ и начальному условию

$$w = f(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad t = 0. \qquad (3)$$

*Краевая задача** ($t \geqslant 0$, $\mathbf{x} \in V$). Требуется найти функцию w, удовлетворяющую уравнению (1) при $t > 0$, начальному условию (3) и граничному условию

$$\Gamma_{\mathbf{x},t}[w] = g(\mathbf{x},t) \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \in S \qquad (t > 0). \tag{4}$$

В общем случае $\Gamma_{\mathbf{x},t}$ представляет собой линейный дифференциальный оператор первого порядка по пространственным переменным, коэффициенты которого зависят от $\mathbf{x}$ и t. Основные типы граничных условий будут описаны далее в разд. 0.2.2.

Начальное условие (3) называется однородным, если $f(\mathbf{x}) \equiv 0$. Граничное условие (4) называется однородным, если $g(\mathbf{x},t) \equiv 0$.

0.2.1-2. Уравнения гиперболического типа. Начальные и граничное условия.

Рассмотрим линейное уравнение с частными производными второго порядка гиперболического типа с n независимыми переменными общего вида

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \varphi(\mathbf{x},t)\frac{\partial w}{\partial t} - L_{\mathbf{x},t}[w] = \Phi(\mathbf{x},t), \tag{5}$$

где линейный дифференциальный оператор $L_{\mathbf{x},t}$ определяется выражением (2). Уравнения гиперболического типа описывают неустановившиеся волновые процессы, которые зависят от времени t.

Уравнение (5) называется однородным, если $\Phi(\mathbf{x},t) \equiv 0$.

Задача Коши ($t \geqslant 0$, $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$). Требуется найти функцию w, удовлетворяющую уравнению (5) при $t > 0$ и начальным условиям

$$\begin{aligned} w &= f_0(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad t = 0, \\ \partial_t w &= f_1(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad t = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Краевая задача ($t \geqslant 0$, $\mathbf{x} \in V$). Требуется найти функцию w, удовлетворяющую уравнению (5) при $t > 0$, начальным условиям (6) и граничному условию (4).

Начальные условия (6) называются однородными, если $f_0(\mathbf{x}) \equiv 0$, $f_1(\mathbf{x}) \equiv 0$.

Задача Гурса. На характеристиках уравнения гиперболического типа с двумя независимыми переменными задаются значения искомой функции w.

0.2.1-3. Уравнения эллиптического типа. Граничные условия.

В общем случае линейное уравнение с частными производными второго порядка эллиптического типа с n независимыми переменными можно записать так:

$$-L_{\mathbf{x}}[w] = \Phi(\mathbf{x}), \tag{7}$$

где

$$L_{\mathbf{x}}[w] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x})\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\mathbf{x})\frac{\partial w}{\partial x_i} + c(\mathbf{x})w, \tag{8}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x})\xi_i\xi_j \geqslant \sigma \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad \sigma > 0.$$

Уравнения эллиптического типа описывают установившиеся тепловые, диффузионные и другие процессы, которые не зависят от времени.

Уравнение (7) называется однородным, если $\Phi(\mathbf{x}) \equiv 0$.

Краевая задача. Требуется найти функцию w, удовлетворяющую уравнению (7) и граничному условию

$$\Gamma_{\mathbf{x}}[w] = g(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \in S. \tag{9}$$

В общем случае $\Gamma_{\mathbf{x}}$ представляет собой линейный дифференциальный оператор первого порядка. Различные типы граничных условий описаны далее в разд. 0.2.2.

Граничное условие (9) называется однородным, если $g(\mathbf{x}) \equiv 0$. Краевая задача (7)–(9) называется однородной, если $\Phi \equiv 0$, $g \equiv 0$.

---

* *Краевые задачи* для уравнений параболического и гиперболического типов нередко называют ***смешанными задачами***.

0.2.2. Первая, вторая, третья и смешанная краевые задачи

Для любых (параболических, гиперболических и эллиптических) уравнений в частных производных второго порядка в зависимости от вида граничных условий (4) [см. также аналогичное условие (9)] принято выделять четыре основных типа краевых задач. Для простоты здесь ограничимся случаем, когда коэффициенты a_{ij} уравнений (1), (5) имеют специальный вид

$$a_{ij}(\mathbf{x},t) = a(\mathbf{x},t)\delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Такая ситуация наиболее часто встречается в приложениях и используется для описания различных явлений (процессов) в изотропных средах.

Первая краевая задача. На границе области S функция $w(\mathbf{x},t)$ принимает заданные значения:

$$w(\mathbf{x},t) = g_1(\mathbf{x},t) \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \in S. \tag{10}$$

Вторая краевая задача. На границе области S задается производная по (внешней) нормали:

$$\frac{\partial w}{\partial N} = g_2(\mathbf{x},t) \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \in S. \tag{11}$$

В задачах теплопереноса, где w — температура, левая часть граничного условия (11) пропорциональна тепловому потоку, приходящемуся на единицу поверхности S.

Третья краевая задача. На границе области S задана линейная связь между искомой функцией и ее производной по нормали:

$$\frac{\partial w}{\partial N} + k(\mathbf{x},t)w = g_3(\mathbf{x},t) \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \in S. \tag{12}$$

Обычно принимается, что $k(\mathbf{x},t) = \text{const}$. В задачах массопереноса, где w — концентрация, граничное условие (12) при $g_3 \equiv 0$ описывает поверхностную химическую реакцию первого порядка.

Смешанные краевые задачи. В этом случае на разных участках границы S задаются условия различных типов, перечисленных выше.

При $g_1 \equiv 0$, $g_2 \equiv 0$, $g_3 \equiv 0$ соответствующие граничные условия (10), (11), (12) будут однородными.

⊙ *Литература к разделу 0.2*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964), А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972).

0.3. Свойства и частные решения линейных уравнений

0.3.1. Линейные однородные уравнения

0.3.1-1. Предварительные замечания.

Для краткости в данном разделе линейные однородные уравнения с частными производными будем записывать так:

$$\mathfrak{L}[w] = 0. \tag{1}$$

Для линейных уравнений второго порядка параболического и гиперболического типов линейный дифференциальный оператор $\mathfrak{L}[w]$ определяется соответственно левой частью уравнений (1) и (5) из разд. 0.2.1. Далее считается, что уравнение (1) — произвольное линейное однородное уравнение с частными производными любого порядка по переменным $t, x_1, \ldots, x_n$ с достаточно гладкими коэффициентами.

Линейный оператор $\mathfrak{L}$ обладает свойствами

$$\begin{aligned} &\mathfrak{L}[w_1 + w_2] = \mathfrak{L}[w_1] + \mathfrak{L}[w_2], \\ &\mathfrak{L}[Aw] = A\mathfrak{L}[w], \quad A = \text{const}. \end{aligned}$$

Произвольное линейное однородное уравнение (1) имеет тривиальное решение $w \equiv 0$.

Функция w называется классическим решением, если она при подстановке в уравнение (1) обращает его в тождество и все ее частные производные, которые входят в уравнение (1), непрерывны (данное понятие напрямую связано с рассматриваемой областью изменения независимых переменных). Далее вместо «классическое решение» обычно будем писать просто «решение».

0.3.1-2. Использование частных решений для построения других частных решений.

Отметим некоторые свойства частных решений линейных однородных уравнений.

1°. Пусть $w_1 = w_1(\mathbf{x},t)$, $w_2 = w_2(\mathbf{x},t)$, ..., $w_k = w_k(\mathbf{x},t)$ — любые частные решения однородного уравнения (1). Тогда линейная комбинация

$$w = A_1 w_1 + A_2 w_2 + \dots + A_k w_k \qquad (2)$$

с произвольными постоянными A_1, A_2, ..., A_k также является решением данного уравнения (в физике это свойство называют *принципом линейной суперпозиции*).

Если имеется бесконечная последовательность решений $\{w_k\}$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k$ независимо от его сходимости, называют формальным решением. Если решения w_k классические, ряд сходится равномерно и его сумма имеет необходимые частные производные, то сумма ряда будет классическим решением уравнения (1).

2°. Пусть коэффициенты дифференциального оператора $\mathfrak{L}$ не зависят от времени t. Если уравнение (1) имеет частное решение $\tilde{w} = \tilde{w}(\mathbf{x},t)$, то решениями уравнения (1) будут также частные производные этой функции по времени*

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial t^2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^k \tilde{w}}{\partial t^k}, \quad \dots$$

3°. Пусть коэффициенты дифференциального оператора $\mathfrak{L}$ не зависят от пространственных переменных $x_1, \dots, x_n$. Если уравнение (1) имеет частное решение $\tilde{w} = \tilde{w}(\mathbf{x},t)$, то решениями уравнения (1) будут также любые частные производные от этого решения по пространственным переменным:

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x_1^2}, \quad \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^{k+m} \tilde{w}}{\partial x_2^k \partial x_3^m}, \quad \dots$$

Если коэффициенты оператора $\mathfrak{L}$ не зависят только от одной пространственной переменной, например x_1, и уравнение (1) имеет частное решение $\tilde{w} = \tilde{w}(\mathbf{x},t)$, то решениями этого уравнения будут частные производные от функции $\tilde{w}$ по переменной x_1:

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x_1^2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^k \tilde{w}}{\partial x_1^k}, \quad \dots$$

4°. Пусть коэффициенты оператора $\mathfrak{L}$ постоянны и уравнение (1) имеет частное решение $\tilde{w} = \tilde{w}(\mathbf{x},t)$. Тогда решениями данного уравнения будут также любые частные производные от этого решения по времени и пространственным переменным (включая и смешанные производные):

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x_2^2}, \quad \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial t \partial x_1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^k \tilde{w}}{\partial x_3^k}, \quad \dots$$

5°. Пусть частное решение уравнения (1) зависит от параметра μ, т. е. $\tilde{w} = \tilde{w}(\mathbf{x},t;\mu)$, а коэффициенты оператора $\mathfrak{L}$ не зависят от этого параметра (но могут зависеть от времени и пространственных переменных). Тогда другие решения уравнения (1) можно получить путем дифференцирования данного решения по параметру μ:

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \mu^2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^k \tilde{w}}{\partial \mu^k}, \quad \dots$$

Пусть постоянные $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ принадлежат области допустимых значений параметра μ. Тогда сумма

$$w = A_1 \tilde{w}(\mathbf{x},t;\mu_1) + A_2 \tilde{w}(\mathbf{x},t;\mu_2) + \dots + A_k \tilde{w}(\mathbf{x},t;\mu_k), \qquad (3)$$

где $A_1, A_2, \dots, A_k$ — произвольные постоянные, также является решением линейного однородного уравнения (1). Указанная сумма может содержать как конечное, так и бесконечное число слагаемых.

6°. Другой эффективный способ построения частных решений заключается в следующем. Частное решение $\tilde{w}(\mathbf{x},t;\mu)$, зависящее от параметра μ (как и ранее, считается, что коэффициенты оператора $\mathfrak{L}$ не зависят от μ) сначала умножается на произвольную функцию $\varphi(\mu)$,

* Здесь и далее предполагается, что частное решение $\tilde{w}$ достаточное число раз дифференцируемо по соответствующим временной или пространственным переменным (или параметрам).

ТАБЛИЦА 2
Линейные однородные дифференциальные уравнения с частными производными, которые допускают решения с разделяющимися переменными.

№	Вид уравнения (1)	Вид частных решений
1	Коэффициенты уравнения постоянны	$w(\mathbf{x},t)=A\exp(\lambda t+\beta_1x_1+\dots+\beta_nx_n)$, $\lambda,\beta_1,\dots,\beta_n$ связаны алгебраическим соотношением
2	Коэффициенты уравнения не зависят от времени t	$w(\mathbf{x},t)=e^{\lambda t}\psi(\mathbf{x})$, λ — произвольная постоянная, $\mathbf{x}=\{x_1,\dots,x_n\}$
3	Коэффициенты уравнения не зависят от переменных $x_1,\dots,x_n$	$w(\mathbf{x},t)=\exp(\beta_1x_1+\dots+\beta_nx_n)\psi(t)$, $\beta_1,\dots,\beta_n$ — произвольные постоянные
4	Коэффициенты уравнения не зависят от переменных $x_1,\dots,x_k$	$w(\mathbf{x},t)=\exp(\beta_1x_1+\dots+\beta_kx_k)\psi(t,x_{k+1},\dots,x_n)$, $\beta_1,\dots,\beta_k$ — произвольные постоянные
5	$\mathfrak{L}[w]=L_t[w]+L_{\mathbf{x}}[w]$, оператор L_t зависит только от t, оператор $L_{\mathbf{x}}$ зависит только от $\mathbf{x}$	$w(\mathbf{x},t)=\varphi(t)\psi(\mathbf{x})$, $\varphi(t)$ удовлетворяет уравнению $L_t[\varphi]+\lambda\varphi=0$, $\psi(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению $L_{\mathbf{x}}[\psi]-\lambda\psi=0$
6	$\mathfrak{L}[w]=L_t[w]+L_1[w]+\dots+L_n[w]$, оператор L_t зависит только от t, оператор L_k зависит только от x_k	$w(\mathbf{x},t)=\varphi(t)\psi_1(x_1)\dots\psi_n(x_n)$, $\varphi(t)$ удовлетворяет уравнению $L_t[\varphi]+\lambda\varphi=0$, $\psi_k(x_k)$ удовлетворяет уравнению $L_k[\psi_k]+\beta_k\psi_k=0$, $\lambda+\beta_1+\dots+\beta_n=0$
7	$\mathfrak{L}[w]=f_0(x_1)L_t[w]+\sum\limits_{k=1}^{n}f_k(x_1)L_k[w]$, оператор L_t зависит только от t, оператор L_k зависит только от x_k	$w(\mathbf{x},t)=\varphi(t)\psi_1(x_1)\dots\psi_n(x_n)$, $L_t[\varphi]+\lambda\varphi=0$, $L_k[\psi_k]+\beta_k\psi_k=0,\quad k=2,\dots,n$, $f_1(x_1)L_1[\psi_1]-\bigl[\lambda f_0(x_1)+\sum\limits_{k=2}^{n}\beta_kf_k(x_1)\bigr]\psi_1=0$
8	$\mathfrak{L}[w]=\dfrac{\partial w}{\partial t}+L_{1,t}[w]+\dots+L_{n,t}[w]$, где $L_{k,t}[w]=\sum\limits_{s=0}^{m_k}f_{ks}(x_k,t)\dfrac{\partial^s w}{\partial x_k^s}$	$w(\mathbf{x},t)=\psi_1(x_1,t)\psi_2(x_2,t)\dots\psi_n(x_n,t)$, $\dfrac{\partial\psi_k}{\partial t}+L_{k,t}[\psi_k]=\lambda_k(t)\psi_k,\quad k=1,\dots,n$, $\lambda_1(t)+\lambda_2(t)+\dots+\lambda_n(t)=0$

а затем полученное выражение интегрируется по параметру μ по некоторому отрезку $[\alpha,\beta]$. В результате получают новую функцию

$$\int_\alpha^\beta \tilde{w}(\mathbf{x},t;\mu)\varphi(\mu)\,d\mu,$$

которая также является решением исходного линейного однородного уравнения.

Свойства, описанные в пп. 1°–6°, позволяют получать с помощью одних частных решений другие частные решения линейных однородных уравнений математической физики.

0.3.1-3. Решения с разделяющимися переменными.

Многие линейные однородные дифференциальные уравнения с частными производными имеют решения, которые можно представить в виде произведения функций разных аргументов. Такие решения называют решениями с разделяющимися переменными.

В табл. 2 указаны наиболее распространенные типы линейных однородных дифференциальных уравнений со многими независимыми переменными, которые допускают решения с разделяющимися переменными. Линейные комбинации частных решений, соответствующих различным значениям параметров разделения λ, β_1, …, β_n, также будут решениями рассматриваемых уравнений. Для краткости вместо линейный дифференциальный оператор пишется оператор.

В случае уравнений с постоянными коэффициентами (см. первую строку табл. 2) параметры разделения должны удовлетворять алгебраическому уравнению

$$D(\lambda,\,\beta_1,\,\ldots,\beta_n)=0, \tag{4}$$

которое получается в результате подстановки данного решения в уравнение (1). В физических приложениях уравнение (4) обычно называют дисперсионным уравнением. Любые n из $n+1$ параметра разделения в (4) можно считать произвольными.

Отметим, что уравнения с постоянными коэффициентами имеют также более сложные решения, указанные во второй и третьей строках табл. 2 (см. последний столбец).

В восьмой строке табл. 2 рассмотрен случай неполного разделения переменных, когда решение разделяется по пространственным переменным $x_1,\,\ldots,\,x_n$, то не разделяется по времени t.

Замечание. Для стационарных уравнений, которые не зависят от времени t, в 1, 6 и 7 строках табл. 2 следует положить $\lambda=0$, $L_t[w]\equiv 0$, $\varphi(t)\equiv 1$.

0.3.1-4. Решения в виде бесконечного степенного ряда по переменной t.

1°. Уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t}=M[w],$$

где M — произвольный линейный дифференциальный оператор второго (любого) порядка, зависящий только от пространственных переменных, имеет формальное решение в виде ряда

$$w(\mathbf{x},t)=f(\mathbf{x})+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}M^k[f(\mathbf{x})],\qquad M^k[f]=M\bigl[M^{k-1}[f]\bigr],$$

где $f(\mathbf{x})$ — произвольная бесконечно дифференцируемая функция. Это решение удовлетворяет начальному условию $w(\mathbf{x},0)=f(\mathbf{x})$.

2°. Уравнение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=M[w],$$

где M — линейный дифференциальный оператор, описанный в п. 1°, имеет формальное решение в виде суммы двух рядов

$$w(\mathbf{x},t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k}}{(2k)!}M^k[f(\mathbf{x})]+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}M^k[g(\mathbf{x})],$$

где $f(\mathbf{x})$ и $g(\mathbf{x})$ — произвольные бесконечно дифференцируемые функции. Это решение удовлетворяет начальным условиям: $w(\mathbf{x},0)=f(\mathbf{x})$, $\partial_t w(\mathbf{x},0)=g(\mathbf{x})$.

0.3.2. Линейные неоднородные уравнения

0.3.2-1. Простейшие свойства линейных неоднородных уравнений.

Для краткости линейные неоднородные уравнения с частными производными будем записывать так:

$$\mathfrak{L}[w]=\Phi(\mathbf{x},t), \tag{5}$$

где линейный дифференциальный оператор $\mathfrak{L}$ описан после уравнения (1).

Отметим простейшие свойства частных решений неоднородного уравнения (5).

1°. Если известно частное решение $\tilde{w}_\Phi(\mathbf{x},t)$ неоднородного уравнения (5) и частное решение $\tilde{w}_0(\mathbf{x},t)$ соответствующего однородного уравнения (1), то сумма

$$A\tilde{w}_0(\mathbf{x},t)+\tilde{w}_\Phi(\mathbf{x},t),$$

где A — произвольная постоянная, также будет решением неоднородного уравнения (5). Справедливо более общее утверждение: общее решение неоднородного уравнения (5) является суммой общего решения соответствующего однородного уравнения (1) и любого частного решения неоднородного уравнения (5).

2°. Пусть w_1 и w_2 — решения линейных неоднородных уравнений с одинаковой левой и разными правыми частями, т. е.

$$\mathfrak{L}[w_1] = \Phi_1(\mathbf{x}, t), \qquad \mathfrak{L}[w_2] = \Phi_2(\mathbf{x}, t).$$

Тогда функция $w = w_1 + w_2$ будет решением уравнения

$$\mathfrak{L}[w] = \Phi_1(\mathbf{x}, t) + \Phi_2(\mathbf{x}, t).$$

0.3.2-2. Фундаментальные и частные решения стационарных уравнений.

Рассмотрим линейное стационарное неоднородное уравнение второго порядка

$$L_{\mathbf{x}}[w] = \Phi(\mathbf{x}). \tag{6}$$

Здесь $L_{\mathbf{x}}$ — линейный дифференциальный оператор второго (любого) порядка общего вида, коэффициенты которого зависят от $\mathbf{x}$, где $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$.

Фундаментальным решением, соответствующим оператору $L_{\mathbf{x}}$, называется обобщенная функция* $\mathscr{E} = \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, которая удовлетворяет уравнению со специальной правой частью

$$L_{\mathbf{x}}[\mathscr{E}] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \tag{7}$$

Здесь $\delta(\mathbf{x})$ — n-мерная дельта-функция, величина $\mathbf{y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ входит в уравнение (7) как n-мерный свободный параметр. Считается, что $\mathbf{y} \in \mathcal{R}^n$.

Основные свойства n-мерной дельта-функции:

1. $\delta(\mathbf{x}) = \delta(x_1)\delta(x_2)\ldots\delta(x_n)$,
2. $\displaystyle\int_{\mathcal{R}^n} \Phi(\mathbf{y})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\, d\mathbf{y} = \Phi(\mathbf{x})$,

где $\delta(x_k)$ — одномерные дельта-функции, $\Phi(\mathbf{x})$ — любая непрерывная функция, $d\mathbf{y} = dy_1 \ldots dy_n$.

Для уравнений с постоянными коэффициентами фундаментальное решение всегда существует. Его можно найти с помощью n-мерного преобразования Фурье [см. В. С. Владимиров (1971, стр. 192–194)].

Частное решение линейного стационарного неоднородного уравнения (6) для произвольной непрерывной функции $\Phi(\mathbf{x})$ выражается с помощью фундаментального решения $\mathscr{E} = \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ в виде интеграла

$$w(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{R}^n} \Phi(\mathbf{y})\mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y}. \tag{8}$$

Замечание 1. Фундаментальное решение $\mathscr{E}$ не единственно, оно определяется с точностью до слагаемого $w_0 = w_0(\mathbf{x})$, являющегося произвольным решением однородного уравнения $L_{\mathbf{x}}[w_0] = 0$.

Замечание 2. Для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами фундаментальное решение имеет вид $\mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathscr{E}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$.

Замечание 3. Часто перед правыми частями уравнений (6) и (7) ставят знак «минус». В этом случае остается справедливой формула (8).

Замечание 4. Частное решение линейных нестационарных неоднородных уравнений можно выразить через фундаментальное решение задачи Коши, см. разд. 0.6.

⊙ *Литература к разделу 0.3*: Л. Хермандер (1965, 1986), Г. Корн, Т. Корн (1968), В. С. Владимиров (1971, 1976), А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972), D. Zwillinger (1989), А. Д. Полянин, А. В. Вязьмин, А. И. Журов, Д. А. Казенин (1998).

0.4. Метод разделения переменных

0.4.1. Общее описание метода разделения переменных

0.4.1-1. Схема решения линейных краевых задач методом разделения переменных.

Многие линейные задачи математической физики решаются методом разделения переменных. На рис. 1 изображена схема применения этого метода для решения нестационарных краевых задач, описываемых линейными однородными уравнениями второго порядка параболического

* Теория обобщенных функций излагается в книгах В. С. Владимирова (1971, 1976).

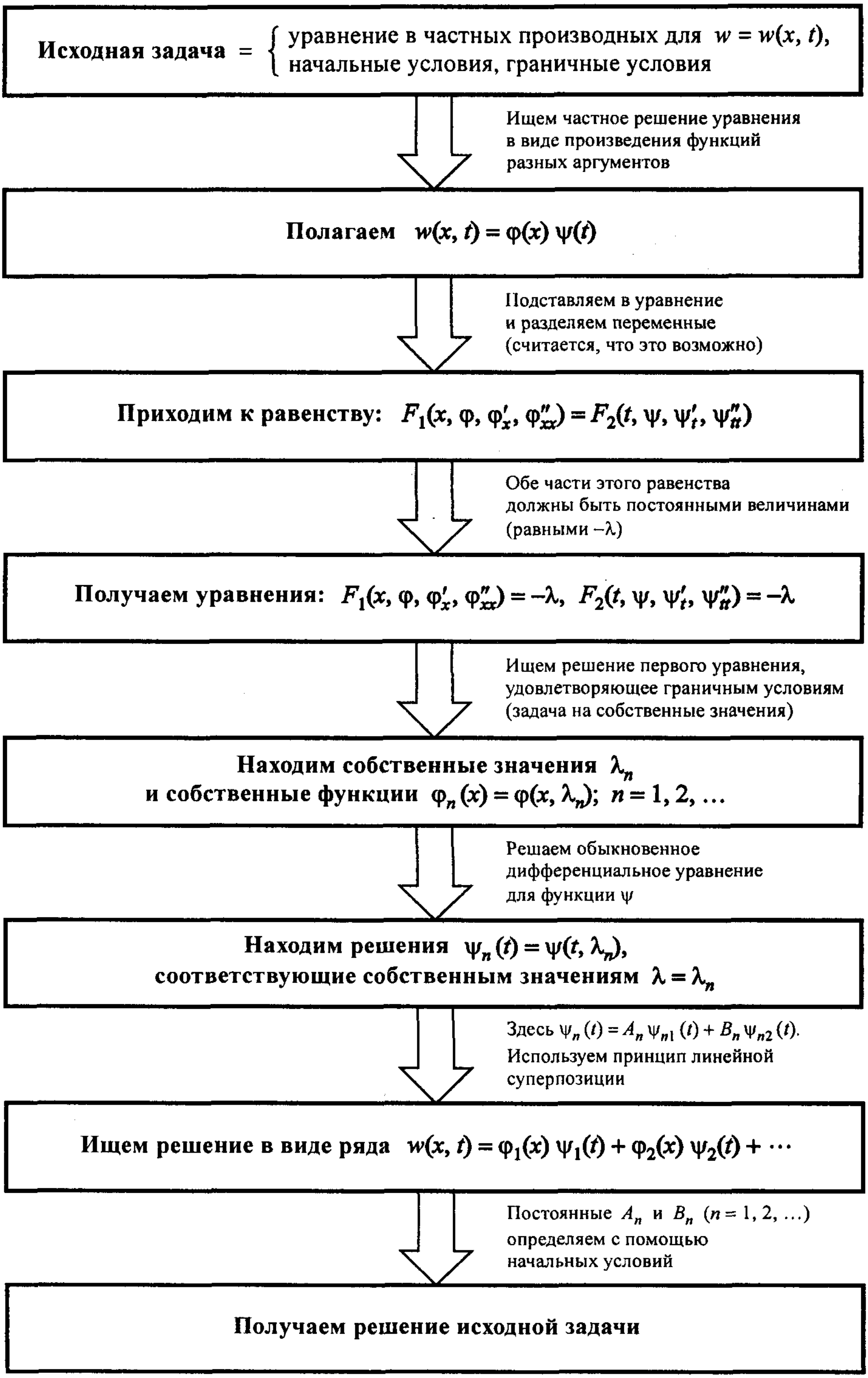

Рис. 1. Схема решения линейных краевых задач методом разделения переменных (для уравнений параболического типа функция F_2 не зависит от ψ''_{tt} и $B_n = 0$).

и гиперболического типов* с однородными граничными условиями и неоднородными начальными условиями. Для простоты рассматриваются задачи с двумя независимыми переменными x и t, где $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ и $t \geqslant 0$.

Задачи, которые можно решить методом разделения переменных по указанной схеме, описываются линейными однородными дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка

$$\alpha(t)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta(t)\frac{\partial w}{\partial t} = a(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial w}{\partial x} + \big[c(x) + \gamma(t)\big]w \qquad (1)$$

с линейными однородными граничными условиями

$$\begin{aligned} s_1\partial_x w + k_1 w = 0 \quad &\text{при} \quad x = x_1, \\ s_2\partial_x w + k_2 w = 0 \quad &\text{при} \quad x = x_2 \end{aligned} \qquad (2)$$

и произвольными начальными условиями

$$w = f_0(x) \quad \text{при} \quad t = 0, \qquad (3)$$

$$\partial_t w = f_1(x) \quad \text{при} \quad t = 0. \qquad (4)$$

Для уравнений параболического типа, которым соответствует $\alpha(t) \equiv 0$ в (1), выставляется только одно начальное условие (3).

Опишем теперь более подробно основные этапы применения метода разделения переменных. Будем считать, что коэффициенты уравнения (1) и граничных условий (2) удовлетворяют условиям:

$$\begin{gathered} \alpha(t),\ \beta(t),\ \gamma(t),\ a(x),\ b(x),\ c(x) \ \text{— непрерывные функции}, \\ \alpha(t) \geqslant 0, \quad 0 < a(x) < \infty, \quad |s_1| + |k_1| > 0, \quad |s_2| + |k_2| > 0. \end{gathered}$$

0.4.1-2. Поиск частных решений. Получение уравнений и граничных условий.

Метод основан на поиске частных решений уравнения (1) в виде произведения функций разных аргументов

$$w(x,t) = \varphi(x)\,\psi(t). \qquad (5)$$

После разделения переменных и элементарных преобразований для функций $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ получим линейные обыкновенные дифференциальные уравнения

$$a(x)\varphi''_{xx} + b(x)\varphi'_x + [\lambda + c(x)]\varphi = 0, \qquad (6)$$

$$\alpha(t)\psi''_{tt} + \beta(t)\psi'_t + [\lambda - \gamma(t)]\psi = 0, \qquad (7)$$

в которые входит свободный параметр λ. В обозначениях, принятых на рис. 1, уравнения (6) и (7) записываются так: $\varphi F_1(x,\varphi,\varphi'_x,\varphi''_{xx}) + \lambda\varphi = 0$ и $\psi F_2(t,\psi,\psi'_t,\psi''_{tt}) + \lambda\psi = 0$.

Подставив (5) в (2), получим граничные условия для функции $\varphi = \varphi(x)$:

$$\begin{aligned} s_1\varphi'_x + k_1\varphi = 0 \quad &\text{при} \quad x = x_1, \\ s_2\varphi'_x + k_2\varphi = 0 \quad &\text{при} \quad x = x_2. \end{aligned} \qquad (8)$$

Линейное однородное обыкновенное дифференциальное уравнение (6) вместе с линейными однородными граничными условиями (8) представляет собой задачу на собственные значения.

0.4.1-3. Решение задачи на собственные значения. Ортогональность собственных функций.

Пусть $\tilde\varphi_1 = \tilde\varphi_1(x,\lambda)$ и $\tilde\varphi_2 = \tilde\varphi_2(x,\lambda)$ — линейно независимые частные решения уравнения (6). Тогда общее решение этого уравнения можно представить в виде линейной комбинации

$$\varphi = C_1\tilde\varphi_1(x,\lambda) + C_2\tilde\varphi_2(x,\lambda), \qquad (9)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Подставим решение (9) в граничные условия (8). В результате для определения коэффициентов C_1 и C_2 получим линейную однородную алгебраическую систему

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(\lambda)C_1 + \varepsilon_{12}(\lambda)C_2 = 0, \\ \varepsilon_{21}(\lambda)C_1 + \varepsilon_{22}(\lambda)C_2 = 0, \end{aligned} \qquad (10)$$

* Метод разделения переменных используется также для решения стационарных краевых задач, описываемых линейными уравнениями эллиптического типа [см. Г. Н. Положий (1964, стр. 417–422), В. Я. Арсенин (1974, стр. 117–120)].

где $\varepsilon_{ij}(\lambda) = \big[s_i(\tilde\varphi_j)'_x + k_i\tilde\varphi_j\big]_{x=x_i}$. Чтобы система (10) имела нетривиальные решения, ее определитель должен быть равен нулю:

$$\varepsilon_{11}(\lambda)\varepsilon_{22}(\lambda) - \varepsilon_{12}(\lambda)\varepsilon_{21}(\lambda) = 0. \tag{11}$$

Решая трансцендентное уравнение (11) находим собственные значения $\lambda = \lambda_n$, где $n = 1, 2, \ldots$ При этих значениях существуют нетривиальные решения уравнения (6):

$$\varphi_n(x) = \varepsilon_{12}(\lambda_n)\tilde\varphi_1(x,\lambda_n) - \varepsilon_{11}(\lambda_n)\tilde\varphi_2(x,\lambda_n), \tag{12}$$

которые называются собственными функциями (эти функции определяется с точностью до постоянного множителя).

Для удобства дальнейшего анализа уравнение (6) представим в виде

$$[p(x)\varphi'_x]'_x + [\lambda\rho(x) - q(x)]\varphi = 0, \tag{13}$$

где функции $p(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ определяются по формулам

$$p(x) = \exp\Big[\int\frac{b(x)}{a(x)}\,dx\Big],\quad q(x) = -\frac{c(x)}{a(x)}\exp\Big[\int\frac{b(x)}{a(x)}\,dx\Big],\quad \rho(x) = \frac{1}{a(x)}\exp\Big[\int\frac{b(x)}{a(x)}\,dx\Big]. \tag{14}$$

Из исходных предположений (см. конец разд. 0.4.1-1) следует, что $p(x)$, $p'_x(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ — непрерывные функции, $p(x) > 0$, $\rho(x) > 0$.

Относительно задачи на собственные значения (13), (8) известно следующее:

1. Все собственные значения λ_1, λ_2, ... вещественны и $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$. (Поэтому может быть лишь конечное число отрицательных собственных значений.)

2. Система собственных функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... является ортогональной на отрезке $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ с весовой функцией $\rho(x)$, т. е.

$$\int_{x_1}^{x_2}\rho(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx = 0 \quad \text{при} \quad n \neq m. \tag{15}$$

3. При выполнении условий

$$q(x) \geqslant 0,\quad s_1k_1 \leqslant 0,\quad s_2k_2 \geqslant 0, \tag{16}$$

отрицательных собственных значений нет. Если $q \equiv 0$, $k_1 = k_2 = 0$, то наименьшим собственным значением будет $\lambda_1 = 0$, которому отвечает собственная функция $\varphi_1 = \mathrm{const}$. В остальных случаях при выполнении условий (16) все собственные значения положительны [первое неравенство в (16) выполняется, если $c(x) \leqslant 0$].

В разд. 1.8.9 приведены некоторые формулы для оценки собственных значений λ_n и собственных функций $\varphi_n(x)$.

0.4.2. Решение краевых задач для уравнений параболического и гиперболического типов

0.4.2-1. Решение краевых задач для уравнений параболического типа.

Для уравнений параболического типа в (1) и (7) следует положить $\alpha(t) \equiv 0$. Кроме того будем считать, что $\beta(t) > 0$, $\gamma(t) < \min\lambda_n$.

Сначала находим решения уравнения (7), соответствующие собственным значениям $\lambda = \lambda_n$ и удовлетворяющие условиям нормировки $\psi_n(0) = 1$:

$$\psi_n(t) = \exp\Big[\int_0^t \frac{\gamma(\xi) - \lambda_n}{\beta(\xi)}\,d\xi\Big]. \tag{17}$$

Решение исходной нестационарной краевой задачи (1)–(3) для уравнения параболического типа ищется в виде

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\varphi_n(x)\,\psi_n(t), \tag{18}$$

где A_n — постоянные коэффициенты, а функции $w_n(x,t) = \varphi_n(x)\,\psi_n(t)$ представляют собой частные решения вида (5), которые удовлетворяют граничным условиям (2). В силу принципа линейной суперпозиции ряд (18) также будет решением исходного уравнения с частными производными, удовлетворяющим граничным условиям.

Для определения коэффициентов A_n подставим ряд (18) в начальное условие (3). В результате имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_n(x) = f_0(x).$$

Умножим обе части этого равенства на $\rho(x)\varphi_n(x)$ и проинтегрируем полученное выражение по x на отрезке $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$. Учитывая свойства (15), находим коэффициенты

$$A_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\varphi_n(x) f_0(x)\,dx, \quad \|\varphi_n\|^2 = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\varphi_n^2(x)\,dx. \tag{19}$$

Формула для определения весовой функции $\rho(x)$ приведена в (14).

Формулы (18), (12), (17), (19) дают формальное решение нестационарной краевой задачи (1)–(3) при $\alpha(t) \equiv 0$.

Пример 1. Пусть $\beta(t) = 1$ и $\gamma(t) = 0$. Подставляя эти значения в формулу (17), имеем

$$\psi_n(t) = \exp(-\lambda_n t). \tag{20}$$

Если функция $f_0(x)$ дважды непрерывно дифференцируема и выполнены условия согласования (см. разд. 0.4.2-3), то ряд (18) сходится и допускает почленное дифференцирование (однократное по t и двукратное по x). Формулы (18), (12), (19), (20) в этом случае дают классическое гладкое решение задачи (1)–(3). [Если гладкость функции $f_0(x)$ меньше указанной или не выполняются условия согласования, то ряд (18) может сходится к разрывной функции и будет давать только обобщенное решение.]

0.4.2-2. Решение краевых задач для уравнений гиперболического типа.

Для уравнений гиперболического типа решение краевой задачи (1)–(4) ищется в виде

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)\big[A_n \psi_{n1}(t) + B_n \psi_{n2}(t)\big]. \tag{21}$$

Здесь A_n и B_n — постоянные коэффициенты, а $\psi_{n1}(t)$, $\psi_{n2}(t)$ — частные решения линейного уравнения (7) для функции ψ (при $\lambda = \lambda_n$), которые удовлетворяют условиям

$$\psi_{n1}(0) = 1, \quad \psi'_{n1}(0) = 0; \qquad \psi_{n2}(0) = 0, \quad \psi'_{n2}(0) = 1. \tag{22}$$

Подставим решение (21) в начальные условия (3)–(4). В результате имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_n(x) = f_0(x), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} B_n \varphi_n(x) = f_1(x).$$

Умножим эти равенства на $\rho(x)\varphi_n(x)$ и проинтегрируем полученные выражения по x на отрезке $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$. Учитывая свойства (15), находим коэффициенты ряда (21):

$$A_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\varphi_n(x) f_0(x)\,dx, \quad B_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\varphi_n(x) f_1(x)\,dx, \tag{23}$$

где формула для вычисления величины $\|\varphi_n\|$ приведена в (19).

Формулы (21), (12), (23) дают формальное решение нестационарной краевой задачи (1)–(4) при $\alpha(t) > 0$.

Пример 2. Пусть $\alpha(t) = 1$, $\beta(t) = \gamma(t) = 0$, $\lambda_n > 0$. Решения уравнения (7), удовлетворяющие условиям (22), имеют вид

$$\psi_{n1}(t) = \cos\big(\sqrt{\lambda_n}\,t\big), \quad \psi_{n2}(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \sin\big(\sqrt{\lambda_n}\,t\big). \tag{24}$$

Если функции $f_0(x)$ и $f_1(x)$ имеют соответственно три и две непрерывные производные и выполнены условия согласования (см. разд. 0.4.2-3), то ряд (21) сходится и допускает двукратное почленное дифференцирование. Формулы (21), (12), (23), (24) в этом случае дают классическое гладкое решение задачи (1)–(4).

0.4.2-3. Условия согласования граничных и начальных условий.

Уравнения параболического типа, $\alpha(t) \equiv 0$. Пусть функция w имеет непрерывную производную по t и две непрерывных производных по x и является решением задачи (1)–(3). Тогда должны выполняться условия согласования граничных условий (2) и начального условия (3):

$$[s_1 f_0' + k_1 f_0]_{x=x_1} = 0, \qquad [s_2 f_0' + k_2 f_0]_{x=x_2} = 0. \tag{25}$$

В двух случаях должны выполняться также дополнительные условия согласования

$$\begin{aligned} &[a(x) f_0'' + b(x) f_0']_{x=x_1} = 0 \quad \text{при} \quad s_1 = 0, \\ &[a(x) f_0'' + b(x) f_0']_{x=x_2} = 0 \quad \text{при} \quad s_2 = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Здесь штрихами обозначены производные по x.

Уравнения гиперболического типа. Пусть функция w является дважды непрерывно дифференцируемым решением задачи (1)–(4). Тогда должны выполняться условия (25) и (26), к которым следует добавить условия согласования граничных условий (2) и начального условия (4):

$$[s_1 f_1' + k_1 f_1]_{x=x_1} = 0, \qquad [s_2 f_1' + k_2 f_1]_{x=x_2} = 0.$$

0.4.2-4. Линейные неоднородные уравнения с неоднородными граничными условиями.

Уравнения параболического типа, $\alpha(t) \equiv 0$. Решение краевой задачи, описываемой линейным однородным уравнением параболического типа (1) с линейными однородными граничными условиями (2) и неоднородным начальным условием (3), дается формулами (18), (12), (17), (19). Это решение можно записать в виде

$$w(x,t) = \int_{x_1}^{x_2} G(x,y,t,0) f_0(y)\,dy.$$

Здесь $G(x,y,t,\tau)$ — функция Грина, которая определяется по формуле

$$G(x,y,t,\tau) = \rho(y) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\|\varphi_n\|^2} \psi_n(t,\tau), \tag{27}$$

где $\psi_n = \psi_n(t,\tau)$ — решение уравнения (7) при $\alpha(t) \equiv 0$, $\lambda = \lambda_n$, которое удовлетворяет начальному условию

$$\psi_n = 1 \quad \text{при} \quad t = \tau.$$

Функцию $\psi_n(t,\tau)$ можно найти по формуле (17), где нижний предел интегрирования должен быть равен τ (вместо нуля).

Решение более общих краевых задач, описываемых соответствующими линейными неоднородными уравнениями с неоднородными граничными и начальными условиями, проще всего получить с помощью функции Грина (27) по формуле (6) из разд. 0.7.1.

Уравнения гиперболического типа. Решение краевой задачи, описываемой линейным однородным уравнением гиперболического типа (1) с линейными однородными граничными условиями (2) и полуоднородными начальными условиями (3)–(4) при $f_0(x) \equiv 0$, дается формулами (21), (12), (23) при $A_n = 0$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$. Это решение можно записать в виде

$$w(x,t) = \int_{x_1}^{x_2} G(x,y,t,0) f_1(y)\,dy.$$

Здесь $G(x,y,t,\tau)$ — функция Грина, которая определяется по формуле (27), где $\psi_n = \psi_n(t,\tau)$ — решение уравнения (7) для функции ψ при $\lambda = \lambda_n$, которое удовлетворяет начальным условиям

$$\psi_n = 0 \quad \text{при} \quad t = \tau, \qquad \psi_n' = 1 \quad \text{при} \quad t = \tau.$$

В частном случае $\alpha(t) = 1$, $\beta(t) = \gamma(t) = 0$ имеем $\psi_n(t,\tau) = \lambda_n^{-1/2} \sin\bigl[\lambda_n^{1/2}(t-\tau)\bigr]$.

Решение более общих краевых задач, описываемых соответствующими линейными неоднородными уравнениями с неоднородными граничными и начальными условиями, проще всего получить с помощью функции Грина (27) по формуле (14) из разд. 0.7.2.

⊙ *Литература к разделу 0.4*: И. Г. Петровский (1961), В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964), E. Butkov (1968), А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972), D. Zwillinger (1989).

0.5. Метод интегральных преобразований

0.5.1. Основные интегральные преобразования

Для решения линейных задач математической физики широко используются различные интегральные преобразования.

Интегральные преобразования имеют вид

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_a^b \varphi(x,\lambda) f(x)\,dx.$$

Функция $f(x)$ называется оригиналом, $\tilde{f}(\lambda)$ — изображением функции $f(x)$, $\varphi(x,\lambda)$ — ядром интегрального преобразования. Пределы интегрирования a и b — действительные числа (обычно $a=0$, $b=\infty$ или $a=-\infty$, $b=\infty$).

Соответствующие формулы обращения

$$f(x) = \int_{\mathcal{L}} \psi(x,\lambda)\tilde{f}(\lambda)\,d\lambda$$

позволяют по заданному изображению $\tilde{f}(\lambda)$ восстановить оригинал $f(x)$. Контур интегрирования $\mathcal{L}$ может лежать как на действительной оси, так и в комплексной плоскости.

Наиболее распространенные интегральные преобразования указаны в табл. 3 (об ограничениях, накладываемых на функции и параметры преобразований, см. в литературе, приведенной в конце разд. 0.5).

ТАБЛИЦА 3
Основные интегральные преобразования.

Название	Интегральное преобразование	Формула обращения
Преобразование Лапласа	$\tilde{f}(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt$	$f(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt}\tilde{f}(p)\,dp$
Преобразование Фурье	$\tilde{f}(u)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux}f(x)\,dx$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\tilde{f}(u)\,du$
Синус-преобразование Фурье	$\tilde{f}_s(u)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sin(xu)f(x)\,dx$	$f(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sin(xu)\tilde{f}_s(u)\,du$
Косинус-преобразование Фурье	$\tilde{f}_c(u)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos(xu)f(x)\,dx$	$f(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos(xu)\tilde{f}_c(u)\,du$
Преобразование Меллина	$\hat{f}(s)=\int_0^\infty x^{s-1}f(x)\,dx$	$f(x)=\dfrac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s}\hat{f}(s)\,ds$
Преобразование Ханкеля	$\hat{f}_\nu(u)=\int_0^\infty xJ_\nu(xu)f(x)\,dx$	$f(x)=\int_0^\infty uJ_\nu(xu)\hat{f}_\nu(u)\,du$
Преобразование Мейера	$\hat{f}(s)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sqrt{sx}\,K_\nu(sx)f(x)\,dx$	$f(x)=\dfrac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sqrt{sx}\,I_\nu(sx)\hat{f}(s)\,ds$

Обозначения: $i^2=-1$, $J_\mu(x)$ и $Y_\mu(x)$ — функции Бесселя первого и второго рода, $I_\mu(x)$ и $K_\mu(x)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода.

Наиболее распространенными интегральными преобразованиями являются преобразования Лапласа и Фурье. Ниже дано краткое описание этих интегральных преобразований.

0.5.2. Преобразование Лапласа и его применение в математической физике

0.5.2-1. Преобразование Лапласа. Обратное преобразование Лапласа.

Преобразование Лапласа для произвольной (комплекснозначной) функции $f(t)$ действительного переменного t ($t \geqslant 0$) определяется следующим образом:

$$\tilde{f}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt, \tag{1}$$

где $p = s + i\sigma$ — комплексная переменная, $i^2 = -1$.

Преобразование Лапласа существует для непрерывных и кусочно-непрерывных функций, удовлетворяющих условию $|f(t)| < Me^{\sigma_0 t}$, где $M > 0$ и $\sigma_0 \geqslant 0$ — некоторые числа. Далее считаем, что в указанной оценке взято наименьшее из возможных чисел σ_0, которое называется *показателем роста функции* $f(t)$. Для всякого оригинала $f(t)$ функция $\tilde{f}(p)$ определена в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ и является в этой полуплоскости аналитической функцией.

По известному изображению $\tilde{f}(p)$ оригинал $f(t)$ находится с помощью обратного преобразования Лапласа

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(p) e^{pt}\,dp, \tag{2}$$

где путь интегрирования расположен параллельно мнимой оси комплексной плоскости справа от всех особых точек функции $\tilde{f}(p)$, что соответствует $c > \sigma_0$.

Интеграл в (2) понимается в смысле главного значения:

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(p) e^{pt}\,dp = \lim_{\omega\to\infty} \int_{c-i\omega}^{c+i\omega} \tilde{f}(p) e^{pt}\,dp.$$

В области $t < 0$ формула (2) дает $f(t) \equiv 0$.

Формула (2) справедлива для непрерывных функций. Если в точке $t = t_0 > 0$ функция $f(t)$ имеет конечный разрыв первого рода, то правая часть формулы (2) в этой точке дает значение $\frac{1}{2}[f(t_0 - 0) + f(t_0 + 0)]$ (при $t_0 = 0$ первый член в квадратных скобках должен быть опущен).

Преобразование Лапласа (1) и формулу обращения (2) кратко будем обозначать так:

$$\tilde{f}(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}, \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(p)\}.$$

0.5.2-2. Основные свойства преобразования Лапласа.

В табл. 4 приведены основные формулы соответствия оригиналов и изображений преобразования Лапласа. В табл. 5 указаны преобразования Лапласа некоторых функций.

ТАБЛИЦА 4
Основные свойства преобразования Лапласа.

№	Оригинал	Изображение	Операция
1	$af_1(t) + bf_2(t)$	$a\tilde{f}_1(p) + b\tilde{f}_2(p)$	Линейность
2	$f(t/a),\ a > 0$	$a\tilde{f}(ap)$	Изменение масштаба
3	$t^n f(t);\ n = 1, 2, \ldots$	$(-1)^n \tilde{f}_p^{(n)}(p)$	Дифференцирование изображения
4	$e^{at} f(t)$	$\tilde{f}(p - a)$	Смещение в комплексной плоскости
5	$f'_t(t)$	$p\tilde{f}(p) - f(+0)$	Дифференцирование
6	$f_t^{(n)}(t)$	$p^n \tilde{f}(p) - \sum\limits_{k=1}^{n} p^{n-k} f_t^{(k-1)}(+0)$	Дифференцирование
7	$t^m f_t^{(n)}(t),\quad m \geqslant n$	$(-1)^m \left[p^n \tilde{f}(p)\right]_p^{(m)}$	Дифференцирование
8	$\int_0^t f(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{p}\tilde{f}(p)$	Интегрирование
9	$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau)\,d\tau$	$\tilde{f}_1(p)\tilde{f}_2(p)$	Свертка

ТАБЛИЦА 5
Преобразования Лапласа некоторых функций.

№	Оригинал, $f(t)$	Изображение, $\tilde{f}(p)$	Замечания
1	1	$\dfrac{1}{p}$	—
2	t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	$n = 1, 2, \ldots$
3	t^a	$\Gamma(a+1)p^{-a-1}$	$a > -1$
4	e^{-at}	$(p+a)^{-1}$	—
5	$t^a e^{-bt}$	$\Gamma(a+1)(p+b)^{-a-1}$	$a > -1$
6	$\operatorname{sh}(at)$	$\dfrac{a}{p^2 - a^2}$	—
7	$\operatorname{ch}(at)$	$\dfrac{p}{p^2 - a^2}$	—
8	$\ln t$	$-\dfrac{1}{p}(\ln p + \mathcal{C})$	$\mathcal{C} = 0{,}5772\ldots$ — постоянная Эйлера
9	$\sin(at)$	$\dfrac{a}{p^2 + a^2}$	—
10	$\cos(at)$	$\dfrac{p}{p^2 + a^2}$	—
11	$\operatorname{erfc}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\dfrac{1}{p}\exp\left(-a\sqrt{p}\right)$	$a \geqslant 0$
12	$J_0(at)$	$\dfrac{1}{\sqrt{p^2 + a^2}}$	$J_0(x)$ — функция Бесселя

Существуют подробные таблицы прямых и обратных преобразований Лапласа (см. литературу в конце разд. 0.5), в которых сведены вместе конкретные функции и их изображения. Эти таблицы удобно использовать для решения линейных дифференциальных и интегральных уравнений.

Отметим важный случай, когда изображение является рациональной функцией вида

$$\tilde{f}(p) = \frac{R(p)}{Q(p)},$$

где $Q(p)$ и $R(p)$ — многочлены переменной p, причем степень многочлена $Q(p)$ больше степени многочлена $R(p)$. Считаем, что все нули знаменателя простые, т. е. справедливо равенство $Q(p) \equiv \text{const}\,(p - \lambda_1)(p - \lambda_2)\ldots(p - \lambda_n)$. Тогда оригинал можно определить по формуле

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{R(\lambda_k)}{Q'(\lambda_k)} \exp(\lambda_k t),$$

где штрихом обозначены производные.

0.5.2-3. Решение задач математической физики с помощью преобразования Лапласа.

На рис. 2 изображена схема применения преобразования Лапласа для решения линейных краевых задач, описываемых уравнениями параболического и гиперболического типов с двумя независимыми переменными, коэффициенты которых не зависят от t.

Важно отметить, что с помощью преобразования Лапласа исходная задача для уравнения с частными производными сводится к более простой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения с параметром p. При этом производные по времени t заменяются соответствующими алгебраическими выражениями с учетом начальных условий (см. свойства 5 или 6 в табл. 4).

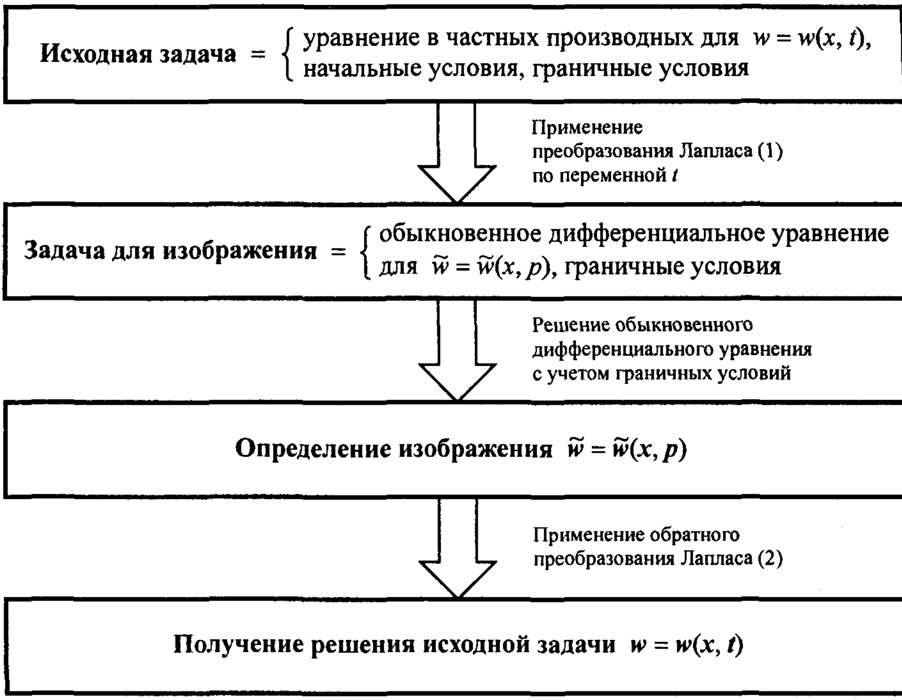

Рис. 2. Схема решения линейных краевых задач с помощью преобразования Лапласа.

Пример 1. Рассмотрим задачу для уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned}
&\partial_t w = \partial_{xx} w, && (x > 0,\ t > 0),\\
&w = 0 \quad \text{при}\quad t = 0 && (\text{начальное условие}),\\
&w = w_0 \quad \text{при}\quad x = 0 && (\text{граничное условие}),\\
&w \to 0 \quad \text{при}\quad x \to \infty && (\text{граничное условие}).
\end{aligned}$$

Для решения используем преобразование Лапласа по времени t. Полагая $\tilde{w} = \mathcal{L}\{w\}$ и учитывая соотношения

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}\{\partial_t w\} = p\tilde{w} - w|_{t=0} = p\tilde{w} \quad [\text{использовано свойство 5 из табл. 4 и начальное условие}],\\
&\mathcal{L}\{w_0\} = w_0\mathcal{L}\{1\} = w_0/p \quad [\text{использовано свойство 1 из табл. 4 и равенство } \mathcal{L}\{1\} = 1/p],
\end{aligned}$$

приходим к задаче для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с параметром p:

$$\begin{aligned}
&\tilde{w}''_{xx} - p\tilde{w} = 0,\\
&\tilde{w} = w_0/p \quad \text{при}\quad x = 0 \quad (\text{граничное условие}),\\
&\tilde{w} \to 0 \quad \text{при}\quad x \to \infty \quad (\text{граничное условие}).
\end{aligned}$$

Интегрируя уравнение, получим общее решение $\tilde{w} = A_1(p)e^{-x\sqrt{p}} + A_2(p)e^{x\sqrt{p}}$. Удовлетворяя граничным условиям, определим постоянные $A_1(p) = w_0/p$, $A_2(p) = 0$. В результате находим изображение

$$\tilde{w} = \frac{w_0}{p}e^{-x\sqrt{p}}.$$

Применим к обеим частям этого равенства обратное преобразование Лапласа. Оригинал правой части определим с помощью табл. 5 (см. строку № 11 при $a = x$). В итоге получим решение исходной задачи

$$w = w_0 \operatorname{erfc}\Big(\frac{x}{2\sqrt{t}}\Big).$$

ТАБЛИЦА 6
Основные свойства преобразования Фурье.

№	Оригинал	Изображение	Операция
1	$af_1(x)+bf_2(x)$	$a\tilde{f}_1(u)+b\tilde{f}_2(u)$	Линейность
2	$f(x/a),\ a>0$	$a\tilde{f}(au)$	Изменение масштаба
3	$x^n f(x);\ n=1,2,\dots$	$i^n\tilde{f}_u^{(n)}(u)$	Дифференцирование изображения
4	$f''_{xx}(x)$	$-u^2\tilde{f}(u)$	Дифференцирование
5	$f_x^{(n)}(x)$	$(iu)^n\tilde{f}(u)$	Дифференцирование
6	$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)f_2(x-\xi)\,d\xi$	$\tilde{f}_1(u)\tilde{f}_2(u)$	Свертка

0.5.3. Преобразование Фурье и его применение в математической физике

0.5.3-1. Преобразование Фурье и его свойства.

Преобразование Фурье определяется следующим образом:

$$\tilde{f}(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}\,dx,\qquad i^2=-1. \tag{3}$$

Эта формула имеет смысл для любой функции $f(x)$, абсолютно интегрируемой на интервале $(\infty,+\infty)$. Преобразование Фурье (3) кратко будем обозначать так: $\tilde{f}(u)=\mathcal{F}\{f(x)\}$.

По известному изображению $\tilde{f}(u)$ оригинал $f(x)$ находится с помощью обратного преобразования Фурье

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(u)e^{iux}\,du, \tag{4}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения. Формулу обращения (4) кратко будем обозначать так: $f(x)=\mathcal{F}^{-1}\{\tilde{f}(u)\}$.

Формула (4) справедлива для непрерывных функций. Если в точке $x=x_0$ функция $f(x)$ имеет конечный разрыв первого рода, то правая часть формулы (4) в этой точке дает значение $\frac{1}{2}\bigl[f(x_0-0)+f(x_0+0)\bigr]$.

В табл. 6 приведены основные формулы соответствия оригиналов и изображений преобразования Фурье.

0.5.3-2. Решение задач математической физики с помощью преобразования Фурье.

Преобразование Фурье обычно используется для решения краевых задач, описываемых линейными дифференциальными уравнениями с частными производными, коэффициенты которых не зависят от пространственной переменной x $(-\infty<x<\infty)$.

Схема решения линейных краевых задач с помощью преобразования Фурье аналогична схеме, используемой при решении задач с помощью преобразования Лапласа. При преобразовании Фурье производные по переменной x в уравнении заменяются соответствующими алгебраическими выражениями (см. свойства 4 или 5 в табл. 6). В случае двух независимых переменных задача для уравнения с частными производными сводится к более простой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения с параметром u. Решив эту задачу, находят изображение. Затем, используя обратное преобразование Фурье, получают решение исходной краевой задачи.

Пример 2. Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$\partial_t w=\partial_{xx}w\qquad(-\infty<x<\infty),$$
$$w=f(x)\quad\text{при}\quad t=0\quad(\text{начальное условие}).$$

Для решения используем преобразование Фурье по пространственной переменной x. Полагая $\tilde{w}=\mathcal{F}\{w\}$ и учитывая соотношение $\mathcal{F}\{\partial_{xx}w\}=-u^2\tilde{w}$ (см. свойство 4 в табл. 6) приходим к задаче для линейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с параметром u:

$$\tilde{w}'_t+u^2\tilde{w}=0,$$
$$w=\tilde{f}(u)\quad\text{при}\quad t=0,$$

где $\tilde{f}(u)$ определяется формулой (3). Решив эту задачу, находим изображение

$$\tilde{w} = \tilde{f}(u)e^{-u^2 t}.$$

Применим к обеим частям этого равенства обратное преобразование Фурье. После некоторых вычислений получим решение исходной задачи:

$$w = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(u)e^{-u^2 t}e^{iux}\,du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-iu\xi}d\xi\right] e^{-u^2t+iux}du =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2t+iu(x-\xi)}du = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\exp\Bigl[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\Bigr]\,d\xi.$$

Здесь на последнем этапе была использована формула $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a^2u^2 + bu)\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{|a|} \exp\Bigl(\frac{b^2}{4a^2}\Bigr)$.

Преобразование Фурье допускает n-мерное обобщение:

$$\tilde{f}(\mathbf{u}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathcal{R}^n} f(\mathbf{x})e^{-i(\mathbf{u}\cdot\mathbf{x})}\,d\mathbf{x}, \qquad (\mathbf{u}\cdot\mathbf{x}) = u_1x_1 + \cdots + u_nx_n, \tag{5}$$

где $f(\mathbf{x}) = f(x_1,\ldots,x_n)$, $\tilde{f}(\mathbf{u}) = f(u_1,\ldots,u_n)$, $d\mathbf{x} = dx_1\ldots dx_n$.

Соответствующее обратное преобразование Фурье имеет вид

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathcal{R}^n} \tilde{f}(\mathbf{u})e^{i(\mathbf{u}\cdot\mathbf{x})}\,d\mathbf{u}, \qquad d\mathbf{u} = du_1\ldots du_n.$$

Преобразование Фурье (5) часто используется в теории линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами ($\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$).

⊙ *Литература к разделу 0.5*: И. Снеддон (1955), В. А. Диткин, А. П. Прудников (1965, 1974), Г. Бейтмен, А. Эрдейи (1969, 1970), J. W. Miles (1971), Г. Дёч (1971), А. В. Бицадзе (1978, стр. 246–265), B. Davis (1978), Yu. A. Brychkov, A. P. Prudnikov (1989), D. Zwillinger (1989), W. H. Beyer (1991), А. В. Манжиров, А. Д. Полянин (1999).

0.6. Представление решения задачи Коши через фундаментальное решение

0.6.1. Задача Коши для уравнений параболического типа

0.6.1-1. Общая формула для решения задачи Коши.

Пусть $\mathbf{x} = \{x_1,\ldots,x_n\}$ и $\mathbf{y} = \{y_1,\ldots,y_n\}$, где $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$ и $\mathbf{y} \in \mathcal{R}^n$.

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение параболического типа с произвольной правой частью

$$\frac{\partial w}{\partial t} - L_{\mathbf{x},t}[w] = \Phi(\mathbf{x},t), \tag{1}$$

где линейный дифференциальный оператор второго порядка $L_{\mathbf{x},t}$ определяется выражением (2) из разд. 0.2.1.

Решение задачи Коши для уравнения (1) с произвольным начальным условием

$$w = f(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad t = 0$$

можно представить в виде суммы двух интегралов

$$w(\mathbf{x},t) = \int_0^t \int_{\mathcal{R}^n} \Phi(\mathbf{y},\tau)\mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)\,d\mathbf{y}\,d\tau + \int_{\mathcal{R}^n} f(\mathbf{y})\mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t,0)\,d\mathbf{y}, \qquad d\mathbf{y} = dy_1\ldots dy_n.$$

Здесь $\mathscr{E} = \mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)$ — фундаментальное решение задачи Коши, которое при $t > \tau \geqslant 0$ удовлетворяет линейному однородному уравнению

$$\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t} - L_{\mathbf{x},t}[\mathscr{E}] = 0 \tag{2}$$

с неоднородным начальным условием специального вида

$$\mathscr{E} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \quad \text{при} \quad t = \tau. \tag{3}$$

В задачу (2)–(3) величины τ и $\mathbf{y}$ входят как свободные параметры, а $\delta(\mathbf{x}) = \delta(x_1)\ldots\delta(x_n)$ — n-мерная дельта-функция.

Замечание 1. Если коэффициенты дифференциального оператора $L_{\mathbf{x},t}$ в (2) не зависят от времени t, то фундаментальное решение задачи Коши имеет вид $\mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau) = \mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)$.

Замечание 2. Для дифференциального оператора $L_{\mathbf{x},t}$ с постоянными коэффициентами фундаментальное задачи Коши решение имеет вид $\mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau) = \mathscr{E}(\mathbf{x}-\mathbf{y},t-\tau)$.

0.6.1-2. Фундаментальное решение, допускающее неполное разделение переменных.

Рассмотрим специальный случай, когда дифференциальный оператор $L_{\mathbf{x},t}$ в уравнении (1) можно представить в виде суммы

$$L_{\mathbf{x},t}[w] = L_{1,t}[w] + \cdots + L_{n,t}[w], \tag{4}$$

где каждое слагаемое зависит только от одной пространственной координаты и времени

$$L_{k,t}[w] \equiv a_k(x_k,t)\frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2} + b_k(x_k,t)\frac{\partial w}{\partial x_k} + c_k(x_k,t)w, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Уравнения этого вида часто встречаются в приложениях. Фундаментальное решение задачи Коши для n-мерного уравнения (1) с оператором (4) можно представить в виде произведения

$$\mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau) = \prod_{k=1}^{n} \mathscr{E}_k(x_k,y_k,t,\tau), \tag{5}$$

где $\mathscr{E}_k = \mathscr{E}_k(x_k,y_k,t,\tau)$ — фундаментальные решения, которые удовлетворяют одномерным уравнениям

$$\frac{\partial \mathscr{E}_k}{\partial t} - L_{k,t}[\mathscr{E}_k] = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

с начальными условиями

$$\mathscr{E}_k = \delta(x_k - y_k) \quad \text{при} \quad t = \tau.$$

В данном случае фундаментальное решение задачи Коши (5) допускает неполное разделение переменных (оно разделяется по пространственным переменным $x_1, \ldots, x_n$, но не разделяется по времени t).

0.6.2. Задача Коши для уравнений гиперболического типа

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение гиперболического типа с произвольной правой частью

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \varphi(\mathbf{x},t)\frac{\partial w}{\partial t} - L_{\mathbf{x},t}[w] = \Phi(\mathbf{x},t) \tag{6}$$

где линейный дифференциальный оператор второго порядка $L_{\mathbf{x},t}$ определяется выражением (2) из разд. 0.2.1, $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$.

Решение задачи Коши для уравнения (6) с общими начальными условиями

$$w = f_0(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad t = 0,$$
$$\partial_t w = f_1(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad t = 0$$

можно представить в виде суммы

$$w(\mathbf{x},t) = \int_0^t \int_{\mathcal{R}^n} \Phi(\mathbf{y},\tau)\mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)\,d\mathbf{y}\,d\tau - \int_{\mathcal{R}^n} f_0(\mathbf{y})\Big[\frac{\partial}{\partial \tau}\mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)\Big]_{\tau=0} d\mathbf{y} +$$
$$+ \int_{\mathcal{R}^n} \big[f_1(\mathbf{y}) + f_0(\mathbf{y})\varphi(\mathbf{y},0)\big]\mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t,0)\,d\mathbf{y}, \qquad d\mathbf{y} = dy_1 \ldots dy_n.$$

Здесь $\mathscr{E} = \mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)$ — фундаментальное решение задачи Коши, которое при $t > \tau \geqslant 0$ удовлетворяет линейному однородному уравнению

$$\frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial t^2} + \varphi(\mathbf{x},t)\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t} - L_{\mathbf{x},t}[\mathscr{E}] = 0 \tag{7}$$

с полуоднородными начальными условиями специального вида

$$\begin{aligned} \mathscr{E} &= 0 && \text{при} \quad t = \tau, \\ \partial_t \mathscr{E} &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) && \text{при} \quad t = \tau. \end{aligned} \tag{8}$$

В задачу (7)–(8) величины τ и $\mathbf{y}$ входят как свободные параметры ($\mathbf{y} \in \mathcal{R}^n$).

Замечание 1. Если коэффициенты дифференциального оператора $L_{\mathbf{x},t}$ в (7) не зависят от времени t, то фундаментальное решение задачи Коши имеет вид $\mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau) = \mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)$. В этом случае $\frac{\partial}{\partial \tau}\mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)\big|_{\tau=0} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t)$.

Замечание 2. Для дифференциального оператора $L_{\mathbf{x},t}$ с постоянными коэффициентами фундаментальное решение задачи Коши имеет вид $\mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau) = \mathscr{E}(\mathbf{x}-\mathbf{y},t-\tau)$.

⊙ *Литература к разделу 0.6*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964), Г. Е. Шилов (1965), А. Д. Полянин (2000 *b*, *c*).

0.7. Неоднородные краевые задачи с одной пространственной переменной. Представление решения через функцию Грина

0.7.1. Задачи для уравнений параболического типа

0.7.1-1. Постановка задачи ($t \geqslant 0,\, x_1 \leqslant x \leqslant x_2$).

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение параболического типа с переменными коэффициентами общего вида в одномерном случае записывается так:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - L_{x,t}[w] = \Phi(x,t), \tag{1}$$

где

$$L_{x,t}[w] \equiv a(x,t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial w}{\partial x} + c(x,t)w, \qquad a(x,t) > 0. \tag{2}$$

Рассмотрим нестационарную краевую задачу для уравнения (1) с начальным условием общего вида

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \tag{3}$$

и произвольными линейными неоднородными граничными условиями

$$s_1\frac{\partial w}{\partial x} + k_1(t)w = g_1(t) \quad \text{при} \quad x = x_1, \tag{4}$$

$$s_2\frac{\partial w}{\partial x} + k_2(t)w = g_2(t) \quad \text{при} \quad x = x_2. \tag{5}$$

Задавая соответствующим образом значения коэффициентов s_1, s_2 и функции $k_1 = k_1(t)$, $k_2 = k_2(t)$ в (4) и (5) можно получить первую, вторую, третью и смешанные краевые задачи для уравнения (1).

0.7.1-2. Представление решения задачи через функцию Грина.

Решение линейной неоднородной краевой задачи (1)–(5) можно представить в виде суммы

$$\begin{aligned} w(x,t) = {} & \int_0^t \int_{x_1}^{x_2} \Phi(y,\tau)G(x,y,t,\tau)\,dy\,d\tau + \int_{x_1}^{x_2} f(y)G(x,y,t,0)\,dy + \\ & + \int_0^t g_1(\tau)a(x_1,\tau)\Lambda_1(x,t,\tau)\,d\tau + \int_0^t g_2(\tau)a(x_2,\tau)\Lambda_2(x,t,\tau)\,d\tau. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $G(x,y,t,\tau)$ — функция Грина, которая при $t > \tau \geqslant 0$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{\partial G}{\partial t} - L_{x,t}[G] = 0 \tag{7}$$

с неоднородным начальным условием специального вида

$$G = \delta(x-y) \quad \text{при} \quad t = \tau \tag{8}$$

и однородными граничными условиями:

$$s_1\frac{\partial G}{\partial x} + k_1(t)G = 0 \quad \text{при} \quad x = x_1, \tag{9}$$

$$s_2\frac{\partial G}{\partial x} + k_2(t)G = 0 \quad \text{при} \quad x = x_2. \tag{10}$$

В задачу (7)–(10) величины y и τ входят как свободные параметры ($x_1 \leqslant y \leqslant x_2$), $\delta(x)$ — дельта-функция.

Начальное условие (8) означает, что для любой непрерывной функции $f = f(x)$ имеет место предельное соотношение

$$f(x) = \lim_{t\to\tau} \int_{x_1}^{x_2} f(y)G(x,y,t,\tau)\,dy.$$

ТАБЛИЦА 7
Выражения для функций $\Lambda_1(x,t,\tau)$ и $\Lambda_2(x,t,\tau)$, входящих в подынтегральные выражения двух последних слагаемых в решении (6).

Тип задачи	Вид граничных условий	Функции $\Lambda_m(x,t,\tau)$
Первая краевая задача ($s_1=s_2=0,\ k_1=k_2=1$)	$w=g_1(t)$ при $x=x_1$ $w=g_2(t)$ при $x=x_2$	$\Lambda_1(x,t,\tau)=\partial_y G(x,y,t,\tau)\big\|_{y=x_1}$ $\Lambda_2(x,t,\tau)=-\partial_y G(x,y,t,\tau)\big\|_{y=x_2}$
Вторая краевая задача ($s_1=s_2=1,\ k_1=k_2=0$)	$\partial_x w=g_1(t)$ при $x=x_1$ $\partial_x w=g_2(t)$ при $x=x_2$	$\Lambda_1(x,t,\tau)=-G(x,x_1,t,\tau)$ $\Lambda_2(x,t,\tau)=G(x,x_2,t,\tau)$
Третья краевая задача ($s_1=s_2=1, k_1<0, k_2>0$)	$\partial_x w+k_1w=g_1(t)$ при $x=x_1$ $\partial_x w+k_2w=g_2(t)$ при $x=x_2$	$\Lambda_1(x,t,\tau)=-G(x,x_1,t,\tau)$ $\Lambda_2(x,t,\tau)=G(x,x_2,t,\tau)$
Смешанная краевая задача ($s_1=k_2=0,\ s_2=k_1=1$)	$w=g_1(t)$ при $x=x_1$ $\partial_x w=g_2(t)$ при $x=x_2$	$\Lambda_1(x,t,\tau)=\partial_y G(x,y,t,\tau)\big\|_{y=x_1}$ $\Lambda_2(x,t,\tau)=G(x,x_2,t,\tau)$
Смешанная краевая задача ($s_1=k_2=1,\ s_2=k_1=0$)	$\partial_x w=g_1(t)$ при $x=x_1$ $w=g_2(t)$ при $x=x_2$	$\Lambda_1(x,t,\tau)=-G(x,x_1,t,\tau)$ $\Lambda_2(x,t,\tau)=-\partial_y G(x,y,t,\tau)\big\|_{y=x_2}$

Функции $\Lambda_1(x,t,\tau)$ и $\Lambda_2(x,t,\tau)$, входящие в подынтегральные выражения двух последних слагаемых в решении (6), выражаются через функцию Грина $G(x,y,t,\tau)$. Для основных типов краевых задач соответствующие формулы для $\Lambda_m(x,t,\tau)$ даны в табл. 7.

Важно подчеркнуть, что функция Грина G и функции Λ_1 и Λ_2 не зависят от функций Φ, f, g_1, g_2, характеризующих различные неоднородности краевой задачи.

Если коэффициенты уравнения (1)–(2) и коэффициенты k_1 и k_2 в граничных условиях (4) и (5) не зависят от времени t, т. е. выполнены условия

$$a=a(x),\quad b=b(x),\quad c=c(x),\quad k_1=\text{const},\quad k_2=\text{const},\tag{11}$$

то функция Грина зависит только от трех аргументов

$$G(x,y,t,\tau)=G(x,y,t-\tau).$$

В этом случае функции Λ_m зависят от двух аргументов $\Lambda_m=\Lambda_m(x,t-\tau)$, $m=1,\ 2$.

Формула (6) остается справедливой также для задачи с граничными условиями третьего рода, если $k_1=k_1(t)$, $k_2=k_2(t)$. При этом связь между функциями Λ_m $(m=1,\ 2)$ и функцией Грина G будет такой же, как и для случая постоянных k_1 и k_2 (сама функция Грина будет другой).

Для первой, второй и третьей краевой задачи, которые рассматриваются на полуинтервале $x_1\leqslant x<\infty$, часто выставляется условие затухания решения на бесконечности ($w\to 0$ при $x\to\infty$). В этом случае решение можно найти по формуле (6) при $\Lambda_2=0$, где выражение для функции Λ_1 указано в табл. 7.

0.7.2. Задачи для уравнений гиперболического типа

0.7.2-1. Постановка задачи $(t\geqslant 0,\ x_1\leqslant x\leqslant x_2)$.

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение гиперболического типа с переменными коэффициентами общего вида в одномерном случае записывается так:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\varphi(x,t)\frac{\partial w}{\partial t}-L_{x,t}[w]=\Phi(x,t),\tag{12}$$

где выражение для оператора $L_{x,t}[w]$ приведено в (2).

Рассмотрим нестационарную краевую задачу для уравнения (12) с начальными условиями

$$\begin{aligned} w&=f_0(x)\quad\text{при}\quad t=0,\\ \partial_t w&=f_1(x)\quad\text{при}\quad t=0\end{aligned}\tag{13}$$

и произвольными линейными неоднородными граничными условиями (4)–(5).

0.7.2-2. Представление решения задачи через функцию Грина.

Решение задачи (12), (13), (4), (5) можно представить в виде суммы

$$w(x,t) = \int_0^t \int_{x_1}^{x_2} \Phi(y,\tau) G(x,y,t,\tau)\,dy\,d\tau -$$
$$- \int_{x_1}^{x_2} f_0(y) \Big[\frac{\partial}{\partial\tau} G(x,y,t,\tau)\Big]_{\tau=0} dy + \int_{x_1}^{x_2} \big[f_1(y) + f_0(y)\varphi(y,0)\big] G(x,y,t,0)\,dy +$$
$$+ \int_0^t g_1(\tau) a(x_1,\tau) \Lambda_1(x,t,\tau)\,d\tau + \int_0^t g_2(\tau) a(x_2,\tau) \Lambda_2(x,t,\tau)\,d\tau. \tag{14}$$

Здесь $G(x,y,t,\tau)$ — функция Грина, которая определяется путем решения однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + \varphi(x,t)\frac{\partial G}{\partial t} - L_{x,t}[G] = 0 \tag{15}$$

с полуоднородными начальными условиями

$$G = 0 \quad \text{при} \quad t = \tau, \tag{16}$$
$$\partial_t G = \delta(x-y) \quad \text{при} \quad t = \tau \tag{17}$$

и однородными граничными условиями (9) и (10). В задачу (15)–(17), (9), (10) величины y и τ входят как свободные параметры ($x_1 \leqslant y \leqslant x_2$), $\delta(x)$ — дельта-функция.

Функции $\Lambda_1(x,t,\tau)$ и $\Lambda_2(x,t,\tau)$, входящие в подынтегральные выражения двух последних слагаемых в решении (14), выражаются через функцию Грина $G(x,y,t,\tau)$. Для основных типов краевых задач соответствующие формулы для $\Lambda_m(x,t,\tau)$ даны в табл. 7.

Важно подчеркнуть, что функция Грина G и функции Λ_1 и Λ_2 не зависят от функций Φ, f_0, f_1, g_1, g_2, характеризующих различные виды неоднородности нестационарной краевой задачи.

Если коэффициенты уравнения (12) и коэффициенты k_1 и k_2 в граничных условиях (4) и (5) не зависят от времени t, то функция Грина зависит только от трех аргументов $G(x,y,t,\tau) = G(x,y,t-\tau)$. В этом случае в решении (14) можно положить $\frac{\partial}{\partial\tau} G(x,y,t,\tau)\big|_{\tau=0} = -\frac{\partial}{\partial t} G(x,y,t)$.

⊙ *Литература к разделу 0.7*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964), В. Я. Арсенин (1974), А. Г. Бутковский (1979), А. Д. Полянин (2000*a*, *b*, *c*).

0.8. Неоднородные краевые задачи со многими пространственными переменными. Представление решения через функцию Грина

0.8.1. Задачи для уравнений параболического типа

0.8.1-1. Постановка задачи.

Общее линейное неоднородное дифференциальное уравнение параболического типа с n пространственными переменными имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} - L_{\mathbf{x},t}[w] = \Phi(\mathbf{x},t), \tag{1}$$

где

$$L_{\mathbf{x},t}[w] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x},t)\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\mathbf{x},t)\frac{\partial w}{\partial x_i} + c(\mathbf{x},t)w, \tag{2}$$

$$\mathbf{x} = \{x_1,\dots,x_n\}, \qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x},t)\xi_i\xi_j \geqslant \sigma \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad \sigma > 0.$$

Пусть V — некоторая односвязная область в $\mathcal{R}^n$ с достаточно гладкой поверхностью $S = \partial V$. Будем рассматривать нестационарную краевую задачу для уравнения (1) в области V с произвольным начальным условием

$$w = f(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad t = 0 \tag{3}$$

и линейным неоднородным граничным условием

$$\Gamma_{\mathbf{x},t}[w] = g(\mathbf{x},t) \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \in S. \tag{4}$$

В общем случае $\Gamma_{\mathbf{x},t}$ — представляет собой линейный дифференциальный оператор первого порядка по пространственным переменным, коэффициенты которого зависят от $\mathbf{x}$ и t.

ТАБЛИЦА 8
Вид функции $H(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)$ для основных типов нестационарных краевых задач.

Тип задачи	Вид граничного условия (4)	Функция $H(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)$
Первая краевая задача	$w=g(\mathbf{x},t)$ при $\mathbf{x}\in S$	$H(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)=-\frac{\partial G}{\partial M_y}(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)$
Вторая краевая задача	$\frac{\partial w}{\partial M_x}=g(\mathbf{x},t)$ при $\mathbf{x}\in S$	$H(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)=G(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)$
Третья краевая задача	$\frac{\partial w}{\partial M_x}+kw=g(\mathbf{x},t)$ при $\mathbf{x}\in S$	$H(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)=G(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)$

0.8.1-2. Представление решения задачи через функцию Грина.

Решение линейной неоднородной краевой задачи (1)–(4) можно представить в виде суммы

$$w(\mathbf{x},t)=\int_0^t\int_V \Phi(\mathbf{y},\tau)G(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)\,dV_y\,d\tau+\int_V f(\mathbf{y})G(\mathbf{x},\mathbf{y},t,0)\,dV_y+$$
$$+\int_0^t\int_S g(\mathbf{y},\tau)H(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)\,dS_y\,d\tau. \tag{5}$$

Здесь $G(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)$ — функция Грина, которая для $t>\tau\geqslant 0$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{\partial G}{\partial t}-L_{\mathbf{x},t}[G]=0 \tag{6}$$

с неоднородным начальным условием специального вида

$$G=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\quad\text{при}\quad t=\tau \tag{7}$$

и однородным граничным условием

$$\Gamma_{\mathbf{x},t}[G]=0\quad\text{при}\quad \mathbf{x}\in S. \tag{8}$$

В задачу (6)–(8) величина $\mathbf{y}=\{y_1,\dots,y_n\}$ входит как n-мерный свободный параметр ($\mathbf{y}\in V$), $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})=\delta(x_1-y_1)\delta(x_2-y_2)\dots\delta(x_n-y_n)$ — n-мерная дельта-функция. Функция Грина G не зависит от функций Φ, f и g, характеризующих различные неоднородности краевой задачи. В решении (5) интегрирование везде ведется по параметру $\mathbf{y}$, при этом $dV_y=dy_1\,dy_2\,\dots\,dy_n$.

Функция $H(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)$, входящая в подынтегральное выражение последнего слагаемого в решении (5), выражается через функцию Грина $G(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)$. Для трех основных типов краевых задач соответствующие формулы для $H(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)$ даны в табл. 8 (в третьей краевой задаче коэффициент k может зависеть от $\mathbf{x}$ и t). В граничные условия второго и третьего рода и решение первой краевой задачи входят операторы дифференцирования по направлению конормали оператора (2), которые действуют так:

$$\frac{\partial G}{\partial M_x}\equiv\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x},t)N_j\frac{\partial G}{\partial x_i},\qquad \frac{\partial G}{\partial M_y}\equiv\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{y},\tau)N_j\frac{\partial G}{\partial y_i}, \tag{9}$$

где $\mathbf{N}=\{N_1,\dots,N_n\}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S. В частном случае, когда $a_{ii}(\mathbf{x},t)=1$ и $a_{ij}(\mathbf{x},t)=0$ при $i\neq j$, оператор (9) совпадает с обычным оператором дифференцирования по направлению внешней нормали к поверхности S.

Если коэффициенты уравнения (6) и граничное условие (8) не зависят от времени t, то функция Грина имеет вид $G(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)=G(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)$.

Замечание. Если на разных частях поверхности $S=\sum\limits_{i=1}^{p}S_i$ выставляются граничные условия разного типа

$$\Gamma^{(i)}_{\mathbf{x},t}[w]=g_i(\mathbf{x},t)\quad\text{при}\quad\mathbf{x}\in S_i,\qquad i=1,\dots,p, \tag{10}$$

то последнее слагаемое в решении (5) заменяется суммой

$$\sum_{i=1}^p\int_0^t\int_{S_i} g_i(\mathbf{y},\tau)H_i(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)\,dS_y\,d\tau. \tag{11}$$

0.8.2. Задачи для уравнений гиперболического типа

0.8.2-1. Постановка задачи.

Общее линейное неоднородное дифференциальное уравнение гиперболического типа с n пространственными переменными имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \varphi(\mathbf{x}, t)\frac{\partial w}{\partial t} - L_{\mathbf{x},t}[w] = \Phi(\mathbf{x}, t), \tag{12}$$

где явный вид выражения $L_{\mathbf{x},t}[w]$ указан в (2).

Будем рассматривать нестационарную краевую задачу для уравнения (12) в области V с произвольными начальными условиями

$$w = f_0(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad t = 0, \tag{13}$$

$$\partial_t w = f_1(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad t = 0 \tag{14}$$

и линейным неоднородным граничным условием (4).

0.8.2-2. Представление решения задачи через функцию Грина.

Решение линейной неоднородной краевой задачи (12)–(14), (4) можно представить в виде суммы

$$w(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \int_V \Phi(\mathbf{y}, \tau) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \tau)\, dV_y\, d\tau - \int_V f_0(\mathbf{y}) \left[\frac{\partial}{\partial \tau} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \tau)\right]_{\tau=0} dV_y + \\ + \int_V \bigl[f_1(\mathbf{y}) + f_0(\mathbf{y})\varphi(\mathbf{y}, 0)\bigr] G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, 0)\, dV_y + \int_0^t \int_S g(\mathbf{y}, \tau) H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \tau)\, dS_y\, d\tau. \tag{15}$$

Здесь $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \tau)$ — функция Грина, которая удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + \varphi(\mathbf{x}, t)\frac{\partial G}{\partial t} - L_{\mathbf{x},t}[G] = 0 \tag{16}$$

с полуоднородными начальными условиями

$$G = 0 \quad \text{при} \quad t = \tau,$$

$$\partial_t G = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad \text{при} \quad t = \tau$$

и однородному граничному условию (8).

Если коэффициенты уравнения (16) и граничное условие (8) не зависят от времени t, то функция Грина имеет вид $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \tau) = G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau)$. В этом случае в решении (15) можно положить $\frac{\partial}{\partial \tau} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \tau)\big|_{\tau=0} = -\frac{\partial}{\partial t} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$.

Функция $H = H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \tau)$, входящая в подынтегральное выражение последнего слагаемого в решении (15), выражается через функцию Грина $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \tau)$. Для основных типов краевых задач соответствующие формулы для H даны в табл. 8 (в третьей краевой задаче коэффициент k может зависеть от $\mathbf{x}$ и t).

Замечание. Если на разных частях поверхности $S = \sum\limits_{i=1}^{p} S_i$ выставляются граничные условия разного типа (10), то последнее слагаемое в решении (15) заменяется суммой (11).

0.8.3. Задачи для уравнений эллиптического типа

0.8.3-1. Постановка задачи.

В общем случае линейное неоднородное уравнение эллиптического типа можно записать так:

$$-L_{\mathbf{x}}[w] = \Phi(\mathbf{x}), \tag{17}$$

где

$$L_{\mathbf{x}}[w] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\mathbf{x}) \frac{\partial w}{\partial x_i} + c(\mathbf{x}) w. \tag{18}$$

Двумерным задачам отвечает $n = 2$, а трехмерным — $n = 3$.

ТАБЛИЦА 9

Вид функции $H(\mathbf{x},\mathbf{y})$, входящей в подынтегральное выражение последнего слагаемого в решении (20), для основных типов стационарных краевых задач.

Тип задачи	Вид граничного условия (19)	Функция $H(\mathbf{x},\mathbf{y})$
Первая краевая задача	$w=g(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x}\in S$	$H(\mathbf{x},\mathbf{y})=-\frac{\partial G}{\partial M_y}(\mathbf{x},\mathbf{y})$
Вторая краевая задача	$\frac{\partial w}{\partial M_x}=g(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x}\in S$	$H(\mathbf{x},\mathbf{y})=G(\mathbf{x},\mathbf{y})$
Третья краевая задача	$\frac{\partial w}{\partial M_x}+kw=g(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x}\in S$	$H(\mathbf{x},\mathbf{y})=G(\mathbf{x},\mathbf{y})$

Уравнение (17)–(18) будем рассматривать в области V с общим линейным граничным условием

$$\Gamma_{\mathbf{x}}[w]=g(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad \mathbf{x}\in S. \tag{19}$$

Решение стационарной задачи (17)–(19) можно получить путем предельного перехода при $t\to\infty$ в решении (5) для нестационарной задачи специального вида. Для этого надо рассмотреть уравнение (1), коэффициенты и правая часть которого не зависят от времени t, и взять однородное начальное условие (3) при $f(\mathbf{x})=0$ и стационарное граничное условие (4).

0.8.3-2. Представление решения задачи через функцию Грина.

Решение линейной краевой задачи (17)–(19) можно представить в виде суммы

$$w(\mathbf{x})=\int_V \Phi(\mathbf{y})G(\mathbf{x},\mathbf{y})\,dV_y+\int_S g(\mathbf{y})H(\mathbf{x},\mathbf{y})\,dS_y. \tag{20}$$

Здесь $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ — функция Грина, которая удовлетворяет неоднородному уравнению специального вида

$$-L_{\mathbf{x}}[G]=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{21}$$

с однородным граничным условием

$$\Gamma_{\mathbf{x}}[G]=0 \quad \text{при} \quad \mathbf{x}\in S. \tag{22}$$

В задачу (21), (22) величина $\mathbf{y}=\{y_1,\dots,y_n\}$ входит как n-мерный свободный параметр ($\mathbf{y}\in V$). Функция Грина G не зависит от функций Φ и g, характеризующих различные неоднородности исходной краевой задачи.

Функция $H(\mathbf{x},\mathbf{y})$, входящая в подынтегральное выражение второго слагаемого в решении (20), выражается через функцию Грина $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$. Для трех основных типов краевых задач соответствующие формулы для $H(\mathbf{x},\mathbf{y})$ даны в табл. 9. В граничные условия второго и третьего рода и решение первой краевой задачи входят операторы дифференцирования по направлению конормали оператора (18), которые определяются формулами (9) (в данном случае коэффициенты a_{ij} зависят только от $\mathbf{x}$).

Замечание. Для второй краевой задачи при $c(\mathbf{x})\equiv 0$ таким образом определяемая функция Грина может не существовать (см. замечание 2 в разд. 8.2.1-2).

0.8.4. Сопоставление структуры решений краевых задач для уравнений различного типа

В табл. 10 кратко сформулированы постановки краевых задач для уравнений второго порядка эллиптического, параболического и гиперболического типов. Считается, что коэффициенты дифференциальных операторов $L_{\mathbf{x}}$ и $\Gamma_{\mathbf{x}}$ по пространственным переменным $x_1,\dots,x_n$ не зависят от времени t и эти операторы одинаковы для данных задач.

ТАБЛИЦА 10
Формулировки краевых задач для уравнений различного типа.

Тип уравнения	Вид уравнения	Начальные условия	Граничное условие
Эллиптический	$-L_{\mathbf{x}}[w] = \Phi(\mathbf{x})$	не выставляются	$\Gamma_{\mathbf{x}}[w] = g(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in S$
Параболический	$\partial_t w - L_{\mathbf{x}}[w] = \Phi(\mathbf{x}, t)$	$w = f(\mathbf{x})$ при $t = 0$	$\Gamma_{\mathbf{x}}[w] = g(\mathbf{x}, t)$ при $\mathbf{x} \in S$
Гиперболический	$\partial_{tt} w - L_{\mathbf{x}}[w] = \Phi(\mathbf{x}, t)$	$w = f_0(\mathbf{x})$ при $t = 0$, $\partial_t w = f_1(\mathbf{x})$ при $t = 0$	$\Gamma_{\mathbf{x}}[w] = g(\mathbf{x}, t)$ при $\mathbf{x} \in S$

Ниже последовательно выписаны общие формулы для решения этих задач при нулевых начальных условиях ($f = f_0 = f_1 = 0$):

$$w_0(\mathbf{x}) = \int_V \Phi(\mathbf{y}) G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, dV_y + \int_S g(\mathbf{y}) \mathcal{H}\big[G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})\big]\, dS_y,$$

$$w_1(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \int_V \Phi(\mathbf{y}, \tau) G_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau)\, dV_y\, d\tau + \int_0^t \int_S g(\mathbf{y}, \tau) \mathcal{H}\big[G_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau)\big]\, dS_y\, d\tau,$$

$$w_2(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \int_V \Phi(\mathbf{y}, \tau) G_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau)\, dV_y\, d\tau + \int_0^t \int_S g(\mathbf{y}, \tau) \mathcal{H}\big[G_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau)\big]\, dS_y\, d\tau,$$

где G_n — функции Грина; индексы 0, 1 и 2 соответственно относятся к задачам эллиптического, параболического и гиперболического типов. Во все решения входит одинаковый оператор $\mathcal{H}[G]$ (его явный вид для различных граничных условий указан в разд. 0.8.1 — 0.8.3, см. также разд. 0.7).

Видно, что решения задач параболического и гиперболического типа при нулевых начальных условиях имеют одинаковую структуру. Структура решения задачи для уравнения параболического типа отличается структуры решения задачи для уравнения эллиптического типа дополнительным интегрированием по переменной t.

⊙ *Литература к разделу 0.8*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964), А. Г. Бутковский (1979), А. Д. Полянин (2000 *a, b, c*).

0.9. Построение функций Грина. Общие формулы и соотношения

0.9.1. Функции Грина краевых задач, описываемых уравнениями различного типа в областях конечных размеров

0.9.1-1. Выражения для функций Грина в виде бесконечных рядов.

В табл. 11 приведены функции Грина краевых задач, описываемых уравнениями второго порядка различного типа в конечной области V. Считается, что $L_{\mathbf{x}}$ — линейный самосопряженный дифференциальный оператор второго порядка относительно пространственных переменных $x_1, \ldots, x_n$; $\Gamma_{\mathbf{x}}$ — линейный граничный оператор нулевого или первого порядка, который может задавать граничное условие первого, второго или третьего рода (коэффициенты операторов $L_{\mathbf{x}}$ и $\Gamma_{\mathbf{x}}$ могут зависеть от пространственных переменных, но не зависят от времени t). Коэффициенты λ_k и функции $u_k(\mathbf{x})$ определяются путем решения однородной краевой задачи на собственные значения:

$$L_{\mathbf{x}}[u] + \lambda u = 0, \qquad (1)$$

$$\Gamma_{\mathbf{x}}[u] = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \in S. \qquad (2)$$

Из табл. 11 видно, что зная функцию Грина в задаче для уравнения параболического (или гиперболического) типа легко можно построить функции Грина в соответствующих задачах для уравнений эллиптического и гиперболического (или параболического) типов. В частности, функция Грина задачи для уравнения эллиптического типа выражается через функцию Грина

ТАБЛИЦА 11

Функции Грина краевых задач, описываемых уравнениями различного типа в областях конечных размеров. Во всех задачах операторы $L_{\mathbf{x}}$ и $\Gamma_{\mathbf{x}}$ одинаковы, $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Тип и вид уравнения	Начальные и граничные условия	Функция Грина
Эллиптическое уравнение $-L_{\mathbf{x}}[w] = \Phi(\mathbf{x})$	$\Gamma_{\mathbf{x}}[w] = g(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in S$ (начальное условие не нужно)	$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{u_k(\mathbf{x}) u_k(\mathbf{y})}{\lVert u_k \rVert^2 \lambda_k}, \quad \lambda_k \neq 0$
Параболическое уравнение $\partial_t w - L_{\mathbf{x}}[w] = \Phi(\mathbf{x}, t)$	$w = f(\mathbf{x})$ при $t = 0$ $\Gamma_{\mathbf{x}}[w] = g(\mathbf{x}, t)$ при $\mathbf{x} \in S$	$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{u_k(\mathbf{x}) u_k(\mathbf{y})}{\lVert u_k \rVert^2} \exp(-\lambda_k t)$
Гиперболическое уравнение $\partial_{tt} w - L_{\mathbf{x}}[w] = \Phi(\mathbf{x}, t)$	$w = f_0(\mathbf{x})$ при $t = 0$ $w = f_1(\mathbf{x})$ при $t = 0$ $\Gamma_{\mathbf{x}}[w] = g(\mathbf{x}, t)$ при $\mathbf{x} \in S$	$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{u_k(\mathbf{x}) u_k(\mathbf{y})}{\lVert u_k \rVert^2 \sqrt{\lambda_k}} \sin\bigl(t\sqrt{\lambda_k}\,\bigr)$

задачи для уравнения параболического типа по формуле:

$$G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_0^{\infty} G_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)\, dt. \tag{3}$$

Здесь учтено, что все $\lambda_k > 0$ [в случае второй краевой задачи считается, что $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (1)–(2)].

0.9.1-2. Некоторые замечания и обобщения.

Замечание 1. Формула (3) может использоваться также для неограниченной области V. В этом случае надо проверять сходимость интеграла в правой части.

Замечание 2. Пусть в уравнениях, приведенных во втором столбце табл. 11, вместо $-L_{\mathbf{x}}[w]$ стоит выражение $-L_{\mathbf{x}}[w] - \beta w$ со свободным параметром β. Тогда в выражениях для функции Грина в третьем столбце табл. 11 значения λ_k везде следует заменить на $\lambda_k - \beta$ [как и ранее λ_k и $u_k(\mathbf{x})$ будут определяться путем решения задачи на собственные значения (1)–(2)].

Замечание 3. Приведенные в табл. 11 формулы для функций Грина будут справедливы также для краевых задач, описываемых уравнениями четвертого и более высоких порядков по пространственным переменным [когда однородная задача на собственные значения для уравнения (1) с соответствующими граничными условиями будет самосопряженной].

0.9.2. Функции Грина, допускающие неполное разделение переменных

0.9.2-1. Краевые задачи для областей с прямоугольными границами.

1°. Рассмотрим уравнение параболического типа

$$\frac{\partial w}{\partial t} = L_{1,t}[w] + \cdots + L_{n,t}[w] + \Phi(\mathbf{x}, t), \tag{4}$$

где каждое слагаемое $L_{m,t}[w]$ зависит только от одной пространственной координаты x_m и времени t:

$$L_{m,t}[w] \equiv a_m(x_m, t)\frac{\partial^2 w}{\partial x_m^2} + b_m(x_m, t)\frac{\partial w}{\partial x_m} + c_m(x_m, t)w, \qquad m = 1, \ldots, n.$$

Для уравнения (4) выставляем начальное условие общего вида

$$w = f(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad t = 0. \tag{5}$$

Рассмотрим область $V = \{\alpha_m \leqslant x_m \leqslant \beta_m,\ m = 1, \ldots, n\}$, которая представляет собой n-мерный параллелепипед. На гранях этого параллелепипеда выставляются граничные условия

$$\begin{aligned} s_m^{(1)} \frac{\partial w}{\partial x_m} + k_m^{(1)}(t) w &= g_m^{(1)}(\mathbf{x}, t) \quad \text{при} \quad x_m = \alpha_m, \\ s_m^{(2)} \frac{\partial w}{\partial x_m} + k_m^{(2)}(t) w &= g_m^{(2)}(\mathbf{x}, t) \quad \text{при} \quad x_m = \beta_m. \end{aligned} \tag{6}$$

Задавая соответствующим образом значения коэффициентов $s_m^{(1)}$, $s_m^{(2)}$ и функции $k_m^{(1)} = k_m^{(1)}(t)$, $k_m^{(2)} = k_m^{(2)}(t)$ на каждой грани можно получить граничные условия первого, второго и третьего рода. Для неограниченных областей соответствующие бесконечным значениям $\alpha_m = -\infty$ или $\beta_m = \infty$ граничные условия опускаются.

2°. Функцию Грина нестационарной n-мерной краевой задачи (4)–(6) можно представить в виде произведения

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \tau) = \prod_{m=1}^{n} G_m(x_m, y_m, t, \tau), \tag{7}$$

где $G_m = G_m(x_m, y_m, t, \tau)$ — функции Грина, которые удовлетворяют одномерным уравнениям

$$\frac{\partial G_m}{\partial t} - L_{m,t}[G_m] = 0 \qquad (m = 1, \ldots, n)$$

с начальным условием

$$G_m = \delta(x_m - y_m) \quad \text{при} \quad t = \tau$$

и однородными граничными условиями

$$s_m^{(1)} \frac{\partial G_m}{\partial x_m} + k_m^{(1)}(t) G_m = 0 \quad \text{при} \quad x_m = \alpha_m,$$
$$s_m^{(2)} \frac{\partial G_m}{\partial x_m} + k_m^{(2)}(t) G_m = 0 \quad \text{при} \quad x_m = \beta_m.$$

Здесь y_m и τ — свободные параметры ($\alpha_m \leqslant y_m \leqslant \beta_m$, $t \geqslant \tau \geqslant 0$), $\delta(x)$ — дельта-функция.

Видно, что функция Грина (7) допускает неполное разделение переменных (она разделяется по пространственным переменным $x_1, \ldots, x_n$, но не разделяется по времени t).

0.9.2-2. Краевые задачи для цилиндрической области с произвольным сечением.

1°. Рассмотрим уравнение параболического типа

$$\frac{\partial w}{\partial t} = L_{\mathbf{x},t}[w] + M_{z,t}[w] + \Phi(\mathbf{x}, z, t), \tag{8}$$

где $L_{\mathbf{x},t}$ — произвольный линейный дифференциальный оператор второго порядка по переменным $x_1, \ldots, x_n$, коэффициенты которого зависят от $\mathbf{x}$ и t; а $M_{z,t}$ — произвольный линейный дифференциальный оператор второго порядка по переменной z, коэффициенты которого зависят от z и t.

Для уравнения (8) выставляем начальное условие общего вида

$$w = f(\mathbf{x}, z) \quad \text{при} \quad t = 0. \tag{9}$$

Считаем, что пространственные переменные изменяются в цилиндрической области $V = \{\mathbf{x} \in D,\ z_1 \leqslant z \leqslant z_2\}$ с произвольным сечением D. На границах этой области выставляются условия*

$$\begin{aligned} &\Gamma_1[w] = g_1(\mathbf{x}, t) && \text{при} \quad z = z_1 && (\mathbf{x} \in D),\\ &\Gamma_2[w] = g_2(\mathbf{x}, t) && \text{при} \quad z = z_2 && (\mathbf{x} \in D),\\ &\Gamma_3[w] = g_3(\mathbf{x}, z, t) && \text{при} \quad \mathbf{x} \in \partial D && (z_1 \leqslant z \leqslant z_2), \end{aligned} \tag{10}$$

где линейные граничные операторы Γ_k $(k = 1,\ 2,\ 3)$ могут задавать граничные условия первого, второго или третьего рода (в последнем случае коэффициенты дифференциальных операторов Γ_k могут зависеть от времени t).

2°. Функция Грина задачи (8)–(10) может быть представлена в виде произведения

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z, \zeta, t, \tau) = G_L(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \tau) G_M(z, \zeta, t, \tau), \tag{11}$$

где $G_L = G_L(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \tau)$ и $G_M = G_M(z, \zeta, t, \tau)$ — вспомогательные функции Грина, которые определяются путем решения двух более простых задач меньшей размерности:

Задача на сечении D:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G_L}{\partial t} = L_{\mathbf{x},t}[G_L] & \text{при} \quad \mathbf{x} \in D,\\ G_L = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) & \text{при} \quad t = \tau,\\ \Gamma_3[G_L] = 0 & \text{при} \quad \mathbf{x} \in \partial D, \end{cases}$$

Задача на отрезке $z_1 \leqslant z \leqslant z_2$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G_M}{\partial t} = M_{z,t}[G_M] & \text{при} \quad z_1 < z < z_2,\\ G_M = \delta(z - \zeta) & \text{при} \quad t = \tau,\\ \Gamma_k[G_M] = 0 & \text{при} \quad z = z_k \quad (k = 1,\ 2). \end{cases}$$

* При $x_1 = -\infty$ или $x_2 = \infty$ соответствующее граничное условие опускается.

Здесь $\mathbf{y}$, ζ, τ — свободные параметры ($\mathbf{y} \in D$, $z_1 \leqslant \zeta \leqslant z_2$, $t \geqslant \tau \geqslant 0$).

Видно, что функция Грина (11) допускает неполное разделение переменных (она разделяется по пространственным переменным $\mathbf{x}$ и z, но не разделяется по времени t).

0.9.3. Построение функций Грина с помощью фундаментальных решений

0.9.3-1. Уравнения эллиптического типа. Фундаментальное решение.

Рассмотрим линейное уравнение эллиптического типа

$$L_{\mathbf{x}}[w] + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \Phi(\mathbf{x}, z), \tag{12}$$

где $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{R}^n$, $z \in \mathcal{R}^1$, $L_{\mathbf{x}}[w]$ — линейный дифференциальный оператор, который зависит от переменных $x_1, \ldots, x_n$ и не зависит от z. Для дальнейшего важно, что однородное уравнение (при $\Phi \equiv 0$) не меняется при замене z на $-z$ и z на $z + \text{const}$.

Пусть $\mathscr{E} = \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z - \zeta)$ — фундаментальное решение уравнения (12), т. е.

$$L_{\mathbf{x}}[\mathscr{E}] + \frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial z^2} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta(z - \zeta).$$

Здесь $\mathbf{y} = \{y_1, \ldots, y_n\} \in \mathcal{R}^n$, $\zeta \in \mathcal{R}^1$ — свободные параметры.

Фундаментальное решение данного уравнения является четной функцией относительно последнего аргумента:

$$\mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) = \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, -z).$$

Ниже в разд. 0.9.3-2 и 0.9.3-3 приведены формулы, позволяющие выражать функции Грина некоторых краевых задач для уравнения (12) через его фундаментальное решение.

0.9.3-2. Область: $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$, $0 \leqslant z < \infty$. Краевые задачи для эллиптических уравнений.

1°. *Первая краевая задача.* Граничное условие:

$$w = f(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad z = 0.$$

Функция Грина:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z, \zeta) = \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z - \zeta) - \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z + \zeta).$$

Область изменения свободных параметров: $\mathbf{y} \in \mathcal{R}^n$, $0 \leqslant \zeta < \infty$.

2°. *Вторая краевая задача.* Граничное условие:

$$\partial_z w = f(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad z = 0.$$

Функция Грина:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z, \zeta) = \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z - \zeta) + \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z + \zeta).$$

3°. *Третья краевая задача.* Граничное условие:

$$\partial_z w - kw = f(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad z = 0.$$

Функция Грина:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z, \zeta) &= \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z - \zeta) + \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z + \zeta) - 2k \int_0^\infty e^{-ks} \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z + \zeta + s)\, ds = \\ &= \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z - \zeta) + \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z + \zeta) - 2k \int_{z+\zeta}^\infty e^{-k(\sigma - z - \zeta)} \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \sigma)\, d\sigma. \end{aligned}$$

0.9.3-3. Область: $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Краевые задачи для эллиптических уравнений.

1°. *Первая краевая задача.* Граничные условия:

$$w = f_1(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad w = f_2(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad z = l.$$

Функция Грина:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z, \zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z - \zeta + 2nl) - \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z + \zeta + 2nl)\right]. \tag{13}$$

Область изменения свободных параметров: $\mathbf{y} \in \mathcal{R}^n$, $0 \leqslant \zeta \leqslant l$.

2°. *Вторая краевая задача.* Граничные условия:

$$\partial_z w = f_1(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad \partial_z w = f_2(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad z = l.$$

Функция Грина:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z, \zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bigl[\mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z - \zeta + 2nl) + \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z + \zeta + 2nl)\bigr]. \tag{14}$$

3°. *Смешанная краевая задача.* На левой границе задается искомая величина, а на правой границе — ее производная:

$$w = f_1(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad \partial_z w = f_2(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad z = l.$$

Функция Грина:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z, \zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \bigl[\mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z - \zeta + 2nl) - \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z + \zeta + 2nl)\bigr]. \tag{15}$$

4°. *Смешанная краевая задача.* На левой границе задается производная, а на правой границе — искомая величина:

$$\partial_z w = f_1(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad w = f_2(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad z = l.$$

Функция Грина:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z, \zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \bigl[\mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z - \zeta + 2nl) + \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z + \zeta + 2nl)\bigr]. \tag{16}$$

Замечание. Следует проверять сходимость рядов (13)–(16) [например, для трехмерного уравнения Лапласа ряды (13), (15), (16) сходятся, а ряд (14) — расходится].

0.9.3-4. Краевые задачи для уравнений параболического типа.

Пусть $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$, $z \in \mathcal{R}^1$, $t \geqslant 0$. Рассмотрим уравнение параболического типа

$$\frac{\partial w}{\partial t} = L_{\mathbf{x},t}[w] + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \Phi(\mathbf{x}, z, t), \tag{17}$$

где $L_{\mathbf{x},t}[w]$ — линейный дифференциальный оператор, который зависит от переменных $x_1, \ldots, x_n$ и t, но не зависит от z.

Пусть $\mathscr{E} = \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z - \zeta, t, \tau)$ — фундаментальное решение задачи Коши для уравнения (17), т. е.

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t} = L_{\mathbf{x},t}[\mathscr{E}] + \frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial z^2} \quad \text{при} \quad t > \tau,$$
$$\mathscr{E} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta(z - \zeta) \quad \text{при} \quad t = \tau.$$

Здесь $\mathbf{y} \in \mathcal{R}^n$, $\zeta \in \mathcal{R}^1$, $\tau \geqslant 0$ — свободные параметры.

Фундаментальное решение задачи Коши имеет свойство:

$$\mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z, t, \tau) = \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, -z, t, \tau).$$

В табл. 12 приведены формулы, позволяющие выражать функции Грина некоторых нестационарных краевых задач для уравнения (17) через фундаментальное решение задачи Коши.

⊙ *Литература к разделу 0.9*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972), А. Д. Полянин (2000*b*).

0.10. Принципы Дюамеля в нестационарных задачах

0.10.1. Задачи для линейных однородных уравнений

0.10.1-1. Уравнения параболического типа с двумя независимыми переменными.

Рассмотрим задачу для линейного однородного уравнения параболического типа

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial w}{\partial x} + c(x)w \tag{1}$$

ТАБЛИЦА 12
Представление функций Грина $G = G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z, \zeta, t, \tau)$ через фундаментальные решения $\mathscr{E} = \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z, \zeta, t, \tau)$ для некоторых нестационарных краевых задач.

Задача	Граничные условия	Функция Грина
Первая краевая задача $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n,\ z \in \mathcal{R}^1$	$G = 0$ при $z = 0$	$\mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z - \zeta, t, \tau) - \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z + \zeta, t, \tau)$
Вторая краевая задача $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n,\ z \in \mathcal{R}^1$	$\partial_z G = 0$ при $z = 0$	$\mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z - \zeta, t, \tau) + \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z + \zeta, t, \tau)$
Третья краевая задача $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n,\ z \in \mathcal{R}^1$	$\partial_z G - kG = 0$ при $z = 0$	$\mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z - \zeta, t, \tau) + \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z + \zeta, t, \tau) - 2k \int_0^\infty e^{-ks} \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z + \zeta + s, t, \tau)\, ds$
Первая краевая задача $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n,\ 0 \leqslant z \leqslant l$	$G = 0$ при $z = 0$, $G = 0$ при $z = l$	$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \bigl[\mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z - \zeta + 2nl, t, \tau) - \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z + \zeta + 2nl, t, \tau)\bigr]$
Вторая краевая задача $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n,\ 0 \leqslant z \leqslant l$	$\partial_z G = 0$ при $z = 0$, $\partial_z G = 0$ при $z = l$	$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \bigl[\mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z - \zeta + 2nl, t, \tau) + \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z + \zeta + 2nl, t, \tau)\bigr]$
Смешанная краевая задача $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n,\ 0 \leqslant z \leqslant l$	$G = 0$ при $z = 0$, $\partial_z G = 0$ при $z = l$	$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \bigl[\mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z - \zeta + 2nl, t, \tau) - \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z + \zeta + 2nl, t, \tau)\bigr]$
Смешанная краевая задача $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n,\ 0 \leqslant z \leqslant l$	$\partial_z G = 0$ при $z = 0$, $G = 0$ при $z = l$	$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \bigl[\mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z - \zeta + 2nl, t, \tau) + \mathscr{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z + \zeta + 2nl, t, \tau)\bigr]$

с однородным начальным условием
$$w = 0 \quad \text{при} \quad t = 0 \tag{2}$$
при следующих граничных условиях:
$$s_1 \partial_x w + k_1 w = g(t) \qquad \text{при} \quad x = x_1, \tag{3}$$
$$s_2 \partial_x w + k_2 w = 0 \qquad \text{при} \quad x = x_2. \tag{4}$$
Задавая соответствующим образом значения коэффициентов s_1, s_2, k_1, k_2 в (3) и (4) можно получить первую, вторую, третью и смешанные краевые задачи для уравнения (1).

Решение задачи (1)–(4) с нестационарным граничным условием (3) при $x = x_1$ может быть выражено по формуле (первый принцип Дюамеля)
$$w(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t u(x, t - \tau)\, g(\tau)\, d\tau = \int_0^t \frac{\partial u}{\partial t}(x, t - \tau)\, g(\tau)\, d\tau \tag{5}$$
через решение $u(x,t)$ вспомогательной задачи для уравнения (1) с начальным и граничным условиями (2) и (4) (в уравнении, начальном и граничном условиях следует заменить w на u) и более простым стационарным граничным условием при $x = x_1$:
$$s_1 \partial_x u + k_1 u = 1 \quad \text{при} \quad x = x_1. \tag{6}$$

Замечание. Аналогичная формула будет справедлива также для однородного граничного условия при $x = x_1$ и неоднородного нестационарного граничного условия при $x = x_2$.

0.10.1-2. Уравнения гиперболического типа с двумя независимыми переменными.

Рассмотрим задачу для линейного однородного уравнения гиперболического типа
$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \varphi(x) \frac{\partial w}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial w}{\partial x} + c(x) w \tag{7}$$

с однородными начальными условиями

$$w = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \qquad \partial_t w = 0 \quad \text{при} \quad t = 0 \tag{8}$$

и граничными условиями (3), (4).

Решение задачи (7), (8), (3), (4) с нестационарным граничным условием (3) при $x = x_1$ может быть выражено по формуле (5) через решение $u(x,t)$ вспомогательной задачи для уравнения (7) с начальными условиями (8) и граничным условием (4) (в уравнении, начальном и граничном условиях следует заменить w на u) и более простым стационарным граничным условием (6) при $x = x_1$.

В данном случае остается справедливым замечание, приведенное в предыдущем разделе.

0.10.1-3. Уравнения второго порядка с несколькими независимыми переменными.

Первый принцип Дюамеля может использоваться также для решения линейных однородных уравнений параболического и гиперболического типов со многими пространственными переменными вида

$$\frac{\partial^k w}{\partial t^k} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\mathbf{x}) \frac{\partial w}{\partial x_i} + c(\mathbf{x}) w, \tag{9}$$

где $k = 1$, 2 и $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Пусть V — некоторая ограниченная область в $\mathcal{R}^n$ с достаточно гладкой поверхностью $S = \partial V$. Решение краевой задачи для уравнения (9) в области V с однородными начальными условиями (2) (при $k = 1$) или (8) (при $k = 2$) и неоднородным линейным граничным условием

$$\Gamma_x[w] = g(t) \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \in S \tag{10}$$

дается формулой

$$w(\mathbf{x},t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t u(\mathbf{x}, t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau = \int_0^t \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau.$$

Здесь $u(\mathbf{x},t)$ решение вспомогательной задачи для уравнения (9) с теми же самыми начальными условиями (2) или (8) (в уравнении и начальных условиях следует заменить w на u) и более простым стационарным граничным условием

$$\Gamma_x[u] = 1 \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \in S.$$

Отметим, что (10) может быть граничным условием первого, второго или третьего рода (считается, что коэффициенты оператора Γ_x не зависят от t).

0.10.2. Задачи для линейных неоднородных уравнений

0.10.2-1. Уравнения параболического типа.

Решение линейного неоднородного уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\mathbf{x}) \frac{\partial w}{\partial x_i} + c(\mathbf{x}) w + \Phi(\mathbf{x},t)$$

с однородным начальным условием (2) и однородным граничным условием

$$\Gamma_x[w] = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \in S \tag{11}$$

может быть представлено в виде (второй принцип Дюамеля)

$$w(\mathbf{x},t) = \int_0^t U(\mathbf{x}, t-\tau, \tau)\, d\tau. \tag{12}$$

Здесь $U(\mathbf{x},t,\tau)$ — решение вспомогательной задачи для однородного уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\mathbf{x}) \frac{\partial U}{\partial x_i} + c(\mathbf{x}) U$$

с граничным условием (11) (в котором следует заменить w на U) и неоднородным начальным условием, зависящим от параметра τ:

$$U = \Phi(\mathbf{x},\tau) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Отметим, что (11) может быть граничным условием первого, второго или третьего рода.

0.10.2-2. Уравнения гиперболического типа.

Решение линейного неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \varphi(\mathbf{x})\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x})\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\mathbf{x})\frac{\partial w}{\partial x_i} + c(\mathbf{x})w + \Phi(\mathbf{x}, t)$$

с однородными начальными условиями (8) и однородным граничным условием (11) может быть выражено по формуле (12) через решение $U = U(\mathbf{x}, t, \tau)$ вспомогательной задачи для однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \varphi(\mathbf{x})\frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x})\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\mathbf{x})\frac{\partial U}{\partial x_i} + c(\mathbf{x})U$$

с однородными начальным и граничным условиями (2) и (11) (в которых следует заменить w на U) и неоднородным начальным условием, зависящим от параметра τ:

$$\partial_t U = \Phi(\mathbf{x}, \tau) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Отметим, что (11) может быть граничным условием первого, второго или третьего рода.

⦿ *Литература к разделу 0.10*: Р. Курант (1962, стр. 205–208), Г. Корн, Т. Корн (1968, стр. 316–317), В. Я. Арсенин (1974, стр. 124–129), S. J. Farlow (1982, pp. 106–111), E. Zauderer (1983, pp. 159–165), D. Zwillinger (1989, pp. 342–344).

0.11. Преобразования, упрощающие начальные и граничные условия

0.11.1. Преобразования, приводящие к однородным граничным условиям

Линейную задачу с произвольными неоднородными граничными условиями

$$\Gamma^{(k)}_{\mathbf{x},t}[w] = g_k(\mathbf{x}, t) \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \in S_k \tag{1}$$

можно свести к линейной задаче с однородными граничными условиями. Для этого следует сделать замену

$$w(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x}, t) + u(\mathbf{x}, t), \tag{2}$$

где функция ψ должна удовлетворять неоднородным граничным условиям (1), т. е.

$$\Gamma^{(k)}_{\mathbf{x},t}[\psi] = g_k(\mathbf{x}, t) \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \in S_k. \tag{3}$$

В табл. 13 указаны примеры таких преобразований для линейных краевых задач с одной пространственной переменной, которые описываются уравнениями параболического и гиперболического типов. В третьей краевой задаче считается, что $k_1 < 0$, $k_2 > 0$.

Отметим, что выбор функции ψ носит чисто алгебраический характер и не связан с рассматриваемым уравнением [существует бесконечное множество подходящих функций ψ, удовлетворяющих условию (3)]. Преобразования вида (2) нередко используются на первом этапе решения краевых задач.

0.11.2. Преобразования, приводящие к однородным начальным и граничным условиям

Линейную задачу с неоднородными начальными и граничными условиями можно свести к линейной задаче с однородными начальными и граничными условиями. Для этого следует ввести новую зависимую переменную по формуле (2), где функция ψ должна удовлетворять неоднородным начальным и граничным условиям.

Укажем теперь простейшие функции ψ, которые можно использовать в преобразовании (2) для получения краевых задач с однородными начальными и граничными условиями. Для конкретности будем рассматривать уравнение параболического типа с одной пространственной переменной и общим начальным условием

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0. \tag{4}$$

ТАБЛИЦА 13

Простейшие преобразования вида $w(x,t) = \psi(x,t) + u(x,t)$, приводящие к однородным граничным условиям в задачах с одной пространственной переменной ($0 \leqslant x \leqslant l$).

№	Задачи	Граничные условия	Функция $\psi(x,t)$
1	Первая краевая задача	$w = g_1(t)$ при $x = 0$ $w = g_2(t)$ при $x = l$	$\psi(x,t) = g_1(t) + \dfrac{x}{l}\left[g_2(t) - g_1(t)\right]$
2	Вторая краевая задача	$\partial_x w = g_1(t)$ при $x = 0$ $\partial_x w = g_2(t)$ при $x = l$	$\psi(x,t) = xg_1(t) + \dfrac{x^2}{2l}\left[g_2(t) - g_1(t)\right]$
3	Третья краевая задача	$\partial_x w + k_1 w = g_1(t)$ при $x = 0$ $\partial_x w + k_2 w = g_2(t)$ при $x = l$	$\psi(x,t) = \dfrac{(k_2x-1-k_2l)g_1(t) + (1-k_1x)g_2(t)}{k_2 - k_1 - k_1k_2l}$
4	Смешанная краевая задача	$w = g_1(t)$ при $x = 0$ $\partial_x w = g_2(t)$ при $x = l$	$\psi(x,t) = g_1(t) + xg_2(t)$
5	Смешанная краевая задача	$\partial_x w = g_1(t)$ при $x = 0$ $w = g_2(t)$ при $x = l$	$\psi(x,t) = (x - l)g_1(t) + g_2(t)$

1°. *Первая краевая задача.* Дано начальное условие (4), граничные условия приведены в 1-й строке табл. 13. Пусть выполнены условия согласования начального и граничных условий, т. е. $f(0) = g_1(0)$, $f(l) = g_2(0)$. Тогда в качестве функции ψ в преобразовании (2) можно взять

$$\psi(x,t) = f(x) + g_1(t) - g_1(0) + \frac{x}{l}\big[g_2(t) - g_1(t) + g_1(0) - g_2(0)\big].$$

2°. *Вторая краевая задача.* Дано начальное условие (4), граничные условия приведены во 2-й строке табл. 13. Пусть выполнены условия согласования начального и граничных условий, т. е. $f'(0) = g_1(0)$, $f'(l) = g_2(0)$. Тогда в качестве функции ψ в преобразовании (2) можно взять

$$\psi(x,t) = f(x) + x\big[g_1(t) - g_1(0)\big] + \frac{x^2}{2l}\big[g_2(t) - g_1(t) + g_1(0) - g_2(0)\big].$$

3°. *Третья краевая задача.* Дано начальное условие (4), граничные условия приведены в 3-й строке табл. 13. При выполнении условий согласования начального и граничных условий в качестве функции ψ в преобразовании (2) можно взять

$$\psi(x,t) = f(x) + \frac{(k_2x - 1 - k_2l)\big[g_1(t) - g_1(0)\big] + (1 - k_1x)\big[g_2(t) - g_2(0)\big]}{k_2 - k_1 - k_1k_2l} \qquad (k_1 < 0,\ k_2 > 0).$$

4°. *Смешанная краевая задача.* Дано начальное условие (4), граничные условия приведены в 4-й строке табл. 13. Пусть выполнены условия согласования начального и граничных условий, т. е. $f(0) = g_1(0)$, $f'(l) = g_2(0)$. Тогда в качестве функции ψ в преобразовании (2) можно взять

$$\psi(x,t) = f(x) + g_1(t) - g_1(0) + x\big[g_2(t) - g_2(0)\big].$$

5°. *Смешанная краевая задача.* Дано начальное условие (4), граничные условия приведены в 5-й строке табл. 13. Пусть выполнены условия согласования начального и граничных условий, т. е. $f'(0) = g_1(0)$, $f(l) = g_2(0)$. Тогда в качестве функции ψ в преобразовании (2) можно взять

$$\psi(x,t) = f(x) + (x - l)\big[g_1(t) - g_1(0)\big] + g_2(t) - g_2(0).$$

⊙ *Литература к разделу 0.11*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964), А. Д. Полянин, А. В. Вязьмин, А. И. Журов, Д. А. Казенин (1998).

1. Уравнения параболического типа с одной пространственной переменной

1.1. Уравнения с постоянными коэффициентами

1.1.1. Уравнение теплопроводности $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$

Это уравнение часто встречается в теории тепло- и массопереноса. Оно описывает развитие одномерных нестационарных тепловых процессов в неподвижных средах или твердых телах с постоянным коэффициентом температуропроводности. Аналогичное уравнение используется для анализа соответствующих одномерных нестационарных массообменных процессов при постоянном коэффициенте диффузии.

1.1.1-1. Частные решения (A, B, μ — произвольные постоянные):

$$
\begin{aligned}
w(x) &= Ax + B,\\
w(x,t) &= A(x^2 + 2at) + B,\\
w(x,t) &= A(x^3 + 6atx) + B,\\
w(x,t) &= A(x^4 + 12atx^2 + 12a^2t^2) + B,\\
w(x,t) &= A(x^5 + 20atx^3 + 60a^2t^2x) + B,\\
w(x,t) &= A(x^6 + 30atx^4 + 180a^2t^2x^2 + 120a^3t^3) + B,\\
w(x,t) &= x^{2n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n)(2n-1)\dots(2n-2k+1)}{k!}(at)^k x^{2n-2k},\\
w(x,t) &= x^{2n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n+1)(2n)\dots(2n-2k+2)}{k!}(at)^k x^{2n-2k+1},\\
w(x,t) &= A\exp(a\mu^2 t \pm \mu x) + B,\\
w(x,t) &= A\frac{1}{\sqrt{t}}\exp\Bigl(-\frac{x^2}{4at}\Bigr) + B,\\
w(x,t) &= A\frac{x}{t^{3/2}}\exp\Bigl(-\frac{x^2}{4at}\Bigr) + B,\\
w(x,t) &= A\exp(-a\mu^2 t)\cos(\mu x) + B,\\
w(x,t) &= A\exp(-a\mu^2 t)\sin(\mu x) + B,\\
w(x,t) &= A\exp(-\mu x)\cos(\mu x - 2a\mu^2 t) + B,\\
w(x,t) &= A\exp(-\mu x)\sin(\mu x - 2a\mu^2 t) + B,\\
w(x,t) &= A\operatorname{erf}\Bigl(\frac{x}{2\sqrt{at}}\Bigr) + B,\\
w(x,t) &= A\operatorname{erfc}\Bigl(\frac{x}{2\sqrt{at}}\Bigr) + B,\\
w(x,t) &= A\Bigl[\sqrt{\frac{t}{\pi}}\exp\Bigl(-\frac{x^2}{4at}\Bigr) - \frac{x}{2\sqrt{a}}\operatorname{erfc}\Bigl(\frac{x}{2\sqrt{at}}\Bigr)\Bigr] + B,
\end{aligned}
$$

где n — целое положительное число, $\operatorname{erf} z \equiv \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^z \exp(-\xi^2)\,d\xi$ — интеграл вероятностей (функция ошибок), $\operatorname{erfc} z = 1 - \operatorname{erf} z$ — дополнительный интеграл вероятностей.

Фундаментальное решение:

$$
\mathscr{E}(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\exp\Bigl(-\frac{x^2}{4at}\Bigr).
$$

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964), А. Д. Полянин, А. В. Вязьмин, А. И. Журов, Д. А. Казенин (1998).

ТАБЛИЦА 14

Преобразования вида $\xi = f(x,t)$, $w = g(\xi,t)u(\xi,t)$, допускающие решения уравнения $\partial_t w - \partial_{xx} w = 0$ с разделенными переменными для искомой функции $u(\xi,t) = \varphi(t)\psi(\xi)$.

№	Зависимость $\xi = f(x,t)$	Множитель $g = g(\xi,t)$	Функция $\varphi = \varphi(t)$, λ — любое	Уравнение для $\psi = \psi(\xi)$
1	$\xi = \frac{x}{\sqrt{t}}$	$g = 1$	$\varphi = t^\lambda$	$\psi''_{\xi\xi} + \frac{1}{2}\xi\psi'_\xi - \lambda\psi = 0$
2	$\xi = x - \frac{1}{2}t^2$	$g = \exp\bigl(-\frac{1}{2}\xi t\bigr)$	$\varphi = \exp\bigl(-\frac{1}{12}t^3 + \lambda t\bigr)$	$\psi''_{\xi\xi} + \bigl(\frac{1}{2}\xi - \lambda\bigr)\psi = 0$
3	$\xi = \frac{x}{\sqrt{1+t^2}}$	$g = \exp\bigl(-\frac{1}{4}\xi^2 t\bigr)$	$\varphi = \frac{\exp(\lambda \operatorname{arctg} t)}{(1+t^2)^{1/4}}$	$\psi''_{\xi\xi} + \bigl(\frac{1}{4}\xi^2 - \lambda\bigr)\psi = 0$

1.1.1-2. Формулы, позволяющие строить частные решения.

Пусть $w = w(x,t)$ — некоторое решение уравнения теплопроводности. Тогда функции

$$w_1 = Aw(\pm\lambda x + C_1,\ \lambda^2 t + C_2),$$
$$w_2 = A\exp(\lambda x + a\lambda^2 t)w(x + 2a\lambda t + C_1,\ t + C_2),$$
$$w_3 = \frac{A}{\sqrt{|\delta + \beta t|}}\exp\Bigl[-\frac{\beta x^2}{4a(\delta + \beta t)}\Bigr]w\Bigl(\pm\frac{x}{\delta + \beta t},\ \frac{\gamma + \lambda t}{\delta + \beta t}\Bigr), \qquad \lambda\delta - \beta\gamma = 1,$$

где A, C_1, C_2, β, δ, λ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения. Последняя формула при $\beta = 1$, $\gamma = -1$, $\delta = \lambda = 0$ получена с помощью преобразования Аппеля.

⊙ *Литература*: У. Миллер (1981, стр. 133–134).

1.1.1-3. Частные решения в виде бесконечного ряда.

1°. Решение, содержащее произвольную функцию координаты:

$$w(x,t) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(at)^n}{n!}f_x^{(2n)}(x), \qquad f_x^{(m)}(x) = \frac{d^m}{dx^m}f(x),$$

где $f(x)$ — любая бесконечно дифференцируемая функция. Это решение удовлетворяет начальному условию $w(x,0) = f(x)$. Сумма будет конечной, если $f(x)$ является полиномом.

2°. Решения, содержащие произвольные функции времени:

$$w(x,t) = g(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n(2n)!}x^{2n}g_t^{(n)}(t),$$
$$w(x,t) = xh(t) + x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n(2n+1)!}x^{2n}h_t^{(n)}(t),$$

где $g(t)$ и $h(t)$ — любые бесконечно дифференцируемые функции. Суммы будут конечными, если $g(t)$ и $h(t)$ являются полиномами. Первое решение удовлетворяет граничному условию первого рода $w(0,t) = g(t)$, а второе — граничному условию второго рода $\partial_x w(0,t) = h(t)$.

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 59).

1.1.1-4. Преобразования, позволяющие разделить переменные.

В табл. 14 указаны преобразования, приводящие уравнение теплопроводности к уравнениям с разделяющимися переменными (тождественное преобразование с $\xi = x$, $g = 1$ опущено).

Замечание. Решение уравнения для функции ψ в первой строке табл. 14 в общем случае выражаются через вырожденные гипергеометрические функции. В частном случае $\lambda = \frac{1}{2}n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) имеются решения вида $\psi(\xi) = (i/2)^n H_n(i\xi/2)$, где $H_n(z)$ — многочлены Эрмита, $i^2 = -1$. Решение уравнения для функции ψ во второй строке табл. 14 выражается через функции Бесселя, а в третьей строке — через функции параболического цилиндра.

⊙ *Литература*: E. Kalnins, W. Miller (1974), У. Миллер (1981, стр. 132–146).

1.1.1-5. Область: $-\infty < x < \infty$. Задача Коши.

Задано начальное условие:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Решение:

$$w(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\biggl[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\biggr] f(\xi)\, d\xi.$$

Пример 1. Начальная температура в области $|x| < x_0$ постоянна и равна w_1, а в области $|x| > x_0$ — соответственно w_2, т. е.

$$f(x) = \begin{cases} w_1 & \text{при } |x| < x_0, \\ w_2 & \text{при } |x| > x_0. \end{cases}$$

Решение:

$$w = \frac{1}{2}(w_1 - w_2)\biggl[\operatorname{erf}\biggl(\frac{x_0 - x}{2\sqrt{at}}\biggr) + \operatorname{erf}\biggl(\frac{x_0 + x}{2\sqrt{at}}\biggr)\biggr] + w_2.$$

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 61).

1.1.1-6. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},$$
$$w = g(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}.$$

Решение:

$$w(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \int_0^{\infty} \biggl\{\exp\biggl[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\biggr] - \exp\biggl[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\biggr]\biggr\} f(\xi)\, d\xi + {}$$
$$+ \frac{x}{2\sqrt{\pi a}} \int_0^t \exp\biggl[-\frac{x^2}{4a(t-\tau)}\biggr] \frac{g(\tau)\, d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}.$$

Пример 2. Начальная температура линейно зависит от пространственной координаты, $f(x) = w_0 + bx$. Температура на границе равна нулю, $g(t) = 0$.

Решение:

$$w = w_0 \operatorname{erf}\biggl(\frac{x}{2\sqrt{at}}\biggr) + bx.$$

Значению $b = 0$ соответствует случай одинаковой начальной температуры с $f(x) = w_0$.

Пример 3. Начальная температура равна нулю, $f(x) = 0$. Температура на границе линейно возрастает от времени, $g(t) = At$.

Решение:

$$w = At\biggl[\biggl(1 + \frac{x^2}{2at}\biggr) \operatorname{erfc}\biggl(\frac{x}{2\sqrt{at}}\biggr) - \frac{x}{\sqrt{\pi a t}} \exp\biggl(-\frac{x^2}{4at}\biggr)\biggr].$$

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 64–69), А. Г. Бутковский (1979, стр. 51).

1.1.1-7. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Вторая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},$$
$$\partial_x w = g(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}.$$

Решение:

$$w(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \int_0^{\infty} \biggl\{\exp\biggl[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\biggr] + \exp\biggl[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\biggr]\biggr\} f(\xi)\, d\xi - {}$$
$$- \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^t \exp\biggl[-\frac{x^2}{4a(t-\tau)}\biggr] \frac{g(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau.$$

Пример 4. Начальная температура равна нулю, $f(x) = 0$. На границе в течение всего времени поддерживается постоянный тепловой поток, $g(t) = -Q$.

Решение:

$$w = 2Q\sqrt{\frac{at}{\pi}} \exp\biggl(-\frac{x^2}{4at}\biggr) - Qx \operatorname{erfc}\biggl(\frac{x}{2\sqrt{at}}\biggr).$$

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 79–81), А. Г. Бутковский (1979, стр. 50).

1.1.1-8. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Третья краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},$$
$$\partial_x w - kw = g(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}.$$

Решение:

$$w(x,t) = \int_0^\infty f(\xi) G(x,\xi,t)\,d\xi - a\int_0^t g(\tau) G(x,0,t-\tau)\,d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right] - 2k\int_0^\infty \exp\left[-\frac{(x+\xi+\eta)^2}{4at} - k\eta\right]d\eta\right\}.$$

Несобственный интеграл можно вычислять по формуле

$$\int_0^\infty \exp\left[-\frac{(x+\xi+\eta)^2}{4at} - k\eta\right]d\eta = \sqrt{\pi a t}\,\exp\left[ak^2 t + k(x+\xi)\right]\operatorname{erfc}\left(\frac{x+\xi}{2\sqrt{at}} + k\sqrt{at}\right).$$

Пример 5. Начальная температура одинакова, $f(x) = w_0$. Температура контактирующей среды равна нулю, $g(t) = 0$.

Решение:

$$w = w_0\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) + \exp(kx + ak^2 t)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}} + k\sqrt{at}\right)\right].$$

⦿ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 78–79), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 60, 320), А. Г. Бутковский (1979, стр. 50).

1.1.1-9. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},$$
$$w = g_1(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)},$$
$$w = g_2(t) \quad \text{при} \quad x = l \quad \text{(граничное условие)}.$$

Решение:

$$w(x,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^\infty \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\exp\left(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\right) M_n(t),$$

где

$$M_n(t) = \int_0^l f(\xi)\sin\left(\frac{n\pi\xi}{l}\right)d\xi + \frac{an\pi}{l}\int_0^t \exp\left(\frac{an^2\pi^2\tau}{l^2}\right)\left[g_1(\tau) - (-1)^n g_2(\tau)\right]d\tau.$$

Замечание. Используя соотношения для сумм бесконечных рядов [см. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев (1981, стр. 726)]:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin n\xi}{n} = \frac{\pi - \xi}{2} \quad (0 < \xi < 2\pi), \qquad \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\frac{\sin n\xi}{n} = \frac{\xi}{2} \quad (-\pi < \xi < \pi),$$

можно преобразовать решение к следующему виду:

$$w(x,t) = g_1(t) + \frac{x}{l}\left[g_2(t) - g_1(t)\right] + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^\infty \sin(\lambda_n x)\exp(-a\lambda_n^2 t) R_n(t), \qquad \lambda_n = \frac{n\pi}{l},$$

где

$$R_n(t) = \int_0^l f(\xi)\sin(\lambda_n\xi)\,d\xi - \frac{1}{\lambda_n}\exp(a\lambda_n^2 t)\left[g_1(t) - (-1)^n g_2(t)\right] +$$
$$+ a\lambda_n\int_0^t \exp(a\lambda_n^2\tau)\left[g_1(\tau) - (-1)^n g_2(\tau)\right]d\tau =$$
$$= \int_0^l f(\xi)\sin(\lambda_n\xi)\,d\xi - \frac{1}{\lambda_n}\left[g_1(0) - (-1)^n g_2(0)\right] - \frac{1}{\lambda_n}\int_0^t \exp(a\lambda_n^2\tau)\left[g_1'(\tau) - (-1)^n g_2'(\tau)\right]d\tau.$$

Отметим, что в разд. 1.1.2-5 указано также другое представление решения.

Пример 6. Начальная температура одинакова, $f(x) = w_0$. На обеих границах поддерживается нулевая температура, $g_1(t) = g_2(t) = 0$.

Решение:

$$w = \frac{4w_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{l}\right] \exp\left[-\frac{a(2n+1)^2\pi^2 t}{l^2}\right].$$

Пример 7. Начальная температура равна нулю, $f(x) = 0$. На границах поддерживаются постоянные температуры: $g_1(t) = w_1$, $g_2(t) = w_2$.

Решение:

$$w = w_1 + (w_2 - w_1)\frac{x}{l} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n w_2 - w_1}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \exp\left(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\right).$$

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 98, 101, 106), А. Д. Полянин, А. В. Вязьмин, А. И. Журов, Д. А. Казенин (1998, стр. 32).

1.1.1-10. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Вторая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_x w &= g_1(t) && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)},\\ \partial_x w &= g_2(t) && \text{при} \quad x = l && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t) = \int_0^l f(\xi) G(x,\xi,t)\,d\xi - a\int_0^t g_1(\tau) G(x,0,t-\tau)\,d\tau + a\int_0^t g_2(\tau) G(x,l,t-\tau)\,d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{l} + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi \xi}{l}\right) \exp\left(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\right).$$

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 353), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 65, 329), А. Г. Бутковский (1979, стр. 55).

1.1.1-11. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Третья краевая задача ($k_1 > 0$, $k_2 > 0$).

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_x w - k_1 w &= g_1(t) && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)},\\ \partial_x w + k_2 w &= g_2(t) && \text{при} \quad x = l && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t) = \int_0^l f(\xi) G(x,\xi,t)\,d\xi - a\int_0^t g_1(\tau) G(x,0,t-\tau)\,d\tau + a\int_0^t g_2(\tau) G(x,l,t-\tau)\,d\tau.$$

Здесь

$$G(x,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|y_n\|^2} y_n(x) y_n(\xi) \exp(-a\mu_n^2 t),$$

где

$$y_n(x) = \cos(\mu_n x) + \frac{k_1}{\mu_n}\sin(\mu_n x), \qquad \|y_n\|^2 = \frac{k_2}{2\mu_n^2}\frac{\mu_n^2 + k_1^2}{\mu_n^2 + k_2^2} + \frac{k_1}{2\mu_n^2} + \frac{l}{2}\left(1 + \frac{k_1^2}{\mu_n^2}\right);$$

μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\dfrac{\operatorname{tg}(\mu l)}{\mu} = \dfrac{k_1 + k_2}{\mu^2 - k_1 k_2}$.

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 120), А. Г. Бутковский (1979, стр. 53).

1.1.1-12. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Смешанные краевые задачи.

1°. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x) \quad \text{при} \quad t=0 \quad \text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(t) \quad \text{при} \quad x=0 \quad \text{(граничное условие)},\\ \partial_x w &= g_2(t) \quad \text{при} \quad x=l \quad \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t)=\int_0^l f(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + a\int_0^t g_1(\tau)\Lambda(x,t-\tau)\,d\tau + a\int_0^t g_2(\tau)G(x,l,t-\tau)\,d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\sin\Big[\frac{\pi(2n+1)x}{2l}\Big]\sin\Big[\frac{\pi(2n+1)\xi}{2l}\Big]\exp\Big[-\frac{a\pi^2(2n+1)^2t}{4l^2}\Big],$$

$$\Lambda(x,t)=\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,t)\Big|_{\xi=0}.$$

2°. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x) \quad \text{при} \quad t=0 \quad \text{(начальное условие)},\\ \partial_x w &= g_1(t) \quad \text{при} \quad x=0 \quad \text{(граничное условие)},\\ w &= g_2(t) \quad \text{при} \quad x=l \quad \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t)=\int_0^l f(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi - a\int_0^t g_1(\tau)G(x,0,t-\tau)\,d\tau - a\int_0^t g_2(\tau)H(x,t-\tau)\,d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\cos\Big[\frac{\pi(2n+1)x}{2l}\Big]\cos\Big[\frac{\pi(2n+1)\xi}{2l}\Big]\exp\Big[-\frac{a\pi^2(2n+1)^2t}{4l^2}\Big],$$

$$H(x,t)=\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,t)\Big|_{\xi=l}.$$

Отметим, что в разд. 1.1.2-8 указаны также другие формы представления решения смешанных краевых задач.

Пример 8. Начальная температура равна нулю, $f(x)=0$. Левая граница теплоизолирована, на правой границе температура постоянна: $g_1(t)=0$, $g_2(t)=A$.

Решение:

$$w=A+\frac{4A}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\cos\Big[\frac{\pi(2n+1)x}{2l}\Big]\exp\Big[-\frac{a\pi^2(2n+1)^2t}{4l^2}\Big].$$

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 65, 330), А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко (1985, стр. 106, 249).

1.1.1-13. Задачи без начальных условий.

В приложениях встречаются задачи, когда рассматриваемый процесс изучается в моменты времени достаточно удаленные от начального, при этом влияние начальных условий практически не сказывается на распределении искомой величины в момент наблюдения. В таких задачах начальное условие не формулируется, а граничные условия считаются заданными для всех моментов времени $-\infty < t$. Дополнительным требованием является ограниченность решения во всей области.

Рассмотрим в качестве примера первую краевую задачу для полупространства $0 \leqslant x < \infty$ с граничным условием

$$w=g(t) \quad \text{при} \quad x=0.$$

Решение:

$$w(x,t)=\frac{x}{2\sqrt{\pi a}}\int_{-\infty}^{t}\frac{g(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\Big[-\frac{x^2}{4a(t-\tau)}\Big]\,d\tau.$$

Пример 9. Температура на границе является гармонической функцией времени, т. е.

$$g(t) = w_0 \cos(\omega t + \beta).$$

Решение:

$$w = w_0 \exp\Bigl(-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\,x\Bigr) \cos\Bigl(-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\,x + \omega t + \beta\Bigr).$$

⦿ *Литература:* В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 203), А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972, стр. 243–245).

1.1.1-14. Сопряженные задачи теплопроводности.

В таких задачах рассматриваются две (или более) области V_1 и V_2 с общей границей S, заполненные разными средами. Каждая среда характеризуется своими коэффициентами теплопроводности λ_1, λ_2 и температуропроводности a_1, a_2 и описывается соответствующими (различными) уравнениями тепло- и массопереноса. Граничные условия теплового равновесия выражают равенство температур и равенство тепловых потоков на границе раздела фаз. Ниже рассмотрен типичный пример сопряженной задачи (более детальный анализ таких задач выходит за рамки данного справочника).

Рассматриваются два полуограниченных твердых тела (две полуограниченные неподвижные среды), распределения температур в которых $w_1 = w_1(x,t)$, $w_2 = w_2(x,t)$ описываются уравнениями:

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \qquad (\text{в области } 0 \leqslant x < \infty),$$
$$\frac{\partial w_2}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \qquad (\text{в области } -\infty < x \leqslant 0).$$

В каждом из тел задано свое распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$, а на общей границе $x = 0$ заданы сопряженные граничные условия:

$$\begin{aligned}
w_1 &= f_1(x) && \text{при} \quad t = 0 \quad (\text{начальное условие}),\\
w_2 &= f_2(x) && \text{при} \quad t = 0 \quad (\text{начальное условие}),\\
w_1 &= w_2 && \text{при} \quad x = 0 \quad (\text{граничное условие}),\\
\lambda_1 \partial_x w_1 &= \lambda_2 \partial_x w_2 && \text{при} \quad x = 0 \quad (\text{граничное условие}).
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w_1(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi a_1 t}} \int_0^\infty f_1(\xi)\Bigl\{\exp\Bigl[-\frac{(x-\xi)^2}{4a_1 t}\Bigr] + \exp\Bigl[-\frac{(x+\xi)^2}{4a_1 t}\Bigr]\Bigr\}\,d\xi -\\
&\quad - \sqrt{\frac{a_1}{\pi\lambda_1^2}} \int_0^t \exp\Bigl[-\frac{x^2}{4a_1(t-\tau)}\Bigr] \frac{g(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}},\\
w_2(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi a_2 t}} \int_0^\infty f_2(-\xi)\Bigl\{\exp\Bigl[-\frac{(x-\xi)^2}{4a_2 t}\Bigr] + \exp\Bigl[-\frac{(x+\xi)^2}{4a_2 t}\Bigr]\Bigr\}\,d\xi +\\
&\quad + \sqrt{\frac{a_2}{\pi\lambda_2^2}} \int_0^t \exp\Bigl[-\frac{x^2}{4a_2(t-\tau)}\Bigr] \frac{g(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}}.
\end{aligned}$$

Здесь функция $g(t)$ определяется по формуле

$$g(t) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\pi(\lambda_1\sqrt{a_2} + \lambda_2\sqrt{a_1})} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{F(\tau)\,d\tau}{\sqrt{\tau(t-\tau)}},$$

где

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{a_1}} \int_0^\infty f_1(\xi) \exp\Bigl(-\frac{\xi^2}{4a_1 t}\Bigr)\,d\xi - \frac{1}{\sqrt{a_2}} \int_0^\infty f_2(-\xi) \exp\Bigl(-\frac{\xi^2}{4a_2 t}\Bigr)\,d\xi.$$

Пример 10. Начальные температуры тел постоянны: $f_1(x) = A$, $f_2(x) = B$.
Решение:

$$\frac{w_1(x,t) - B}{A - B} = \frac{K}{1+K}\Bigl[1 + \frac{1}{K}\operatorname{erf}\Bigl(\frac{x}{2\sqrt{a_1 t}}\Bigr)\Bigr],$$
$$\frac{w_2(x,t) - B}{A - B} = \frac{K}{1+K}\operatorname{erfc}\Bigl(\frac{|x|}{2\sqrt{a_1 t}}\Bigr),$$

где $K = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\sqrt{\dfrac{a_2}{a_1}}$ — величина, характеризующая тепловую активность первой среды по отношению ко второй.

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 91–92, 314–320), А. В. Лыков (1967, стр. 365).

1.1.2. Уравнение вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \Phi(x,t)$

Уравнение этого вида описывает развитие одномерных нестационарных тепловых процессов в неподвижных средах или твердых телах с постоянным коэффициентом температуропроводности при наличии объемного тепловыделения, когда источниковый член зависит от пространственной координаты и времени.

1.1.2-1. Область: $-\infty < x < \infty$. Задача Коши.

Задано начальное условие:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Решение:

$$w(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\exp\biggl[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\biggr].$$

⊙ *Литература*: А. Г. Бутковский (1979, стр. 49).

1.1.2-2. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},$$
$$w = g(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}.$$

Решение:

$$w(x,t) = \int_0^{\infty} f(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^t g(\tau)H(x,t-\tau)\,d\tau + \int_0^t\int_0^{\infty} \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\biggl\{\exp\biggl[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\biggr] - \exp\biggl[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\biggr]\biggr\}, \quad H(x,t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi a}\,t^{3/2}}\exp\biggl(-\frac{x^2}{4at}\biggr).$$

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 65–68), А. Г. Бутковский (1979, стр. 51).

1.1.2-3. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Вторая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},$$
$$\partial_x w = g(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}.$$

Решение:

$$w(x,t) = \int_0^{\infty} G(x,\xi,t)f(\xi)\,d\xi - a\int_0^t g(\tau)G(x,0,t-\tau)\,d\tau + \int_0^t\int_0^{\infty} \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\biggl\{\exp\biggl[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\biggr] + \exp\biggl[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\biggr]\biggr\}, \quad G(x,0,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi a t}}\exp\biggl(-\frac{x^2}{4at}\biggr).$$

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 79–81), А. Г. Бутковский (1979, стр. 50).

1.1.2-4. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Третья краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},\\ \partial_x w - kw &= g(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t) = \int_0^\infty f(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi - a\int_0^t g(\tau)G(x,0,t-\tau)\,d\tau + \int_0^t\int_0^\infty \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right] - 2k\int_0^\infty \exp\left[-\frac{(x+\xi+\eta)^2}{4at} - k\eta\right]d\eta\right\}.$$

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 60, 320), А. Г. Бутковский (1979, стр. 50).

1.1.2-5. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)},\\ w &= g_2(t) \quad \text{при} \quad x = l \quad \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(x,t) = &\int_0^l f(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^t\int_0^l \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau +\\ &+ a\int_0^t g_1(\tau)H_1(x,t-\tau)\,d\tau - a\int_0^t g_2(\tau)H_2(x,t-\tau)\,d\tau. \end{aligned}$$

Две формы представления для функции Грина:

$$\begin{aligned} G(x,\xi,t) &= \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi\xi}{l}\right)\exp\left(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\right) =\\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi+2nl)^2}{4at}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi+2nl)^2}{4at}\right]\right\}. \end{aligned}$$

Первый ряд сходится быстро при больших t, а второй — при малых t. Функции H_1 и H_2 выражаются через функцию Грина по формулам

$$H_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,t)\Big|_{\xi=0}, \quad H_2(x,t) = \frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,t)\Big|_{\xi=l}.$$

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 268), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 64, 326), А. Г. Бутковский (1979, стр. 51).

1.1.2-6. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Вторая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},\\ \partial_x w &= g_1(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)},\\ \partial_x w &= g_2(t) \quad \text{при} \quad x = l \quad \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(x,t) = &\int_0^l f(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^t\int_0^l \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau -\\ &- a\int_0^t g_1(\tau)G(x,0,t-\tau)\,d\tau + a\int_0^t g_2(\tau)G(x,l,t-\tau)\,d\tau.. \end{aligned}$$

Две формы представления для функции Грина:

$$G(x,\xi,t)=\frac{1}{l}+\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\Bigl(\frac{n\pi x}{l}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{n\pi\xi}{l}\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{an^2\pi^2t}{l^2}\Bigr)=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi at}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\biggl\{\exp\Bigl[-\frac{(x-\xi+2nl)^2}{4at}\Bigr]+\exp\Bigl[-\frac{(x+\xi+2nl)^2}{4at}\Bigr]\biggr\}.$$

Первый ряд сходится быстро при больших t, а второй — при малых t.

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 65, 329), А. Г. Бутковский (1979, стр. 55).

1.1.2-7. Область: $0\leqslant x\leqslant l$. Третья краевая задача ($k_1>0$, $k_2>0$).

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w&=f(x) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_x w-k_1w&=g_1(t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_x w+k_2w&=g_2(t) &&\text{при}\quad x=l &&\text{(граничное условие)}.\end{aligned}$$

Решение дается формулой из разд. 1.1.1-11 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t\int_0^l\Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 120), А. Г. Бутковский (1979, стр. 53).

1.1.2-8. Область: $0\leqslant x\leqslant l$. Смешанные краевые задачи.

1°. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w&=f(x) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ w&=g_1(t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_x w&=g_2(t) &&\text{при}\quad x=l &&\text{(граничное условие)}.\end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t)=\int_0^l f(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi+\int_0^t\int_0^l\Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau+$$
$$+a\int_0^t g_1(\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,t-\tau)\Bigr]_{\xi=0}d\tau+a\int_0^t g_2(\tau)G(x,l,t-\tau)\,d\tau.$$

Две формы представления для функции Грина:

$$G(x,\xi,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\sin\Bigl[\frac{\pi(2n+1)x}{2l}\Bigr]\sin\Bigl[\frac{\pi(2n+1)\xi}{2l}\Bigr]\exp\Bigl[-\frac{a\pi^2(2n+1)^2t}{4l^2}\Bigr]=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi at}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\biggl\{\exp\Bigl[-\frac{(x-\xi+2nl)^2}{4at}\Bigr]-\exp\Bigl[-\frac{(x+\xi+2nl)^2}{4at}\Bigr]\biggr\}.$$

Первый ряд быстро сходится при больших t, а второй — при малых t.

2°. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w&=f(x) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_x w&=g_1(t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\ w&=g_2(t) &&\text{при}\quad x=l &&\text{(граничное условие)}.\end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t)=\int_0^l f(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi+\int_0^t\int_0^l\Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau-$$
$$-a\int_0^t g_1(\tau)G(x,0,t-\tau)\,d\tau-a\int_0^t g_2(\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,t-\tau)\Bigr]_{\xi=l}d\tau.$$

Две формы представления для функции Грина:

$$G(x,\xi,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\cos\Big[\frac{\pi(2n+1)x}{2l}\Big]\cos\Big[\frac{\pi(2n+1)\xi}{2l}\Big]\exp\Big[-\frac{a\pi^2(2n+1)^2t}{4l^2}\Big]=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi at}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\Big\{\exp\Big[-\frac{(x-\xi+2nl)^2}{4at}\Big]+\exp\Big[-\frac{(x+\xi+2nl)^2}{4at}\Big]\Big\}.$$

Первый ряд сходится быстро при больших t, а второй — при малых t.

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 65, 330), А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко (1985, стр. 106, 249).

1.1.3. Уравнение вида $\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+bw+\Phi(x,t)$

Однородное уравнение этого вида описывает одномерный нестационарный массоперенос в неподвижной среде с объемной химической реакцией первого порядка ($b<0$ соответствует поглощению вещества, а $b>0$ — выделению вещества). Аналогичное уравнение используется для анализа соответствующих одномерных тепловых процессов, когда в среде происходит объемное тепловыделение ($b>0$), пропорциональное температуре. Кроме того, это уравнение описывает теплоперенос в одномерном стержне, боковая поверхность которого обменивается теплом с окружающей средой постоянной температуры ($b>0$ соответствует случаю, когда температура среды выше температуры стержня, а $b<0$ — ниже).

1.1.3-1. Однородное уравнение (при $\Phi\equiv 0$).

1°. Частные решения:

$$\begin{aligned}
w(x)&=Ae^{\lambda x}+Be^{-\lambda x},\qquad \lambda=\sqrt{-b/a},\\
w(x,t)&=(Ax+B)e^{bt},\\
w(x,t)&=\big[A(x^2+2at)+B\big]e^{bt},\\
w(x,t)&=\big[A(x^3+6atx)+B\big]e^{bt},\\
w(x,t)&=\big[A(x^4+12atx^2+12a^2t^2)+B\big]e^{bt},\\
w(x,t)&=\big[A(x^5+20atx^3+60a^2t^2x)+B\big]e^{bt},\\
w(x,t)&=\big[A(x^6+30atx^4+180a^2t^2x^2+120a^3t^3)+B\big]e^{bt},\\
w(x,t)&=A\exp\big[(a\mu^2+b)t\pm\mu x\big]+Be^{bt},\\
w(x,t)&=A\frac{1}{\sqrt{t}}\exp\Big(-\frac{x^2}{4at}+bt\Big)+Be^{bt},\\
w(x,t)&=A\frac{x}{t^{3/2}}\exp\Big(-\frac{x^2}{4at}+bt\Big)+Be^{bt},\\
w(x,t)&=A\exp\big[(b-a\mu^2)t\big]\cos(\mu x)+Be^{bt},\\
w(x,t)&=A\exp\big[(b-a\mu^2)t\big]\sin(\mu x)+Be^{bt},\\
w(x,t)&=A\exp(-\mu x+bt)\cos(\mu x-2a\mu^2t)+Be^{bt},\\
w(x,t)&=A\exp(-\mu x+bt)\sin(\mu x-2a\mu^2t)+Be^{bt},\\
w(x,t)&=A\exp(-\mu x)\cos(\beta x-2a\beta\mu t),\qquad \beta=\sqrt{\mu^2+b/a},\\
w(x,t)&=A\exp(-\mu x)\sin(\beta x-2a\beta\mu t),\qquad \beta=\sqrt{\mu^2+b/a},\\
w(x,t)&=Ae^{bt}\operatorname{erf}\Big(\frac{x}{2\sqrt{at}}\Big)+Be^{bt},\\
w(x,t)&=Ae^{bt}\operatorname{erfc}\Big(\frac{x}{2\sqrt{at}}\Big)+Be^{bt},
\end{aligned}$$

где A, B, μ — произвольные постоянные.

2°. Фундаментальное решение:

$$\mathscr{E}(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at} + bt\right).$$

1.1.3-2. Преобразование к уравнению теплопроводности. Замечание о функциях Грина.

Замена $w(x,t) = e^{bt}u(x,t)$ приводит к неоднородному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-bt}\Phi(x,t).$$

которое подробно рассматривается в разд. 1.1.2. Начальное условие для новой переменной u не меняется, а неоднородная часть в граничных условиях умножается на функцию e^{-bt}. Учитывая сказанное, нетрудно получить решение исходного уравнения с начальными и граничными условиями, которые рассматривались в разд. 1.1.2.

Во всех краевых задачах, которые рассматриваются в данном разделе, функцию Грина можно представить в виде

$$G_b(x,\xi,t) = e^{bt}G_0(x,\xi,t),$$

где $G_0(x,\xi,t)$ — функция Грина для уравнения теплопроводности, которое определяется значением $b = 0$.

1.1.3-3. Область: $-\infty < x < \infty$. Задача Коши.

Задано начальное условие:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Решение:

$$w(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at} + bt\right].$$

⊙ *Литература*: А. Г. Бутковский (1979, стр. 54).

1.1.3-4. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},\\ w &= g(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t) = \int_0^{\infty} f(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^t g(\tau)H(x,t-\tau)\,d\tau + \int_0^t\int_0^{\infty} \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{e^{bt}}{2\sqrt{\pi a t}}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right]\right\}, \quad H(x,t) = \frac{xe^{bt}}{2\sqrt{\pi a}\,t^{3/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right).$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, А. В. Вязьмин, А. И. Журов, Д. А. Казенин (1998, стр. 44).

1.1.3-5. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Вторая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},\\ \partial_x w &= g(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t) = \int_0^{\infty} G(x,\xi,t)f(\xi)\,d\xi - a\int_0^t g(\tau)G(x,0,t-\tau)\,d\tau + \int_0^t\int_0^{\infty} \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{e^{bt}}{2\sqrt{\pi a t}}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right]\right\}.$$

1.1.3-6. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Третья краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},$$
$$\partial_x w - kw = g(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}.$$

Решение $w(x,t)$ определяется по формуле из разд. 1.1.3-5, где

$$G(x,\xi,t) = \frac{e^{bt}}{2\sqrt{\pi at}}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right] - 2k\int_0^\infty \exp\left[-\frac{(x+\xi+\eta)^2}{4at} - k\eta\right]d\eta\right\}.$$

1.1.3-7. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},$$
$$w = g_1(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)},$$
$$w = g_2(t) \quad \text{при} \quad x = l \quad \text{(граничное условие)}.$$

Решение:

$$w(x,t) = \int_0^l f(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^t\int_0^l \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau +$$
$$+ a\int_0^t g_1(\tau)H_1(x,t-\tau)\,d\tau - a\int_0^t g_2(\tau)H_2(x,t-\tau)\,d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l}e^{bt}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi\xi}{l}\right)\exp\left(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\right),$$
$$H_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,t)\Big|_{\xi=0}, \quad H_2(x,t) = \frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,t)\Big|_{\xi=l}.$$

⊙ *Литература*: А. Г. Бутковский (1979, стр. 55).

1.1.3-8. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Вторая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},$$
$$\partial_x w = g_1(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)},$$
$$\partial_x w = g_2(t) \quad \text{при} \quad x = l \quad \text{(граничное условие)}.$$

Решение:

$$w(x,t) = \int_0^l f(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^t\int_0^l \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau -$$
$$- a\int_0^t g_1(\tau)G(x,0,t-\tau)\,d\tau + a\int_0^t g_2(\tau)G(x,l,t-\tau)\,d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,t) = e^{bt}\left[\frac{1}{l} + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{n\pi\xi}{l}\right)\exp\left(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\right)\right].$$

⊙ *Литература*: А. Г. Бутковский (1979, стр. 55).

1.1.3-9. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Третья краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},$$
$$\partial_x w - k_1 w = g_1(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)},$$
$$\partial_x w + k_2 w = g_2(t) \quad \text{при} \quad x = l \quad \text{(граничное условие)}.$$

Решение $w(x,t)$ определяется по формуле из разд. 1.1.3-8, где

$$G(x,\xi,t) = e^{bt}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\|y_n\|^2}y_n(x)y_n(\xi)\exp(-a\mu_n^2 t),$$

$$y_n(x) = \cos(\mu_n x) + \frac{k_1}{\mu_n}\sin(\mu_n x), \qquad \|y_n\|^2 = \frac{k_2}{2\mu_n^2}\,\frac{\mu_n^2+k_1^2}{\mu_n^2+k_2^2} + \frac{k_1}{2\mu_n^2} + \frac{l}{2}\Bigl(1+\frac{k_1^2}{\mu_n^2}\Bigr).$$

Здесь μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\dfrac{\operatorname{tg}(\mu l)}{\mu} = \dfrac{k_1+k_2}{\mu^2-k_1k_2}$.

⊙ *Литература*: А. Г. Бутковский (1979, стр. 56).

1.1.3-10. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Смешанная краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_x w &= g_2(t) &&\text{при}\quad x=l &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(x,t) = {}&\int_0^l f(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^t\!\!\int_0^l \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau +\\ &+ a\int_0^t g_1(\tau)\Lambda(x,t-\tau)\,d\tau + a\int_0^t g_2(\tau)G(x,l,t-\tau)\,d\tau, \end{aligned}$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l}e^{bt}\sum_{n=0}^{\infty}\sin\Bigl[\frac{\pi(2n+1)x}{2l}\Bigr]\sin\Bigl[\frac{\pi(2n+1)\xi}{2l}\Bigr]\exp\Bigl[-\frac{a\pi^2(2n+1)^2t}{4l^2}\Bigr],$$

$$\Lambda(x,t) = \frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,t)\Big|_{\xi=0}.$$

1.1.4. Уравнение вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial w}{\partial x} + \Phi(x,t)$

Это уравнение встречается в одномерных нестационарных задачах конвективного массопереноса в сплошной среде, движущейся с постоянной скоростью (случай $\Phi \equiv 0$ отвечает отсутствию поглощения или выделения вещества).

1.1.4-1. Однородное уравнение (при $\Phi \equiv 0$).

1°. Частные решения:

$$\begin{aligned} w(x) &= Ae^{-\lambda x} + B, \qquad \lambda = b/a,\\ w(x,t) &= Ax + Abt + B,\\ w(x,t) &= A(x+bt)^2 + 2Aat + B,\\ w(x,t) &= A(x+bt)^3 + 6Aatx + B,\\ w(x,t) &= A\exp\bigl[(a\mu^2+b\mu)t+\mu x\bigr] + B,\\ w(x,t) &= A\frac{1}{\sqrt{t}}\exp\Bigl[-\frac{(x+bt)^2}{4at}\Bigr] + B,\\ w(x,t) &= A\exp(-a\mu^2 t)\cos(\mu x + b\mu t) + B,\\ w(x,t) &= A\exp(-a\mu^2 t)\sin(\mu x + b\mu t) + B,\\ w(x,t) &= A\exp(-\mu x)\cos\bigl[\beta x + \beta(b-2a\mu)t\bigr] + B, \qquad \beta = \sqrt{\mu^2-(b/a)\mu},\\ w(x,t) &= A\exp(-\mu x)\sin\bigl[\beta x + \beta(b-2a\mu)t\bigr] + B, \qquad \beta = \sqrt{\mu^2-(b/a)\mu},\\ w(x,t) &= A\operatorname{erf}\Bigl(\frac{x+bt}{2\sqrt{at}}\Bigr) + B,\\ w(x,t) &= A\operatorname{erfc}\Bigl(\frac{x+bt}{2\sqrt{at}}\Bigr) + B, \end{aligned}$$

где A, B, μ — произвольные постоянные.

2°. Фундаментальное решение:

$$\mathscr{E}(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \exp\Big[-\frac{(x+bt)^2}{4at}\Big].$$

1.1.4-2. Преобразования к уравнению теплопроводности. Замечание о функциях Грина.

1°. Замена

$$w(x,t) = \exp(\beta t + \mu x) u(x,t), \qquad \beta = -\frac{b^2}{4a}, \quad \mu = -\frac{b}{2a}$$

приводит к неоднородному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \exp(-\beta t - \mu x)\Phi(x,t),$$

которое подробно рассматривается в разд. 1.1.2.

2°. Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x + bt$, получим неоднородное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \Phi(z - bt, t),$$

которое рассматривается в разд. 1.1.2.

3°. Для всех первых краевых задач функцию Грина можно представить в виде

$$G_b(x,\xi,t) = \exp\Big[\frac{b}{2a}(\xi - x) - \frac{b^2}{4a}t\Big] G_0(x,\xi,t),$$

где $G_0(x,\xi,t)$ — функция Грина для уравнения теплопроводности, которое определ[illegible]чением $b = 0$.

1.1.4-3. Область: $-\infty < x < \infty$. Задача Коши.

Задано начальное условие:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Решение:

$$w(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi,\tau) G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \exp\Big[\frac{b(\xi - x)}{2a} - \frac{b^2 t}{4a} - \frac{(x-\xi)^2}{4at}\Big].$$

1.1.4-4. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},$$
$$w = g(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}.$$

Решение:

$$w(x,t) = \int_0^{\infty} f(\xi) G(x,\xi,t)\,d\xi + a\int_0^t g(\tau)\Lambda(x,t-\tau)\,d\tau + \int_0^t \int_0^{\infty} \Phi(\xi,\tau) G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \exp\Big[\frac{b(\xi - x)}{2a} - \frac{b^2 t}{4a}\Big] \Big\{\exp\Big[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\Big] - \exp\Big[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\Big]\Big\},$$

$$\Lambda(x,t) = \frac{\partial}{\partial \xi} G(x,\xi,t)\Big|_{\xi=0}.$$

1.1.4-5. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Вторая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)}, \\ \partial_x w &= g(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t) = \int_0^\infty G(x,\xi,t) f(\xi)\,d\xi - a\int_0^t g(\tau) G(x,0,t-\tau)\,d\tau + \int_0^t \int_0^\infty \Phi(\xi,\tau) G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \exp\left[\frac{b(\xi - x)}{2a} - \frac{b^2 t}{4a}\right]\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right]\right\}.$$

1.1.4-6. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Третья краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)}, \\ \partial_x w - kw &= g(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(x,t)$ определяется по формуле из разд. 1.1.4-5, где

$$\begin{aligned} G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \exp\left[\frac{b(\xi - x)}{2a} - \frac{b^2 t}{4a}\right]\biggl\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right] - \\ - 2s\int_0^\infty \exp\left[-\frac{(x+\xi+\eta)^2}{4at} - s\eta\right] d\eta\biggr\}, \qquad s = k + \frac{b}{2a}. \end{aligned}$$

1.1.4-7. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)}, \\ w &= g_1(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}, \\ w &= g_2(t) \quad \text{при} \quad x = l \quad \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(x,t) = \int_0^l f(\xi) G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^t \int_0^l \Phi(\xi,\tau) G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau + \\ + a\int_0^t g_1(\tau) H_1(x,t-\tau)\,d\tau - a\int_0^t g_2(\tau) H_2(x,t-\tau)\,d\tau, \end{aligned}$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l}\exp\left[\frac{b}{2a}(\xi - x) - \frac{b^2}{4a}t\right]\sum_{n=1}^\infty \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\sin\left(\frac{\pi n \xi}{l}\right)\exp\left(-\frac{a\pi^2 n^2}{l^2}t\right),$$

$$H_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial\xi} G(x,\xi,t)\Big|_{\xi=0}, \qquad H_2(x,t) = \frac{\partial}{\partial\xi} G(x,\xi,t)\Big|_{\xi=l}.$$

⊙ *Литература*: А. Г. Бутковский (1979, стр. 57).

1.1.4-8. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Вторая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)}, \\ \partial_x w &= g_1(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}, \\ \partial_x w &= g_2(t) \quad \text{при} \quad x = l \quad \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t) = \int_0^l f(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^t \int_0^l \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau -$$
$$- a\int_0^t g_1(\tau)G(x,0,t-\tau)\,d\tau + a\int_0^t g_2(\tau)G(x,l,t-\tau)\,d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{b}{a(e^{bl/a}-1)}\exp\Bigl(\frac{b\xi}{a}\Bigr) + \frac{2}{l}\exp\Bigl[\frac{b(\xi-x)}{2a} - \frac{b^2t}{4a}\Bigr]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n(x)y_n(\xi)}{1+\mu_n^2}\exp\Bigl(-\frac{a\pi^2n^2}{l^2}t\Bigr),$$
$$y_n(x) = \cos\Bigl(\frac{\pi n x}{l}\Bigr) + \mu_n \sin\Bigl(\frac{\pi n x}{l}\Bigr), \qquad \mu_n = \frac{bl}{2a\pi n}.$$

⊙ *Литература*: А. Г. Бутковский (1979, стр. 58).

1.1.4-9. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Третья краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_x w - k_1 w &= g_1(t) && \text{при} \quad x=0 && \text{(граничное условие)},\\ \partial_x w + k_2 w &= g_2(t) && \text{при} \quad x=l && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(x,t)$ определяется по формуле из разд. 1.1.4-8, где

$$G(x,\xi,t) = \exp\Bigl[\frac{b(\xi-x)}{2a} - \frac{b^2t}{4a}\Bigr]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{B_n}y_n(x)y_n(\xi)\exp(-a\mu_n^2 t),$$
$$y_n(x) = \cos(\mu_n x) + \frac{2ak_1+b}{2a\mu_n}\sin(\mu_n x),$$
$$B_n = \frac{2ak_2-b}{4a\mu_n^2}\,\frac{4a^2\mu_n^2+(2ak_1+b)^2}{4a^2\mu_n^2+(2ak_2-b)^2} + \frac{2ak_1+b}{4a\mu_n^2} + \frac{l}{2} + \frac{l(2ak_1+b)^2}{8a^2\mu_n^2}.$$

Здесь μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\frac{\operatorname{tg}(\mu l)}{\mu} = \frac{4a^2(k_1+k_2)}{4a^2\mu^2-(2ak_1+b)(2ak_2-b)}.$$

1.1.5. Уравнение вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial w}{\partial x} + cw + \Phi(x,t)$

При $\Phi \equiv 0$ это уравнение описывает одномерный нестационарный конвективный массоперенос с объемной химической реакцией первого порядка в движущейся с постоянной скоростью сплошной среде. Аналогичное уравнение используется для анализа соответствующих одномерных тепловых процессов в движущейся среде с объемным тепловыделением, пропорциональным температуре.

1.1.5-1. Однородное уравнение (при $\Phi \equiv 0$).

1°. Частные решения:

$$\begin{aligned} w(x,t) &= e^{ct}(Ax + Abt + B),\\ w(x,t) &= e^{ct}\bigl[A(x+bt)^2 + 2Aat + B\bigr],\\ w(x,t) &= e^{ct}\bigl[A(x+bt)^3 + 6Aatx + B\bigr],\\ w(x,t) &= Ae^{-\lambda x + ct} + Be^{ct}, \quad \lambda = b/a,\\ w(x,t) &= A\exp\bigl[(a\mu^2 + b\mu + c)t + \mu x\bigr] + Be^{ct},\\ w(x,t) &= A\frac{1}{\sqrt{t}}\exp\Bigl[-\frac{(x+bt)^2}{4at} + ct\Bigr] + Be^{ct},\\ w(x,t) &= A\exp(ct - a\mu^2 t)\cos(\mu x + b\mu t) + Be^{ct}, \end{aligned}$$

$$w(x,t) = A\exp(ct - a\mu^2 t)\sin(\mu x + b\mu t) + Be^{ct},$$
$$w(x,t) = A\exp(-\mu x)\cos\bigl[\beta x + \beta(b - 2a\mu)t\bigr], \quad \beta = \sqrt{\mu^2 - (b/a)\mu + c/a},$$
$$w(x,t) = A\exp(-\mu x)\sin\bigl[\beta x + \beta(b - 2a\mu)t\bigr], \quad \beta = \sqrt{\mu^2 - (b/a)\mu + c/a},$$
$$w(x,t) = Ae^{ct}\operatorname{erf}\Bigl(\frac{x+bt}{2\sqrt{at}}\Bigr) + Be^{ct},$$
$$w(x,t) = Ae^{ct}\operatorname{erfc}\Bigl(\frac{x+bt}{2\sqrt{at}}\Bigr) + Be^{ct},$$

где A, B, μ — произвольные постоянные.

2°. Фундаментальное решение:

$$\mathscr{E}(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\exp\Bigl[-\frac{(x+bt)^2}{4at} + ct\Bigr].$$

1.1.5-2. Преобразования к уравнению теплопроводности. Замечание о функциях Грина.

1°. Замена

$$w(x,t) = \exp(\beta t + \mu x)u(x,t), \qquad \beta = c - \frac{b^2}{4a}, \quad \mu = -\frac{b}{2a}$$

приводит к неоднородному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \exp(-\beta t - \mu x)\Phi(x,t),$$

которое подробно рассматривается в разд. 1.1.2.

2°. Преобразование

$$w(x,t) = e^{ct}v(z,t), \quad z = x + bt$$

приводит к неоднородному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + e^{-ct}\Phi(z - bt, t),$$

которое рассматривается в разд. 1.1.2.

3°. Для всех первых краевых задач функцию Грина можно представить в виде

$$G_{b,c}(x,\xi,t) = \exp\Bigl[\frac{b}{2a}(\xi - x) + \Bigl(c - \frac{b^2}{4a}\Bigr)t\Bigr]G_{0,0}(x,\xi,t),$$

где $G_{0,0}(x,\xi,t)$ — функция Грина для уравнения теплопроводности, которое соответствует значениям $b = c = 0$.

1.1.5-3. Область: $-\infty < x < \infty$. Задача Коши.

Задано начальное условие:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Решение:

$$w(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\exp\Bigl[\frac{b}{2a}(\xi - x) + \Bigl(c - \frac{b^2}{4a}\Bigr)t - \frac{(x-\xi)^2}{4at}\Bigr].$$

1.1.5-4. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},$$
$$w = g(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}.$$

Решение:

$$w(x,t) = \int_0^\infty f(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + a\int_0^t g(\tau)\Lambda(x,t-\tau)\,d\tau + \int_0^t\int_0^\infty \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\exp\left[\frac{b(\xi-x)}{2a} + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)t\right]\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right]\right\},$$

$$\Lambda(x,t) = \frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,t)\Big|_{\xi=0}.$$

1.1.5-5. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Вторая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},\\ \partial_x w &= g(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t) = \int_0^\infty G(x,\xi,t)f(\xi)\,d\xi - a\int_0^t g(\tau)G(x,0,t-\tau)\,d\tau + \int_0^t\int_0^\infty \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\exp\left[\frac{b(\xi-x)}{2a} + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)t\right]\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right]\right\}.$$

1.1.5-6. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Третья краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},\\ \partial_x w - kw &= g(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(x,t)$ определяется по формуле из разд. 1.1.5-5, где

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\exp\left[\frac{b(\xi-x)}{2a} + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)t\right]\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right] - \right.$$
$$\left. - 2s\int_0^\infty \exp\left[-\frac{(x+\xi+\eta)^2}{4at} - s\eta\right]d\eta\right\}, \qquad s = k + \frac{b}{2a}.$$

1.1.5-7. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)},\\ w &= g_2(t) \quad \text{при} \quad x = l \quad \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(x,t) = \int_0^l f(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^t\int_0^l \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau\, +\\ + a\int_0^t g_1(\tau)H_1(x,t-\tau)\,d\tau - a\int_0^t g_2(\tau)H_2(x,t-\tau)\,d\tau, \end{aligned}$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l}\exp\left[\frac{b(\xi-x)}{2a} + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)t\right]\sum_{n=1}^\infty \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\sin\left(\frac{\pi n \xi}{l}\right)\exp\left(-\frac{a\pi^2 n^2}{l^2}t\right),$$

$$H_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,t)\Big|_{\xi=0}, \quad H_2(x,t) = \frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,t)\Big|_{\xi=l}.$$

⊙ *Литература*: А. Г. Бутковский (1979, стр. 59).

1.1.5-8. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Вторая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x) &&\text{при} \quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_x w &= g_1(t) &&\text{при} \quad x = 0 &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_x w &= g_2(t) &&\text{при} \quad x = l &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(x,t) = \int_0^l f(\xi) G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^t \int_0^l \Phi(\xi,\tau) G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau -\\ - a\int_0^t g_1(\tau) G(x,0,t-\tau)\,d\tau + a\int_0^t g_2(\tau) G(x,l,t-\tau)\,d\tau, \end{aligned}$$

где

$$G(x,\xi,t) = A\exp\Bigl(\frac{b\xi}{a} + ct\Bigr) + \frac{2}{l}\exp\Bigl[\frac{b(\xi-x)}{2a} + \Bigl(c - \frac{b^2}{4a}\Bigr)t\Bigr] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n(x) y_n(\xi)}{1+\mu_n^2} \exp\Bigl(-\frac{a\pi^2 n^2}{l^2} t\Bigr),$$

$$A = \frac{b}{a(e^{bl/a} - 1)}, \quad y_n(x) = \cos\Bigl(\frac{\pi n x}{l}\Bigr) + \mu_n \sin\Bigl(\frac{\pi n x}{l}\Bigr), \quad \mu_n = \frac{bl}{2a\pi n}.$$

⊙ *Литература*: А. Г. Бутковский (1979, стр. 60).

1.1.5-9. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Третья краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x) &&\text{при} \quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_x w - k_1 w &= g_1(t) &&\text{при} \quad x = 0 &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_x w + k_2 w &= g_2(t) &&\text{при} \quad x = l &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(x,t)$ определяется по формуле из разд. 1.1.5-8, где

$$G(x,\xi,t) = \exp\Bigl[\frac{b(\xi-x)}{2a} + \Bigl(c - \frac{b^2}{4a}\Bigr)t\Bigr] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{B_n} y_n(x) y_n(\xi) \exp(-a\mu_n^2 t),$$

$$y_n(x) = \cos(\mu_n x) + \frac{2ak_1 + b}{2a\mu_n}\sin(\mu_n x),$$

$$B_n = \frac{2ak_2 - b}{4a\mu_n^2}\,\frac{4a^2\mu_n^2 + (2ak_1+b)^2}{4a^2\mu_n^2 + (2ak_2-b)^2} + \frac{2ak_1+b}{4a\mu_n^2} + \frac{l}{2} + \frac{l(2ak_1+b)^2}{8a^2\mu_n^2}.$$

Здесь μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\frac{\operatorname{tg}(\mu l)}{\mu} = \frac{4a^2(k_1+k_2)}{4a^2\mu^2 - (2ak_1+b)(2ak_2-b)}.$$

1.2. Одномерное уравнение теплопроводности с осевой и центральной симметрией

1.2.1. Уравнение вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a\Bigl(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\Bigr)$

Уравнение теплопроводности, описывающее одномерные нестационарные тепловые процессы с осевой симметрией. Его часто записывают в эквивалентном виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{a}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Bigl(r\frac{\partial w}{\partial r}\Bigr), \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Аналогичное уравнение используется для анализа соответствующих одномерных нестационарных диффузионных процессов.

1.2.1-1. Частные решения (A, B, μ — произвольные постоянные):

$$
\begin{aligned}
w(r) &= A + B\ln r,\\
w(r,t) &= A + B(r^2 + 4at),\\
w(r,t) &= A + B(r^4 + 16atr^2 + 32a^2t^2),\\
w(r,t) &= A + B\biggl(r^{2n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{4^k\bigl[n(n-1)\dots(n-k+1)\bigr]^2}{k!}(at)^k r^{2n-2k}\biggr),\\
w(r,t) &= A + B\bigl(4at\ln r + r^2\ln r - r^2\bigr),\\
w(r,t) &= A + \frac{B}{t}\exp\Bigl(-\frac{r^2}{4at}\Bigr),\\
w(r,t) &= A + B\int_1^{\zeta} e^{-z}\frac{dz}{z},\quad \zeta = \frac{r^2}{4at},\\
w(r,t) &= A + B\exp(-a\mu^2 t)J_0(\mu r),\\
w(r,t) &= A + B\exp(-a\mu^2 t)Y_0(\mu r),\\
w(r,t) &= A + \frac{B}{t}\exp\Bigl(-\frac{r^2+\mu^2}{4t}\Bigr)I_0\Bigl(\frac{\mu r}{2t}\Bigr),\\
w(r,t) &= A + \frac{B}{t}\exp\Bigl(-\frac{r^2+\mu^2}{4t}\Bigr)K_0\Bigl(\frac{\mu r}{2t}\Bigr),
\end{aligned}
$$

где n — произвольное положительное целое число, $J_0(z)$ и $Y_0(z)$ — функции Бесселя, $I_0(z)$ и $K_0(z)$ — модифицированные функции Бесселя.

Пусть $w = w(r,t)$ — некоторое решение исходного уравнения. Тогда функции

$$
\begin{aligned}
w_1 &= Aw(\pm\lambda r,\ \lambda^2 t + C),\\
w_2 &= \frac{A}{\delta+\beta t}\exp\Bigl[-\frac{\beta r^2}{4a(\delta+\beta t)}\Bigr]w\Bigl(\pm\frac{r}{\delta+\beta t},\ \frac{\gamma+\lambda t}{\delta+\beta t}\Bigr),\qquad \lambda\delta - \beta\gamma = 1,
\end{aligned}
$$

где A, C, β, δ, λ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения. Вторая формула обычно встречается при $\beta = 1$, $\gamma = -1$, $\delta = \lambda = 0$.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, А. В. Вязьмин, А. И. Журов, Д. А. Казенин (1998, стр. 50).

1.2.1-2. Частные решения в виде бесконечного ряда.

1°. Решение, содержащее произвольную функцию координаты:

$$
w(r,t) = f(r) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(at)^n}{n!}\boldsymbol{L}^n\bigl[f(r)\bigr],\qquad \boldsymbol{L} \equiv \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr},
$$

где $f(r)$ — любая бесконечно дифференцируемая функция. Это решение удовлетворяет начальному условию $w(r,0) = f(r)$. Сумма будет конечной, если $f(r)$ является полиномом, который содержит только четные степени.

2°. Решение, содержащее произвольную функцию времени:

$$
w(r,t) = g(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4a)^n(n!)^2}r^{2n}g_t^{(n)}(t),
$$

где $g(t)$ — любая бесконечно дифференцируемая функция. Это решение ограничено при $r = 0$ и обладает следующими свойствами:

$$
w(0,t) = g(t),\qquad \partial_r w(0,t) = 0.
$$

1.2.1-3. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Первая краевая задача.

Рассматривается круг. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f(r) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\
w &= g(t) &&\text{при}\quad r = R &&\text{(граничное условие)},\\
|w| &\neq \infty &&\text{при}\quad r = 0 &&\text{(условие ограниченности)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$w(r,t) = \int_0^R f(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi - a\int_0^t g(\tau)\Lambda(r,t-\tau)\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\xi}{R^2 J_1^2(\mu_n)} J_0\Big(\mu_n\frac{r}{R}\Big) J_0\Big(\mu_n\frac{\xi}{R}\Big)\exp\Big(-\frac{a\mu_n^2 t}{R^2}\Big), \quad \Lambda(r,t) = \frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\xi,t)\Big|_{\xi=R},$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $J_0(\mu) = 0$. Приведем численные значения первых десяти корней (с точностью до четвертого знака после запятой):

$$\mu_1 = 2{,}4048;\quad \mu_2 = 5{,}5201;\quad \mu_3 = 8{,}6537;\quad \mu_4 = 11{,}7915;\quad \mu_5 = 14{,}9309;$$
$$\mu_6 = 18{,}0711;\quad \mu_7 = 21{,}2116;\quad \mu_8 = 24{,}3525;\quad \mu_9 = 27{,}4935;\quad \mu_{10} = 30{,}6346.$$

Приближенные значения нулей функции Бесселя $J_0(\mu_n) = 0$ можно вычислять по формуле

$$\mu_n = 2{,}4 + 3{,}13(n-1) \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

максимальная погрешность которой составляет около 0,3%. При $n \to \infty$ имеем $\mu_{n+1} - \mu_n \to \pi$.

Пример 1. Начальная температура цилиндра одинакова, $f(r) = w_0$. На поверхности поддерживается постоянная температура, $g(t) = w_R$.

Решение:

$$\frac{w(r,t) - w_R}{w_0 - w_R} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n J_1(\mu_n)} \exp\Big(-\mu_n^2\frac{at}{R^2}\Big) J_0\Big(\mu_n\frac{r}{R}\Big).$$

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 198), А. В. Лыков (1967, стр. 121–122).

1.2.1-4. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Вторая краевая задача.

Рассматривается круг. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_r w &= g(t) && \text{при} \quad r = R && \text{(граничное условие)},\\ |w| &\neq \infty && \text{при} \quad r = 0 && \text{(условие ограниченности)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,t) = \int_0^R f(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi + a\int_0^t g(\tau)G(r,R,t-\tau)\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\xi,t) = \frac{2}{R^2}\xi + \frac{2}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi}{J_0^2(\mu_n)} J_0\Big(\frac{\mu_n r}{R}\Big) J_0\Big(\frac{\mu_n\xi}{R}\Big)\exp\Big(-\frac{a\mu_n^2 t}{R^2}\Big),$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $J_1(\mu) = 0$. Приведем численные значения первых десяти корней (с точностью до четвертого знака после запятой):

$$\mu_1 = 3{,}8317;\quad \mu_2 = 7{,}0156;\quad \mu_3 = 10{,}1735;\quad \mu_4 = 13{,}3237;\quad \mu_5 = 16{,}4706;$$
$$\mu_6 = 19{,}6159;\quad \mu_7 = 22{,}7601;\quad \mu_8 = 25{,}9037;\quad \mu_9 = 29{,}0468;\quad \mu_{10} = 32{,}1897.$$

При $n \to \infty$ имеем $\mu_{n+1} - \mu_n \to \pi$.

Пример 2. Начальная температура цилиндра одинакова, $f(r) = w_0$. На поверхности задан постоянный тепловой поток, $g(t) = g_R$.

Решение:

$$w(r,t) = w_0 + g_R R\Big[2\frac{at}{R^2} - \frac{1}{4} + \frac{r^2}{2R^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n^2 J_0(\mu_n)} \exp\Big(-\mu_n^2\frac{at}{R^2}\Big) J_0\Big(\mu_n\frac{r}{R}\Big)\Big].$$

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 201), А. В. Лыков (1967, стр. 176).

1.2.1-5. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Третья краевая задача.

Рассматривается круг. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_r w + kw &= g(t) && \text{при} \quad r = R && \text{(граничное условие)},\\ |w| &\neq \infty && \text{при} \quad r = 0 && \text{(условие ограниченности)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,t) = \int_0^R f(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi + a\int_0^t g(\tau)G(r,R,t-\tau)\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\xi,t) = \frac{2}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2\xi}{(k^2R^2+\mu_n^2)J_0^2(\mu_n)} J_0\Bigl(\frac{\mu_n r}{R}\Bigr) J_0\Bigl(\frac{\mu_n \xi}{R}\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{a\mu_n^2 t}{R^2}\Bigr),$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\mu J_1(\mu) - kRJ_0(\mu) = 0.$$

Численные значения первых шести корней μ_n приведены в книге Г. Карслоу, Д. Егера (1964, стр. 482).

Пример 3. Начальная температура цилиндра одинакова, $f(r) = w_0$. Температура контактирующей среды постоянна и равна w_R [это соответствует $g(t) = kw_R$].

Решение:

$$\frac{w(r,t)-w_0}{w_R-w_0} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\Bigl(-\frac{a\mu_n^2 t}{R^2}\Bigr) J_0\Bigl(\frac{\mu_n r}{R}\Bigr), \quad A_n = \frac{2kR}{(k^2R^2+\mu_n^2)J_0(\mu_n)}.$$

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 199–200), А. В. Лыков (1967, стр. 164), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 93, 467).

1.2.1-6. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. Первая краевая задача.

Рассматривается кольцевая область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(t) && \text{при} \quad r = R_1 && \text{(граничное условие)},\\ w &= g_2(t) && \text{при} \quad r = R_2 && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,t) = \int_{R_1}^{R_2} f(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi + a\int_0^t g_1(\tau)\Lambda_1(r,t-\tau)\,d\tau - a\int_0^t g_2(\tau)\Lambda_2(r,t-\tau)\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\xi,t) = \frac{\pi^2}{2R_1^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2 J_0^2(s\mu_n)\xi}{J_0^2(\mu_n)-J_0^2(s\mu_n)}\Psi_n(r)\Psi_n(\xi)\exp\Bigl(-\frac{a\mu_n^2 t}{R_1^2}\Bigr),$$

$$\Psi_n(r) = Y_0(\mu_n)J_0\Bigl(\frac{\mu_n r}{R_1}\Bigr) - J_0(\mu_n)Y_0\Bigl(\frac{\mu_n r}{R_1}\Bigr), \qquad s = \frac{R_2}{R_1},$$

$$\Lambda_1(r,t) = \frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\xi,t)\Big|_{\xi=R_1}, \quad \Lambda_2(r,t) = \frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\xi,t)\Big|_{\xi=R_2},$$

где $J_0(z)$ и $Y_0(z)$ — функция Бесселя, μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_0(\mu)Y_0(s\mu) - J_0(s\mu)Y_0(\mu) = 0.$$

Численные значения первых пяти корней $\mu_n = \mu_n(s)$ в диапазоне $1{,}4 \leqslant s \leqslant 4{,}0$ приведены в книге Г. Карслоу, Д. Егера (1964, стр. 482). См. также М. Абрамовиц, И. Стиган (1979, стр. 233).

Пример 4. Начальная температура полого цилиндра равна нулю, $f(r) = 0$. На его внутренней и внешней поверхностях поддерживаются постоянные температуры: $g_1(t) = w_1$, $g_2(t) = w_2$.

Решение:

$$w(r,t) = \frac{1}{\ln s}\Bigl(w_1\ln\frac{R_2}{r} + w_2\ln\frac{r}{R_1}\Bigr) - \pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\mu_n)\bigl[w_2J_0(\mu_n) - w_1J_0(s\mu_n)\bigr]}{J_0^2(\mu_n)-J_0^2(s\mu_n)}\exp\Bigl(-\frac{a\mu_n^2 t}{R_1^2}\Bigr)\Psi_n(r).$$

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 204).

1.2.1-7. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. Вторая краевая задача.

Рассматривается кольцевая область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_r w &= g_1(t) &&\text{при}\quad r = R_1 &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_r w &= g_2(t) &&\text{при}\quad r = R_2 &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,t) = \int_{R_1}^{R_2} f(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi - a\int_0^t g_1(\tau)G(r,R_1,t-\tau)\,d\tau + a\int_0^t g_2(\tau)G(r,R_2,t-\tau)\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\xi,t) = \frac{2\xi}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{\pi^2}{2R_1^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2 J_1^2(s\mu_n)\xi}{J_1^2(\mu_n) - J_1^2(s\mu_n)}\Psi_n(r)\Psi_n(\xi)\exp\Bigl(-\frac{a\mu_n^2 t}{R_1^2}\Bigr),$$

$$\Psi_n(r) = Y_1(\mu_n)J_0\Bigl(\frac{\mu_n r}{R_1}\Bigr) - J_1(\mu_n)Y_0\Bigl(\frac{\mu_n r}{R_1}\Bigr), \quad s = \frac{R_2}{R_1},$$

где $J_k(z)$ и $Y_k(z)$ — функции Бесселя ($k = 0,\ 1$); μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_1(\mu)Y_1(s\mu) - J_1(s\mu)Y_1(\mu) = 0.$$

Численные значения первых пяти корней $\mu_n = \mu_n(s)$ приведены в книге М. Абрамовица, И. Стиган (1979, стр. 233).

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 363), А. В. Лыков (1967, стр. 178).

1.2.1-8. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. Третья краевая задача.

Рассматривается кольцевая область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_r w - k_1 w &= g_1(t) &&\text{при}\quad r = R_1 &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_r w + k_2 w &= g_2(t) &&\text{при}\quad r = R_2 &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,t) = \int_{R_1}^{R_2} f(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi - a\int_0^t g_1(\tau)G(r,R_1,t-\tau)\,d\tau + a\int_0^t g_2(\tau)G(r,R_2,t-\tau)\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\xi,t) = \frac{\pi^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n^2}{B_n}\bigl[k_2 J_0(\lambda_n R_2) - \lambda_n J_1(\lambda_n R_2)\bigr]^2 \xi H_n(r)H_n(\xi)\exp(-a\lambda_n^2 t),$$

где

$$B_n = (\lambda_n^2 + k_2^2)\bigl[k_1 J_0(\lambda_n R_1) + \lambda_n J_1(\lambda_n R_1)\bigr]^2 - (\lambda_n^2 + k_1^2)\bigl[k_2 J_0(\lambda_n R_2) - \lambda_n J_1(\lambda_n R_2)\bigr]^2,$$

$$H_n(r) = \bigl[k_1 Y_0(\lambda_n R_1) + \lambda_n Y_1(\lambda_n R_1)\bigr]J_0(\lambda_n r) - \bigl[k_1 J_0(\lambda_n R_1) + \lambda_n J_1(\lambda_n R_1)\bigr]Y_0(\lambda_n r);$$

λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\begin{aligned} &\bigl[k_1 J_0(\lambda R_1) + \lambda J_1(\lambda R_1)\bigr]\bigl[k_2 Y_0(\lambda R_2) - \lambda Y_1(\lambda R_2)\bigr] -\\ &\qquad - \bigl[k_2 J_0(\lambda R_2) - \lambda J_1(\lambda R_2)\bigr]\bigl[k_1 Y_0(\lambda R_1) + \lambda Y_1(\lambda R_1)\bigr] = 0. \end{aligned}$$

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 363), А. В. Лыков (1967, стр. 255).

1.2.1-9. Область: $0 \leqslant r < \infty$. Задача типа Коши.

Эта задача встречается в теории диффузионного следа за каплей и твердой частицей.

Ограниченное решение рассматриваемого уравнения с начальным условием

$$w = f(r) \quad \text{при} \quad t = 0$$

имеет вид

$$w(r,t) = \frac{1}{2a}\int_0^{\infty}\frac{\xi}{t}\exp\Bigl(-\frac{r^2+\xi^2}{4at}\Bigr)I_0\Bigl(\frac{r\xi}{2at}\Bigr)f(\xi)\,d\xi,$$

где $I_0(\xi)$ — модифицированная функция Бесселя.

⊙ *Литература*: W. G. L. Sutton (1943), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 103, 506), Ю. П. Гупало, А. Д. Полянин, Ю. С. Рязанцев (1985, стр. 29).

1.2.1-10. Область: $R \leqslant r < \infty$. Третья краевая задача.

Рассматривается внешняя область круга. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}, \\ \partial_r w - kw &= g(t) && \text{при} \quad r = R && \text{(граничное условие)}, \\ |w| &\neq \infty && \text{при} \quad r \to \infty && \text{(условие ограниченности)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,t) = \int_R^\infty f(\xi) G(r,\xi,t)\,d\xi - a\int_0^t g(\tau) G(r,R,t-\tau)\,d\tau,$$

где

$$G(r,\xi,t) = \xi \int_0^\infty \exp(-au^2 t) F(r,u) F(\xi,u) u\,du,$$

$$F(r,u) = \frac{J_0(ur)\bigl[uY_1(uR) + kY_0(uR)\bigr] - Y_0(ur)\bigl[uJ_1(uR) + kJ_0(uR)\bigr]}{\sqrt{\bigl[uJ_1(uR) + kJ_0(uR)\bigr]^2 + \bigl[uY_1(uR) + kY_0(uR)\bigr]^2}}.$$

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 363).

1.2.2. Уравнение вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\Bigl(\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r}\Bigr) + \Phi(r,t)$

Это уравнение встречается в задачах теплопроводности с тепловыделением (функция Φ пропорциональна количеству тепла, выделяемому в единицу времени в рассматриваемом объеме). Оно описывает развитие одномерных нестационарных тепловых процессов с осевой симметрией.

1.2.2-1. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Первая краевая задача.

Рассматривается круг. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}, \\ w &= g(t) && \text{при} \quad r = R && \text{(граничное условие)}, \\ |w| &\neq \infty && \text{при} \quad r = 0 && \text{(условие ограниченности)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,t) = \int_0^R f(\xi) G(r,\xi,t)\,d\xi - a\int_0^t g(\tau)\Lambda(r,t-\tau)\,d\tau + \int_0^t\!\!\int_0^R \Phi(\xi,\tau) G(r,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где

$$G(r,\xi,t) = \sum_{n=1}^\infty \frac{2\xi}{R^2 J_1^2(\mu_n)} J_0\Bigl(\mu_n \frac{r}{R}\Bigr) J_0\Bigl(\mu_n \frac{\xi}{R}\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{a\mu_n^2 t}{R^2}\Bigr), \quad \Lambda(r,t) = \frac{\partial}{\partial \xi} G(r,\xi,t)\Big|_{\xi=R}.$$

Здесь μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $J_0(\mu) = 0$ (численные значения первых десяти корней μ_n указаны в разд. 1.2.1-3).

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 197–199).

1.2.2-2. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Вторая краевая задача.

Рассматривается круг. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}, \\ \partial_r w &= g(t) && \text{при} \quad r = R && \text{(граничное условие)}, \\ |w| &\neq \infty && \text{при} \quad r = 0 && \text{(условие ограниченности)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,t) = \int_0^R f(\xi) G(r,\xi,t)\,d\xi + a\int_0^t g(\tau) G(r,R,t-\tau)\,d\tau + \int_0^t\!\!\int_0^R \Phi(\xi,\tau) G(r,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\xi,t) = \frac{2}{R^2}\xi + \frac{2}{R^2}\sum_{n=1}^\infty \frac{\xi}{J_0^2(\mu_n)} J_0\Bigl(\frac{\mu_n r}{R}\Bigr) J_0\Bigl(\frac{\mu_n \xi}{R}\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{a\mu_n^2 t}{R^2}\Bigr),$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $J_1(\mu) = 0$ (численные значения первых десяти корней μ_n указаны в разд. 1.2.1-4).

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 201), А. В. Лыков (1967, стр. 341).

1.2.2-3. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Третья краевая задача.

Рассматривается круг. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w = f(r) &\quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},\\ \partial_r w + kw = g(t) &\quad \text{при} \quad r = R \quad \text{(граничное условие)},\\ |w| \neq \infty &\quad \text{при} \quad r = 0 \quad \text{(условие ограниченности)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,t) = \int_0^R f(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi + a\int_0^t g(\tau)G(r,R,t-\tau)\,d\tau + \int_0^t\int_0^R \Phi(\xi,\tau)G(r,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\xi,t) = \frac{2}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2\xi}{(k^2R^2+\mu_n^2)J_0^2(\mu_n)}J_0\Big(\frac{\mu_n r}{R}\Big)J_0\Big(\frac{\mu_n\xi}{R}\Big)\exp\Big(-\frac{a\mu_n^2 t}{R^2}\Big),$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\mu J_1(\mu) - kRJ_0(\mu) = 0.$$

Численные значения первых шести корней μ_n приведены в книге Г. Карслоу, Д. Егера (1964, стр. 482).

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 199–200), А. В. Лыков (1967, стр. 164).

1.2.2-4. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. Первая краевая задача.

Рассматривается кольцевая область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w = f(r) &\quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},\\ w = g_1(t) &\quad \text{при} \quad r = R_1 \quad \text{(граничное условие)},\\ w = g_2(t) &\quad \text{при} \quad r = R_2 \quad \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,t) = \int_{R_1}^{R_2} f(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi + \int_0^t\int_{R_1}^{R_2}\Phi(\xi,\tau)G(r,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau +\\ + a\int_0^t g_1(\tau)\Lambda_1(r,t-\tau)\,d\tau - a\int_0^t g_2(\tau)\Lambda_2(r,t-\tau)\,d\tau. \end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty}A_n\xi\Psi_n(r)\Psi_n(\xi)\exp\Big(-\frac{a\mu_n^2 t}{R_1^2}\Big),\quad \Lambda_1(r,t) = \frac{\partial G}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=R_1},\quad \Lambda_2(r,t) = \frac{\partial G}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=R_2},$$

$$A_n = \frac{\pi^2\mu_n^2J_0^2(s\mu_n)}{2R_1^2\big[J_0^2(\mu_n)-J_0^2(s\mu_n)\big]},\quad \Psi_n(r) = Y_0(\mu_n)J_0\Big(\frac{\mu_n r}{R_1}\Big) - J_0(\mu_n)Y_0\Big(\frac{\mu_n r}{R_1}\Big),\quad s = \frac{R_2}{R_1},$$

где $J_0(z)$ и $Y_0(z)$ — функции Бесселя, μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_0(\mu)Y_0(s\mu) - J_0(s\mu)Y_0(\mu) = 0.$$

Численные значения первых пяти корней $\mu_n = \mu_n(s)$ в диапазоне $1{,}4 \leqslant s \leqslant 4{,}0$ приведены в книге Г. Карслоу, Д. Егера (1964, стр. 482).

1.2.2-5. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. Вторая краевая задача.

Рассматривается кольцевая область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w = f(r) &\quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},\\ \partial_r w = g_1(t) &\quad \text{при} \quad r = R_1 \quad \text{(граничное условие)},\\ \partial_r w = g_2(t) &\quad \text{при} \quad r = R_2 \quad \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,t) = \int_{R_1}^{R_2} f(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi + \int_0^t \int_{R_1}^{R_2} \Phi(\xi,\tau)G(r,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau -$$
$$- a\int_0^t g_1(\tau)G(r,R_1,t-\tau)\,d\tau + a\int_0^t g_2(\tau)G(r,R_2,t-\tau)\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\xi,t) = \frac{2\xi}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{\pi^2}{2R_1^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2 J_1^2(s\mu_n)\xi}{J_1^2(\mu_n) - J_1^2(s\mu_n)} \Psi_n(r)\Psi_n(\xi)\exp\left(-\frac{a\mu_n^2 t}{R_1^2}\right),$$
$$\Psi_n(r) = Y_1(\mu_n)J_0\left(\frac{\mu_n r}{R_1}\right) - J_1(\mu_n)Y_0\left(\frac{\mu_n r}{R_1}\right), \quad s = \frac{R_2}{R_1},$$

где $J_k(z)$ и $Y_k(z)$ — функции Бесселя ($k=0,\ 1$); μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_1(\mu)Y_1(s\mu) - J_1(s\mu)Y_1(\mu) = 0.$$

Численные значения первых пяти корней $\mu_n = \mu_n(s)$ приведены в книге М. Абрамовица, И. Стиган (1979, стр. 233).

1.2.2-6. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. Третья краевая задача.

Рассматривается кольцевая область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_r w - k_1 w &= g_1(t) && \text{при} \quad r = R_1 && \text{(граничное условие)},\\ \partial_r w + k_2 w &= g_2(t) && \text{при} \quad r = R_2 && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение дается формулой из разд. 1.2.1-8 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t \int_{R_1}^{R_2} \Phi(\xi,\tau)G(r,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

1.2.2-7. Область: $0 \leqslant r < \infty$. Задача типа Коши.

Ограниченное решение данного уравнения с начальным условием

$$w = f(r) \quad \text{при} \quad t = 0$$

дается формулами

$$w(r,t) = \int_0^{\infty} G(r,\xi,t)f(\xi)\,d\xi + \int_0^t \int_0^{\infty} G(r,\xi,t-\tau)\Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,$$
$$G(r,\xi,t) = \frac{\xi}{2at}\exp\left(-\frac{r^2+\xi^2}{4at}\right)I_0\left(\frac{r\xi}{2at}\right),$$

где $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя.

⊙ *Литература*: W. G. L. Sutton (1943), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 103, 506).

1.2.2-8. Область: $R \leqslant r < \infty$. Третья краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_r w - kw &= g(t) && \text{при} \quad r = R && \text{(граничное условие)},\\ |w| &\neq \infty && \text{при} \quad r \to \infty && \text{(условие ограниченности)}. \end{aligned}$$

Решение дается формулой из разд. 1.2.1-10 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t \int_R^{\infty} \Phi(\xi,\tau)G(r,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

1.2.3. Уравнение вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)$

Уравнение теплопроводности, описывающее одномерные нестационарные тепловые процессы с центральной симметрией. Его часто записывают в эквивалентном виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{a}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial w}{\partial r}\right), \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Аналогичное уравнение используется для анализа соответствующих одномерных нестационарных диффузионных процессов.

1.2.3-1. Частные решения (A, B, μ — произвольные постоянные):

$$w(r) = A + B\frac{1}{r},$$
$$w(r,t) = A + B(r^2 + 6at),$$
$$w(r,t) = A + B(r^4 + 20atr^2 + 60a^2t^2),$$
$$w(r,t) = A + B\left[r^{2n} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(2n+1)(2n)\dots(2n-2k+2)}{k!}(at)^k r^{2n-2k}\right],$$
$$w(r,t) = A + 2aB\frac{t}{r} + Br,$$
$$w(r,t) = Ar^{-1}\exp(a\mu^2 t \pm \mu r) + B,$$
$$w(r,t) = A + \frac{B}{t^{3/2}}\exp\left(-\frac{r^2}{4at}\right),$$
$$w(r,t) = A + \frac{B}{r\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{r^2}{4at}\right),$$
$$w(r,t) = Ar^{-1}\exp(-a\mu^2 t)\cos(\mu r) + B,$$
$$w(r,t) = Ar^{-1}\exp(-a\mu^2 t)\sin(\mu r) + B,$$
$$w(r,t) = Ar^{-1}\exp(-\mu r)\cos(\mu r - 2a\mu^2 t) + B,$$
$$w(r,t) = Ar^{-1}\exp(-\mu r)\sin(\mu r - 2a\mu^2 t) + B,$$
$$w(r,t) = \frac{A}{r}\operatorname{erf}\left(\frac{r}{2\sqrt{at}}\right) + B,$$
$$w(r,t) = \frac{A}{r}\operatorname{erfc}\left(\frac{r}{2\sqrt{at}}\right) + B,$$

где n — произвольное положительное целое число.

1.2.3-2. Преобразование к уравнению с постоянными коэффициентами. Некоторые формулы.

1°. Замена $u(r,t) = rw(r,t)$ приводит исходное уравнение с переменными коэффициентами к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial r^2},$$

которое подробно рассматривается в разд. 1.1.1.

2°. Пусть $w = w(r,t)$ — некоторое решение исходного уравнения. Тогда функции

$$w_1 = Aw(\pm\lambda r,\ \lambda^2 t + C),$$
$$w_2 = \frac{A}{|\delta+\beta t|^{3/2}}\exp\left[-\frac{\beta r^2}{4a(\delta+\beta t)}\right]w\left(\pm\frac{r}{\delta+\beta t},\ \frac{\gamma+\lambda t}{\delta+\beta t}\right), \qquad \lambda\delta - \beta\gamma = 1,$$

где A, C, β, δ, λ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения. Вторая формула обычно встречается при $\beta = 1$, $\gamma = -1$, $\delta = \lambda = 0$.

1.2.3-3. Частные решения в виде бесконечного ряда.

1°. Решение, содержащее произвольную функцию координаты:

$$w(r,t) = f(r) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(at)^n}{n!}\boldsymbol{L}^n\big[f(r)\big], \qquad \boldsymbol{L} \equiv \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr},$$

где $f(r)$ — любая бесконечно дифференцируемая функция. Это решение удовлетворяет начальному условию $w(r,0) = f(r)$. Сумма будет конечной, если $f(r)$ является полиномом, который содержит только четные степени.

2°. Решение, содержащее произвольную функцию времени:

$$w(r,t) = g(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n (2n+1)!} r^{2n} g_t^{(n)}(t),$$

где $g(t)$ — любая бесконечно дифференцируемая функция времени. Это решение ограничено при $r = 0$ и обладает следующими свойствами:

$$w(0,t) = g(t), \qquad \partial_r w(0,t) = 0.$$

1.2.3-4. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Первая краевая задача.

Рассматривается сферическая область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} &w = f(r) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ &w = g(t) && \text{при} \quad r = R && \text{(граничное условие)},\\ &|w| \neq \infty && \text{при} \quad r = 0 && \text{(условие ограниченности)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,t) = \frac{2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sin\Bigl(\frac{\pi n r}{R}\Bigr) \exp\Bigl(-\frac{a\pi^2 n^2 t}{R^2}\Bigr) M_n(t),$$

где

$$M_n(t) = \int_0^R \xi f(\xi) \sin\Bigl(\frac{\pi n \xi}{R}\Bigr)\, d\xi - (-1)^n a\pi n \int_0^t g(\tau) \exp\Bigl(\frac{a\pi^2 n^2 \tau}{R^2}\Bigr)\, d\tau.$$

Замечание. Используя соотношение для суммы бесконечного ряда [см. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев (1981, стр. 726)]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nz}{n} = \frac{z}{2} \qquad (-\pi < z < \pi),$$

можно преобразовать решение к следующему виду:

$$w(r,t) = g(t) + \frac{2}{Rr} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\lambda_n r) \exp(-a\lambda_n^2 t) H_n(t), \qquad \lambda_n = \frac{\pi n}{R},$$

где

$$\begin{aligned} H_n(t) &= \int_0^R \xi f(\xi) \sin(\lambda_n \xi)\, d\xi + (-1)^n \frac{R}{\lambda_n} g(t) \exp(a\lambda_n^2 t) - (-1)^n a\pi n \int_0^t g(\tau) \exp(a\lambda_n^2 \tau)\, d\tau = \\ &= \int_0^R \xi f(\xi) \sin(\lambda_n \xi)\, d\xi + (-1)^n \frac{R}{\lambda_n} g(0) + (-1)^n \frac{R}{\lambda_n} \int_0^t g'_\tau(\tau) \exp(a\lambda_n^2 \tau)\, d\tau. \end{aligned}$$

Пример 1. Начальная температура шара одинакова, $f(r) = w_0$. На его поверхности поддерживается постоянная температура, $g(t) = w_R$.

Решение:

$$\frac{w(r,t) - w_R}{w_0 - w_R} = \frac{2R}{\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\Bigl(\frac{\pi n r}{R}\Bigr) \exp\Bigl(-\frac{a\pi^2 n^2 t}{R^2}\Bigr).$$

Зависимость средней температуры $\overline{w}$ от времени t:

$$\frac{\overline{w} - w_R}{w_0 - w_R} = \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp\Bigl(-\frac{a\pi^2 n^2 t}{R^2}\Bigr), \qquad \overline{w} = \frac{1}{V} \int_v w\, dv,$$

где $V = \int_v dv$ — объем шара радиуса R.

⊙ *Литература:* Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 230), А. В. Лыков (1967, стр. 107).

1.2.3-5. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Вторая краевая задача.

Рассматривается сферическая область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_r w &= g(t) &&\text{при}\quad r = R &&\text{(граничное условие)},\\ |w| &\neq \infty &&\text{при}\quad r = 0 &&\text{(условие ограниченности)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,t) = \int_0^R f(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi + a\int_0^t g(\tau)G(r,R,t-\tau)\,d\tau,$$

где

$$G(r,\xi,t) = \frac{3\xi^2}{R^3} + \frac{2\xi}{Rr}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2+1}{\mu_n^2}\sin\Bigl(\frac{\mu_n r}{R}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{\mu_n \xi}{R}\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{a\mu_n^2 t}{R^2}\Bigr).$$

Здесь μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\operatorname{tg}\mu - \mu = 0$. Приведем численные значения первых пяти корней (с точностью до четвертого знака после запятой):

$$\mu_1 = 4{,}4934;\quad \mu_2 = 7{,}7253;\quad \mu_3 = 10{,}9041;\quad \mu_4 = 14{,}0662;\quad \mu_5 = 17{,}2208.$$

Пример 2. Начальная температура шара одинакова, $f(r) = w_0$. На его границе поддерживается постоянный тепловой поток, $g(t) = g_R$.

Решение:

$$w(r,t) = w_0 + g_R R\Bigl[\frac{3at}{R^2} + \frac{5r^2-3R^2}{10R^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2R}{\mu_n^3\cos(\mu_n)}\frac{1}{r}\sin\Bigl(\frac{\mu_n r}{R}\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{a\mu_n^2 t}{R^2}\Bigr)\Bigr],$$

⊙ *Литература*: А. В. Лыков (1967, стр. 164, 169), А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко (1985, стр. 107, 251–252).

1.2.3-6. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Третья краевая задача.

Рассматривается сферическая область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_r w + kw &= g(t) &&\text{при}\quad r = R &&\text{(граничное условие)},\\ |w| &\neq \infty &&\text{при}\quad r = 0 &&\text{(условие ограниченности)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,t) = \int_0^R f(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi + a\int_0^t g(\tau)G(r,R,t-\tau)\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\xi,t) = \frac{2\xi}{Rr}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2+(kR-1)^2}{\mu_n^2+kR(kR-1)}\sin\Bigl(\frac{\mu_n r}{R}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{\mu_n \xi}{R}\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{a\mu_n^2 t}{R^2}\Bigr),$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\mu\operatorname{ctg}\mu + kR - 1 = 0.$$

Численные значения первых шести корней μ_n приведены в книге Г. Карслоу, Д. Егера (1964, стр. 481).

Пример 3. Начальная температура шара одинакова, $f(r) = w_0$. Температура контактирующей среды равна нулю, $g(t) = 0$.

Решение:

$$w(r,t) = \frac{2kR^2 w_0}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\mu_n\,[\mu_n^2+(kR-1)^2]}{\mu_n^2\,[\mu_n^2+kR(kR-1)]}\sin\Bigl(\frac{\mu_n r}{R}\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{a\mu_n^2 t}{R^2}\Bigr),$$

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 233–235), А. В. Лыков (1967, стр. 226).

1.2.3-7. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. Первая краевая задача.

Рассматривается сферический слой. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f(r) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(t) &&\text{при}\quad r = R_1 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(t) &&\text{при}\quad r = R_2 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
w(r,t) = \int_{R_1}^{R_2} f(\xi) G(r,\xi,t)\,d\xi + a\int_0^t g_1(\tau)\Lambda_1(r,t-\tau)\,d\tau - a\int_0^t g_2(\tau)\Lambda_2(r,t-\tau)\,d\tau,
$$

где

$$
G(r,\xi,t) = \frac{2\xi}{(R_2-R_1)r}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left[\frac{\pi n(r-R_1)}{R_2-R_1}\right]\sin\left[\frac{\pi n(\xi-R_1)}{R_2-R_1}\right]\exp\left[-\frac{\pi^2 n^2 at}{(R_2-R_1)^2}\right],
$$

$$
\Lambda_1(r,t) = \frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\xi,t)\Big|_{\xi=R_1},\qquad \Lambda_2(r,t) = \frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\xi,t)\Big|_{\xi=R_2}.
$$

Пример 4. Температура в начальный момент времени равна нулю, $f(r)=0$. На внутренней и внешней границах концентрической области поддерживаются постоянные температуры: $g_1(t)=w_1$, $g_2(t)=w_2$.

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(r,t) = {}& \frac{R_1 w_1}{r} + \frac{(r-R_1)(R_2 w_2 - R_1 w_1)}{r(R_2-R_1)} + \\
&+ \frac{2}{r}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n R_2 w_2 - R_1 w_1}{\pi n}\sin\left[\frac{\pi n(r-R_1)}{R_2-R_1}\right]\exp\left[-\frac{\pi^2 n^2 at}{(R_2-R_1)^2}\right].
\end{aligned}
$$

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 242).

1.2.3-8. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. Вторая краевая задача.

Рассматривается сферический слой. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f(r) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_r w &= g_1(t) &&\text{при}\quad r = R_1 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_r w &= g_2(t) &&\text{при}\quad r = R_2 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
w(r,t) = \int_{R_1}^{R_2} f(\xi) G(r,\xi,t)\,d\xi - a\int_0^t g_1(\tau) G(r,R_1,t-\tau)\,d\tau + a\int_0^t g_2(\tau) G(r,R_2,t-\tau)\,d\tau.
$$

Здесь

$$
G(r,\xi,t) = \frac{3\xi^2}{R_2^3 - R_1^3} + \frac{2\xi}{(R_2-R_1)r}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+R_2^2\lambda_n^2)\Psi_n(r)\Psi_n(\xi)\exp(-a\lambda_n^2 t)}{\lambda_n^2\left[R_1^2 + R_2^2 + R_1R_2(1+R_1R_2\lambda_n^2)\right]},
$$

$$
\Psi_n(r) = \sin[\lambda_n(r-R_1)] + R_1\lambda_n\cos[\lambda_n(r-R_1)],
$$

где λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$
(\lambda^2 R_1 R_2 + 1)\operatorname{tg}[\lambda(R_2-R_1)] - \lambda(R_2-R_1) = 0.
$$

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 242).

1.2.3-9. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. Третья краевая задача.

Рассматривается сферический слой. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f(r) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_r w - k_1 w &= g_1(t) &&\text{при}\quad r = R_1 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_r w + k_2 w &= g_2(t) &&\text{при}\quad r = R_2 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$w(r,t) = \int_{R_1}^{R_2} f(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi - a\int_0^t g_1(\tau)G(r,R_1,t-\tau)\,d\tau + a\int_0^t g_2(\tau)G(r,R_2,t-\tau)\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\xi,t) = \frac{2\xi}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(b_2^2+R_2^2\lambda_n^2)\Psi_n(r)\Psi_n(\xi)\exp(-a\lambda_n^2 t)}{(R_2-R_1)(b_1^2+R_1^2\lambda_n^2)(b_2^2+R_2^2\lambda_n^2)+(b_1R_2+b_2R_1)(b_1b_2+R_1R_2\lambda_n^2)},$$

$$\Psi_n(r) = b_1\sin[\lambda_n(r-R_1)] + R_1\lambda_n\cos[\lambda_n(r-R_1)],\quad b_1 = k_1R_1+1,\quad b_2 = k_2R_2-1,$$

где λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$(b_1b_2 - R_1R_2\lambda^2)\sin[\lambda(R_2-R_1)] + \lambda(R_1b_2+R_2b_1)\cos[\lambda(R_2-R_1)] = 0.$$

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 242).

1.2.3-10. Область: $0 \leqslant r < \infty$. Задача типа Коши.

Ограниченное решение данного уравнения с начальным условием

$$w = f(r) \quad \text{при} \quad t = 0$$

имеет вид

$$w(r,t) = \frac{1}{2r\sqrt{\pi a t}}\int_0^{\infty}\xi\left\{\exp\left[-\frac{(r-\xi)^2}{4at}\right] - \exp\left[-\frac{(r+\xi)^2}{4at}\right]\right\}f(\xi)\,d\xi.$$

⊙ *Литература*: А. Г. Бутковский (1979, стр. 164).

1.2.3-11. Область: $R \leqslant r < \infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается внешняя область шара. Заданы следующие условия:

$$w = f(r) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},$$
$$w = g(t) \quad \text{при} \quad r = R \quad \text{(граничное условие)}.$$

Решение:

$$w(r,t) = \frac{1}{2r\sqrt{\pi a t}}\int_R^{\infty}\xi f(\xi)\left\{\exp\left[-\frac{(r-\xi)^2}{4at}\right] - \exp\left[-\frac{(r+\xi-2R)^2}{4at}\right]\right\}d\xi +$$
$$+ \frac{2R}{r\sqrt{\pi}}\int_z^{\infty} g\Big(t - \frac{(r-R)^2}{4a\tau^2}\Big)\exp(-\tau^2)\,d\tau, \qquad z = \frac{r-R}{2\sqrt{at}}.$$

Пример 5. Температура окружающей среды одинакова в начальный момент времени, $f(r) = w_0$. На границе области поддерживается постоянная температура, $g(t) = w_R$.

Решение:

$$\frac{w-w_0}{w_R-w_0} = \frac{R}{r}\operatorname{erfc}\left(\frac{r-R}{2\sqrt{at}}\right),$$

где $\operatorname{erfc} z = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_z^{\infty}\exp(-\xi^2)\,d\xi$ — интеграл вероятностей.

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 243).

1.2.4. Уравнение вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r}\Big) + \Phi(r,t)$

Это уравнение встречается в задачах теплопроводности с тепловыделением (функция Φ пропорциональна количеству тепла, выделяемому в единицу времени в рассматриваемом объеме). Оно описывает развитие одномерных нестационарных тепловых процессов с центральной симметрией.

Замена $u(r,t) = rw(r,t)$ приводит исходное неоднородное уравнение с переменными коэффициентами к неоднородному уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\Phi(r,t),$$

которое рассматривается в разд. 1.1.2.

1.2.4-1. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Первая краевая задача.

Рассматривается сферическая область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} &w = f(r) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ &w = g(t) && \text{при} \quad r = R && \text{(граничное условие)},\\ &w \neq \infty && \text{при} \quad r = 0 && \text{(условие ограниченности)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,t) = \int_0^R f(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi - a\int_0^t g(\tau)\Lambda(r,t-\tau)\,d\tau + \int_0^t\int_0^R \Phi(\xi,\tau)G(r,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где

$$G(r,\xi,t) = \frac{2\xi}{Rr}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\Bigl(\frac{n\pi r}{R}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{n\pi\xi}{R}\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{an^2\pi^2 t}{R^2}\Bigr), \qquad \Lambda(r,t) = \frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\xi,t)\Big|_{\xi=R}.$$

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 230), А. В. Лыков (1967, стр. 107).

1.2.4-2. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Вторая краевая задача.

Рассматривается сферическая область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} &w = f(r) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ &\partial_r w = g(t) && \text{при} \quad r = R && \text{(граничное условие)},\\ &w \neq \infty && \text{при} \quad r = 0 && \text{(условие ограниченности)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,t) = \int_0^R f(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi + a\int_0^t g(\tau)G(r,R,t-\tau)\,d\tau + \int_0^t\int_0^R \Phi(\xi,\tau)G(r,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где

$$G(r,\xi,t) = \frac{3\xi^2}{R^3} + \frac{2\xi}{Rr}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2+1}{\mu_n^2}\sin\Bigl(\frac{\mu_n r}{R}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{\mu_n\xi}{R}\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{a\mu_n^2 t}{R^2}\Bigr).$$

Здесь μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\operatorname{tg}\mu - \mu = 0$ (численные значения первых пяти корней μ_n указаны в разд. 1.2.3-5).

⊙ *Литература*: А. В. Лыков (1967, стр. 164, 169, 337), А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко (1985, стр. 107, 251–252).

1.2.4-3. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Третья краевая задача.

Рассматривается сферическая область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} &w = f(r) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ &\partial_r w + kw = g(t) && \text{при} \quad r = R && \text{(граничное условие)},\\ &w \neq \infty && \text{при} \quad r = 0 && \text{(условие ограниченности)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,t) = \int_0^R f(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi + a\int_0^t g(\tau)G(r,R,t-\tau)\,d\tau + \int_0^t\int_0^R \Phi(\xi,\tau)G(r,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\xi,t) = \frac{2\xi}{Rr}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2+(kR-1)^2}{\mu_n^2+kR(kR-1)}\sin\Bigl(\frac{\mu_n r}{R}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{\mu_n\xi}{R}\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{a\mu_n^2 t}{R^2}\Bigr),$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\mu\operatorname{ctg}\mu + kR - 1 = 0.$$

Численные значения первых шести корней μ_n приведены в книге Г. Карслоу, Д. Егера (1964, стр. 481).

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 233–235).

1.2.4-4. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. Первая краевая задача.

Рассматривается сферический слой. Заданы следующие условия:

$$w = f(r) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},$$
$$w = g_1(t) \quad \text{при} \quad r = R_1 \quad \text{(граничное условие)},$$
$$w = g_2(t) \quad \text{при} \quad r = R_2 \quad \text{(граничное условие)}.$$

Решение:

$$w(r,t) = \int_{R_1}^{R_2} f(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi + \int_0^t \int_{R_1}^{R_2} \Phi(\xi,\tau)G(r,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau + $$
$$+ a\int_0^t g_1(\tau)\Lambda_1(r,t-\tau)\,d\tau - a\int_0^t g_2(\tau)\Lambda_2(r,t-\tau)\,d\tau,$$

где

$$G(r,\xi,t) = \frac{2\xi}{(R_2-R_1)r}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left[\frac{\pi n(r-R_1)}{R_2-R_1}\right] \sin\left[\frac{\pi n(\xi-R_1)}{R_2-R_1}\right] \exp\left[-\frac{\pi^2 n^2 at}{(R_2-R_1)^2}\right],$$
$$\Lambda_1(r,t) = \frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\xi,t)\Big|_{\xi=R_1}, \quad \Lambda_2(r,t) = \frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\xi,t)\Big|_{\xi=R_2}.$$

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 242).

1.2.4-5. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. Вторая краевая задача.

Рассматривается сферический слой. Заданы следующие условия:

$$w = f(r) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},$$
$$\partial_r w = g_1(t) \quad \text{при} \quad r = R_1 \quad \text{(граничное условие)},$$
$$\partial_r w = g_2(t) \quad \text{при} \quad r = R_2 \quad \text{(граничное условие)}.$$

Решение:

$$w(r,t) = \int_{R_1}^{R_2} f(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi + \int_0^t \int_{R_1}^{R_2} \Phi(\xi,\tau)G(r,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau - $$
$$- a\int_0^t g_1(\tau)G(r,R_1,t-\tau)\,d\tau + a\int_0^t g_2(\tau)G(r,R_2,t-\tau)\,d\tau,$$

где функция $G(r,\xi,t)$ указана в разд. 1.2.3-8.

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 242).

1.2.4-6. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. Третья краевая задача.

Рассматривается сферический слой. Заданы следующие условия:

$$w = f(r) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},$$
$$\partial_r w - k_1 w = g_1(t) \quad \text{при} \quad r = R_1 \quad \text{(граничное условие)},$$
$$\partial_r w + k_2 w = g_2(t) \quad \text{при} \quad r = R_2 \quad \text{(граничное условие)}.$$

Решение дается формулой из разд. 1.2.3-9 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t \int_{R_1}^{R_2} \Phi(\xi,\tau)G(r,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

1.2.4-7. Область: $0 \leqslant r < \infty$. Задача типа Коши.

Ограниченное решение данного уравнения с начальным условием

$$w = f(r) \quad \text{при} \quad t = 0$$

описывается формулами

$$w(r,t) = \int_0^{\infty} f(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi + \int_0^t \int_0^{\infty} \Phi(\xi,\tau)G(r,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau,$$
$$G(r,\xi,t) = \frac{\xi}{2r\sqrt{\pi at}}\left\{\exp\left[-\frac{(r-\xi)^2}{4at}\right] - \exp\left[-\frac{(r+\xi)^2}{4at}\right]\right\}.$$

⊙ *Литература*: А. Г. Бутковский (1979, стр. 164).

1.2.4-8. Область: $R \leqslant r < \infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается внешняя область шара. Заданы следующие условия:

$$w = f(r) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},$$
$$w = g(t) \quad \text{при} \quad r = R \quad \text{(граничное условие)}.$$

Решение:

$$w(r,t) = \int_R^\infty f(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi + \int_0^t \int_R^\infty \Phi(\xi,\tau)G(r,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau + a\int_0^t g(\tau)\Lambda(r,t-\tau)\,d\tau,$$

где

$$G(r,\xi,t) = \frac{\xi}{2r\sqrt{\pi a t}}\left\{\exp\left[-\frac{(r-\xi)^2}{4at}\right] - \exp\left[-\frac{(r+\xi-2R)^2}{4at}\right]\right\}, \quad \Lambda(r,t) = \frac{\partial}{\partial \xi}G(r,\xi,t)\Big|_{\xi=R}.$$

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 243).

1.2.5. Уравнение вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{1-2\beta}{x}\dfrac{\partial w}{\partial x}$

Это безразмерное уравнение встречается в задачах диффузионного пограничного слоя. При $\beta = 0$ см. уравнение из разд. 1.2.1, при $\beta = \frac{1}{2}$ — уравнение из разд. 1.1.1, а при $\beta = -\frac{1}{2}$ — уравнение из разд. 1.2.3.

1.2.5-1. Частные решения (A, B, μ — произвольные постоянные):

$$w(x) = A + Bx^{2\beta},$$
$$w(x,t) = A + 4(1-\beta)Bt + Bx^2,$$
$$w(x,t) = A + 16(2-\beta)(1-\beta)Bt^2 + 8(2-\beta)Btx^2 + Bx^4,$$
$$w(x,t) = x^{2n} + \sum_{p=1}^{n} \frac{4^p}{p!} s_{n,p} s_{n-\beta,p} t^p x^{2(n-p)}, \quad s_{q,p} = q(q-1)\dots(q-p+1),$$
$$w(x,t) = A + 4(1+\beta)Btx^{2\beta} + Bx^{2\beta+2},$$
$$w(x,t) = A + Bt^{\beta-1}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right),$$
$$w(x,t) = A + B\frac{x^{2\beta}}{t^{\beta+1}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right),$$
$$w(x,t) = A + B\gamma\left(\beta, \frac{x^2}{4t}\right),$$
$$w(x,t) = A + B\exp(-\mu^2 t)x^\beta J_\beta(\mu x),$$
$$w(x,t) = A + B\exp(-\mu^2 t)x^\beta Y_\beta(\mu x),$$
$$w(x,t) = A + B\frac{x^\beta}{t}\exp\left(-\frac{x^2+\mu^2}{4t}\right)I_\beta\left(\frac{\mu x}{2t}\right),$$
$$w(x,t) = A + B\frac{x^\beta}{t}\exp\left(-\frac{x^2+\mu^2}{4t}\right)I_{-\beta}\left(\frac{\mu x}{2t}\right),$$
$$w(x,t) = A + B\frac{x^\beta}{t}\exp\left(-\frac{x^2+\mu^2}{4t}\right)K_\beta\left(\frac{\mu x}{2t}\right),$$

где n — произвольное положительное целое число, $\gamma(\beta, z)$ — неполная гамма-функция, $J_\beta(z)$ и $Y_\beta(z)$ — функции Бесселя, $I_\beta(z)$ и $K_\beta(z)$ — модифицированные функции Бесселя.

1.2.5-2. Частные решения в виде бесконечного ряда.

1°. Решение, содержащее произвольную функцию координаты:

$$w(x,t) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n \boldsymbol{L}^n[f(x)], \qquad \boldsymbol{L} \equiv \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1-2\beta}{x}\frac{d}{dx},$$

где $f(x)$ — любая бесконечно дифференцируемая функция. Это решение удовлетворяет начальному условию $w(x,0) = f(x)$. Сумма будет конечной, если $f(x)$ является полиномом, который содержит только четные степени.

2°. Решение, содержащее произвольную функцию времени:

$$w(x,t) = g(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n n!\,(1-\beta)(2-\beta)\ldots(n-\beta)} x^{2n} g_t^{(n)}(t),$$

где $g(t)$ — любая бесконечно дифференцируемая функция. Это решение ограничено при $x = 0$ и обладает следующими свойствами:

$$w(0,t) = g(t), \qquad \partial_x w(0,t) = 0.$$

1.2.5-3. Формулы и преобразования, позволяющие строить частные решения.

Пусть $w = w(x,t)$ — некоторое решение исходного уравнения. Тогда функции

$$w_1 = Aw(\pm\lambda x,\, \lambda^2 t + C),$$
$$w_2 = A|a+bt|^{\beta-1} \exp\Bigl[-\frac{bx^2}{4(a+bt)}\Bigr] w\Bigl(\pm\frac{x}{a+bt},\, \frac{c+kt}{a+bt}\Bigr), \qquad ak - bc = 1,$$

где A, C, a, b, c — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения. Вторая формула обычно встречается при $a = k = 0$, $b = 1$, $c = -1$.

Замена $w = x^{2\beta} u(x,t)$ преобразует уравнение с параметром β в уравнение такого же типа с параметром $-\beta$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1+2\beta}{x}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

1.2.5-4. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},$$
$$w = g(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}.$$

Решение при $0 < \beta < 1$:

$$w(x,t) = \frac{x^\beta}{2t} \int_0^\infty f(\xi)\xi^{1-\beta} \exp\Bigl(-\frac{x^2+\xi^2}{4t}\Bigr) I_\beta\Bigl(\frac{\xi x}{2t}\Bigr)\, d\xi +$$
$$+ \frac{x^{2\beta}}{2^{2\beta+1}\Gamma(\beta+1)} \int_0^t g(\tau) \exp\Bigl[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\Bigr] \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1+\beta}}.$$

Пример. Для $f(x) = w_0$ и $g(t) = w_1$, где $w_0 = \text{const}$ и $w_1 = \text{const}$, имеем

$$w = \frac{(w_0 - w_1)}{\Gamma(\beta)} \gamma\Bigl(\beta, \frac{x^2}{4t}\Bigr) + w_1, \qquad \gamma(\beta, z) = \int_0^z \xi^{\beta-1} e^{-\xi}\, d\xi.$$

Здесь $\gamma(\beta, z)$ — неполная гамма-функция, $\Gamma(\beta) = \gamma(\beta, \infty)$ — гамма-функция.

1.2.5-5. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Вторая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},$$
$$(x^{1-2\beta}\partial_x w) = g(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}.$$

Решение при $0 < \beta < 1$:

$$w(x,t) = \frac{x^\beta}{2t} \int_0^\infty f(\xi)\xi^{1-\beta} \exp\Bigl(-\frac{x^2+\xi^2}{4t}\Bigr) I_{-\beta}\Bigl(\frac{\xi x}{2t}\Bigr)\, d\xi -$$
$$- \frac{2^{2\beta-1}}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t g(\tau) \exp\Bigl[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\Bigr] \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\beta}}.$$

1.2.5-6. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Третья краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$w = 0 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},$$
$$\left[x^{1-2\beta}\partial_x w + k(w_0 - w)\right] = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}.$$

Решение при $0 < \beta < 1$:

$$w(x,t) = w_0 \frac{2^{2\beta-1}k}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \varphi(\tau) \exp\left[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right] \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\beta}},$$

где функция $\varphi(t)$ задается в виде степенного ряда

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mu t^\beta)^n}{\Gamma(n\beta+1)}, \qquad \mu = \frac{2^{2\beta-1}k\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\beta)},$$

который сходится для всех x.

⊙ *Литература*: W. G. L. Sutton (1943), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 273).

1.2.6. Уравнение вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{1-2\beta}{x}\dfrac{\partial w}{\partial x} + \Phi(x,t)$

Это уравнение встречается в задачах диффузионного пограничного слоя при наличии источников или стоков вещества. При $\beta = 0$ см. уравнение из разд. 1.2.2, при $\beta = \frac{1}{2}$ — уравнение из разд. 1.1.2, а при $\beta = -\frac{1}{2}$ — уравнение из разд. 1.2.4.

1.2.6-1. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},$$
$$w = g(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}.$$

Решение при $0 < \beta < 1$:

$$w(x,t) = \frac{x^\beta}{2t} \int_0^\infty f(\xi)\xi^{1-\beta} \exp\left(-\frac{x^2+\xi^2}{4t}\right) I_\beta\left(\frac{\xi x}{2t}\right) d\xi +$$
$$+ \frac{x^{2\beta}}{2^{2\beta+1}\Gamma(\beta+1)} \int_0^t g(\tau) \exp\left[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right] \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1+\beta}} +$$
$$+ \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^\infty \Phi(\xi,\tau) \frac{x^\beta \xi^{1-\beta}}{t-\tau} \exp\left[-\frac{x^2+\xi^2}{4(t-\tau)}\right] I_\beta\left(\frac{\xi x}{2(t-\tau)}\right) d\xi\, d\tau.$$

1.2.6-2. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Вторая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},$$
$$\left(x^{1-2\beta}\partial_x w\right) = g(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}.$$

Решение при $0 < \beta < 1$:

$$w(x,t) = \frac{x^\beta}{2t} \int_0^\infty f(\xi)\xi^{1-\beta} \exp\left(-\frac{x^2+\xi^2}{4t}\right) I_{-\beta}\left(\frac{\xi x}{2t}\right) d\xi -$$
$$- \frac{2^{2\beta-1}}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t g(\tau) \exp\left[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right] \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\beta}} +$$
$$+ \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^\infty \Phi(\xi,\tau) \frac{x^\beta \xi^{1-\beta}}{t-\tau} \exp\left[-\frac{x^2+\xi^2}{4(t-\tau)}\right] I_{-\beta}\left(\frac{\xi x}{2(t-\tau)}\right) d\xi\, d\tau.$$

⊙ *Литература*: W. G. L. Sutton (1943).

1.3. Уравнения с произвольными параметрами, содержащие степенные функции

1.3.1. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t)w$

1.3.1-1. Функция f зависит только от пространственной координаты x.

Такие уравнения встречаются в задачах тепло-и массопереноса с тепловыделением (или объемной химической реакцией). К уравнению этого вида приводится одномерное уравнение Шредингера с помощью замены $t \to -iht$ [функция $-f(x)$ описывает зависимость потенциала от пространственной координаты, см. разд. 1.9.2].

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx+c)w.$

Это уравнение является частным случаем уравнения 1.8.9 при $s(x)=1$, $p(x)=a$, $q(x)=-bx-c$, $\Phi(x,t)=0$. Кроме того, оно является частным случаем уравнения 1.8.1.6 при $f(t)=b$, $g(t)=c$.

1°. Частные решения (A, μ — любые):

$$w(x,t) = A\exp\bigl(btx + \tfrac{1}{3}ab^2t^3 + ct\bigr),$$
$$w(x,t) = A(x+abt^2)\exp\bigl(btx + \tfrac{1}{3}ab^2t^3 + ct\bigr),$$
$$w(x,t) = A\exp\bigl[x(bt+\mu) + \tfrac{1}{3}ab^2t^3 + ab\mu t^2 + (a\mu^2+c)t\bigr],$$
$$w(x,t) = A\exp(-\mu t)\sqrt{\xi}\,J_{1/3}\Bigl(\frac{2}{3b\sqrt{a}}\xi^{3/2}\Bigr), \quad \xi = bx+c+\mu,$$
$$w(x,t) = A\exp(-\mu t)\sqrt{\xi}\,Y_{1/3}\Bigl(\frac{2}{3b\sqrt{a}}\xi^{3/2}\Bigr), \quad \xi = bx+c+\mu,$$

где $J_{1/3}(z)$ и $Y_{1/3}(z)$ — функции Бесселя первого и второго рода.

2°. Преобразование

$$w(x,t) = u(z,t)\exp\bigl(btx + \tfrac{1}{3}ab^2t^3 + ct\bigr), \quad z = x + abt^2$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a\partial_{zz}u$, которое рассматривается в разделе 1.1.1.

3°. Область: $-\infty < x < \infty$. Задача Коши.

Задано начальное условие:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Решение:

$$w(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}}\exp\bigl(btx + \tfrac{1}{3}ab^2t^3 + ct\bigr)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Bigl[-\frac{(x+abt^2-\xi)^2}{4at}\Bigr]f(\xi)\,d\xi.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, А. В. Вязьмин, А. И. Журов, Д. А. Казенин (1998, стр. 64), см. также У. Миллер (1981).

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (bx^2+c)w, \qquad b > 0.$

Это уравнение является частным случаем уравнения 1.8.9 при $s(x)=1$, $p(x)=a$, $q(x)=bx^2+c$, $\Phi(x,t)=0$. Кроме того, оно является частным случаем уравнения 1.8.1.7 при $f(t)=-c$.

1°. Частные решения (A, μ — любые):

$$w(x,t) = A\exp\Bigl[(\sqrt{ab}-c)t + \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}x^2\Bigr],$$
$$w(x,t) = A\exp\Bigl[-(\sqrt{ab}+c)t - \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}x^2\Bigr],$$
$$w(x,t) = A\exp\Bigl(-\mu t - \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}x^2\Bigr)\Phi\Bigl(\frac{c-\mu}{4\sqrt{ab}} + \frac{1}{4},\ \frac{1}{2};\ \sqrt{\frac{b}{a}}x^2\Bigr),$$
$$w(x,t) = A\exp\Bigl(-\mu t - \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}x^2\Bigr)x\Phi\Bigl(\frac{c-\mu}{4\sqrt{ab}} + \frac{3}{4},\ \frac{3}{2};\ \sqrt{\frac{b}{a}}x^2\Bigr),$$

где $\Phi(\alpha,\ \beta;\ z) = 1 + \sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1)}{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+m-1)}\dfrac{z^m}{m!}$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

2°. В квантовой механике встречаются решения вида

$$w(x,t)=e^{-[c+\sqrt{ab}\,(2n+1)]t}\psi_n(\xi),\quad \psi_n(\xi)=\frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{2^n n!\,x_0}}e^{-\frac{1}{2}\xi^2}H_n(\xi),\quad \xi=\frac{x}{x_0},\quad x_0=\Bigl(\frac{a}{b}\Bigr)^{1/4},$$

где $H_n(\xi)=(-1)^n e^{\xi^2}\frac{d^n}{d\xi^n}\bigl(e^{-\xi^2}\bigr)$ — полиномы Эрмита, $n=0,\,1,\,2,\,\ldots$ Эти решения удовлетворяют условиям нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi_n(\xi)|^2 d\xi=1.$$

3°. Преобразование (A — любое)

$$w(x,t)=u(z,\tau)\exp\Bigl[\frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}x^2+(\sqrt{ab}-c)t\Bigr],\quad z=x\exp\bigl(2\sqrt{ab}\,t\bigr),\quad \tau=\frac{\sqrt{a}}{4\sqrt{b}}\exp\bigl(4\sqrt{ab}\,t\bigr)+A$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_\tau u=\partial_{zz}u$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, А. В. Вязьмин, А. И. Журов, Д. А. Казенин (1998, стр. 65), см. также У. Миллер (1981).

3. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t}=a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+(bx^2-c)w,\qquad b>0.$

Частный случай уравнения 1.8.9 при $s(x)=1$, $p(x)=a$, $q(x)=c-bx^2$, $\Phi(x,t)=0$. Преобразование

$$w(x,t)=\frac{1}{\sqrt{|\cos(2\sqrt{ab}\,t)|}}\exp\Bigl[\frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}x^2\operatorname{tg}\bigl(2\sqrt{ab}\,t\bigr)-ct\Bigr]u(z,\tau),$$

$$z=\frac{x}{\cos(2\sqrt{ab}\,t)},\quad \tau=\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{b}}\operatorname{tg}\bigl(2\sqrt{ab}\,t\bigr)$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_\tau u=\partial_{zz}u$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

4. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t}=a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+(bx^2+cx+k)w.$

Замена $z=x+c/(2b)$ приводит к уравнению вида 1.3.1.2 (при $b<0$) или 1.3.1.3 (при $b>0$).

5. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t}=a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\bigl(b+cx^{-2}\bigr)w.$

1°. Частные решения

$$w(x,t)=e^{(b-a\mu^2)t}\sqrt{x}\,\bigl[AJ_\nu(\mu x)+BY_\nu(\mu x)\bigr],\qquad \nu^2=\frac{1}{4}-\frac{c}{a},$$

где $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ — функции Бесселя; A, B, μ — произвольные постоянные.

2°. Область: $0\leqslant x<\infty$. Первая краевая задача.
Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}&w=f(x)\quad \text{при}\quad t=0\quad (\text{начальное условие}),\\ &w=0\qquad\ \text{при}\quad x=0\quad (\text{граничное условие}).\end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t)=\frac{e^{bt}}{2at}\int_0^\infty\sqrt{x\xi}\,\exp\Bigl(-\frac{x^2+\xi^2}{4at}\Bigr)I_\nu\Bigl(\frac{\xi x}{2at}\Bigr)f(\xi)\,d\xi,\qquad \nu^2=\frac{1}{4}-\frac{c}{a},$$

где $-\frac{3}{4}a<c<\frac{1}{4}a$.

3°. Преобразование

$$w(x,t)=e^{bt}x^k u(x,\tau),\quad \tau=at,$$

где k — корень квадратного уравнения $ak^2-ak+c=0$, приводит к уравнению вида 1.2.5:

$$\frac{\partial u}{\partial\tau}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{2k}{x}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

См. также книгу У. Миллера (1981).

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (-bx^2 + c + kx^{-2})w, \qquad b > 0.$

Частный случай уравнения 1.8.1.2 при $f(x) = -bx^2 - c + kx^{-2}$. Преобразование ($A$ — любое)

$$w(x,t) = u(z,\tau)\exp\Big[\frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}x^2 + (\sqrt{ab}+c)t\Big], \quad z = x\exp\big(2\sqrt{ab}\,t\big), \quad \tau = \frac{1}{4\sqrt{ab}}\exp\big(4\sqrt{ab}\,t\big) + A$$

приводит к уравнению вида 1.3.1.5:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{k}{a}z^{-2}u.$$

См. также книгу У. Миллера (1981).

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx^2 - c + kx^{-2})w, \qquad b > 0.$

Частный случай уравнения 1.8.1.2 при $f(x) = bx^2 - c + kx^{-2}$. Преобразование

$$w(x,t) = \frac{1}{\sqrt{|\cos(2\sqrt{ab}\,t)|}}\exp\Big[\frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}x^2\operatorname{tg}\big(2\sqrt{ab}\,t\big) - ct\Big]u(z,\tau),$$

$$z = \frac{x}{\cos(2\sqrt{ab}\,t)}, \quad \tau = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{b}}\operatorname{tg}\big(2\sqrt{ab}\,t\big)$$

приводит к уравнению вида 1.3.1.5:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{k}{a}z^{-2}u.$$

1.3.1-2. Функция f зависит только от времени t.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bt + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.1 при $f(t) = bt + c$.

1°. Частные решения (A, B, μ — любые):

$$w(x,t) = (Ax + B)\exp\big(\tfrac{1}{2}bt^2 + ct\big),$$
$$w(x,t) = A(x^2 + 2at)\exp\big(\tfrac{1}{2}bt^2 + ct\big),$$
$$w(x,t) = A\exp\big[\mu x + \tfrac{1}{2}bt^2 + (c + a\mu^2)t\big],$$
$$w(x,t) = A\exp\big[\tfrac{1}{2}bt^2 + (c - a\mu^2)t\big]\cos(\mu x),$$
$$w(x,t) = A\exp\big[\tfrac{1}{2}bt^2 + (c - a\mu^2)t\big]\sin(\mu x).$$

2°. Замена $w(x,t) = u(x,t)\exp\big(\frac{1}{2}bt^2 + ct\big)$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a\partial_{xx}u$, которое рассматривается в разделе 1.1.1.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bt^k w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.1 при $f(t) = bt^k$.

1°. Частные решения (A, B, μ — любые):

$$w(x,t) = (Ax + B)\exp\Big(\frac{b}{k+1}t^{k+1}\Big),$$
$$w(x,t) = A(x^2 + 2at)\exp\Big(\frac{b}{k+1}t^{k+1}\Big),$$
$$w(x,t) = A\exp\Big(\mu x + a\mu^2 t + \frac{b}{k+1}t^{k+1}\Big),$$
$$w(x,t) = A\exp\Big(\frac{b}{k+1}t^{k+1} - a\mu^2 t\Big)\cos(\mu x),$$
$$w(x,t) = A\exp\Big(\frac{b}{k+1}t^{k+1} - a\mu^2 t\Big)\sin(\mu x).$$

2°. Замена $w(x,t) = u(x,t)\exp\Big(\dfrac{b}{k+1}t^{k+1}\Big)$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a\partial_{xx}u$, которое рассматривается в разделе 1.1.1.

1.3.1-3. Функция f зависит от обеих переменных x и t.

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx + ct + d)w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.6 при $f(t) = b$, $g(t) = ct + d$.

1°. Частные решения (A, μ — любые):

$$w(x,t) = A\exp\bigl(btx + \tfrac{1}{3}ab^2t^3 + \tfrac{1}{2}ct^2 + dt\bigr),$$
$$w(x,t) = A(x + abt^2)\exp\bigl(btx + \tfrac{1}{3}ab^2t^3 + \tfrac{1}{2}ct^2 + dt\bigr),$$
$$w(x,t) = A\exp(\tfrac{1}{2}ct^2 - \mu t)\sqrt{\xi}\,J_{1/3}\Bigl(\frac{2}{3b\sqrt{a}}\xi^{3/2}\Bigr), \quad \xi = bx + d + \mu,$$
$$w(x,t) = A\exp(\tfrac{1}{2}ct^2 - \mu t)\sqrt{\xi}\,Y_{1/3}\Bigl(\frac{2}{3b\sqrt{a}}\xi^{3/2}\Bigr), \quad \xi = bx + d + \mu,$$

где $J_{1/3}(\xi)$ и $Y_{1/3}(\xi)$ — функции Бесселя первого и второго рода.

2°. Преобразование

$$w(x,t) = u(z,t)\exp\bigl(btx + \tfrac{1}{3}ab^2t^3 + \tfrac{1}{2}ct^2 + dt\bigr), \quad z = x + abt^2$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a\partial_{zz}u$, которое рассматривается в разделе 1.1.1.

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(bt + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.3 при $f(t) = bt + c$.

1°. Частные решения (A, μ — любые):

$$w(x,t) = A\exp\bigl[x(\tfrac{1}{2}bt^2 + ct) + a(\tfrac{1}{20}b^2t^5 + \tfrac{1}{4}bct^4 + \tfrac{1}{3}c^2t^3)\bigr],$$
$$w(x,t) = A\bigl[x + a(\tfrac{1}{3}bt^3 + ct^2)\bigr]\exp\bigl[x(\tfrac{1}{2}bt^2 + ct) + a\phi(t)\bigr],$$
$$w(x,t) = A\exp\bigl[x(\tfrac{1}{2}bt^2 + ct + \mu) + a\mu(\tfrac{1}{3}bt^3 + ct^2 + \mu t) + a\phi(t)\bigr],$$

где $\phi(t) = \frac{1}{20}b^2t^5 + \frac{1}{4}bct^4 + \frac{1}{3}c^2t^3$.

2°. Преобразование

$$w(x,t) = u(z,t)\exp\bigl[x(\tfrac{1}{2}bt^2 + ct) + a(\tfrac{1}{20}b^2t^5 + \tfrac{1}{4}bct^4 + \tfrac{1}{3}c^2t^3)\bigr], \quad z = x + a\bigl(\tfrac{1}{3}bt^3 + ct^2\bigr)$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a\partial_{zz}u$, которое рассматривается в разделе 1.1.1.

12. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bxt + cx + dt + e)w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.6 при $f(t) = bt + c$, $g(t) = dt + e$.

1°. Частное решение:

$$w(x,t) = \exp\bigl[x(\tfrac{1}{2}bt^2 + ct) + a(\tfrac{1}{20}b^2t^5 + \tfrac{1}{4}bct^4 + \tfrac{1}{3}c^2t^3) + \tfrac{1}{2}dt^2 + et\bigr].$$

2°. Преобразование

$$w(x,t) = u(z,t)\exp\bigl[x(\tfrac{1}{2}bt^2 + ct) + a(\tfrac{1}{20}b^2t^5 + \tfrac{1}{4}bct^4 + \tfrac{1}{3}c^2t^3) + \tfrac{1}{2}dt^2 + et\bigr], \quad z = x + a(bt^2 + 2ct)$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a\partial_{zz}u$, которое рассматривается в разделе 1.1.1.

13. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (-bx^2 + ct + d)w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.7 при $f(t) = ct + d$.

1°. Частные решения (A — произвольная постоянная):

$$w(x,t) = A\exp\Big[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}\,x^2 + \frac{1}{2}ct^2 + (\sqrt{ab}+d)t\Big],$$
$$w(x,t) = Ax\exp\Big[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}\,x^2 + \frac{1}{2}ct^2 + (3\sqrt{ab}+d)t\Big].$$

2°. Преобразование (A — любое)

$$w(x,t) = u(z,\tau)\exp\Big[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}\,x^2 + \frac{1}{2}ct^2 + (\sqrt{ab}+d)t\Big],$$
$$z = x\exp\big(2\sqrt{ab}\,t\big), \qquad \tau = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{b}{a}}\,\exp\big(4\sqrt{ab}\,t\big) + A$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_\tau u = \partial_{zz}u$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

14. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(-bx+ct+d)w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.8 при $f(t) = ct + d$.

15. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bxt^k w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.3 при $f(t) = bt^k$.

1°. Частные решения (A, μ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = A\exp\Big[\frac{b}{k+1}xt^{k+1} + \frac{ab^2}{(k+1)^2(2k+3)}t^{2k+3}\Big],$$
$$w(x,t) = A\Big[x + \frac{2ab}{(k+1)(k+2)}t^{k+2}\Big]\exp\Big[\frac{b}{k+1}xt^{k+1} + \frac{ab^2}{(k+1)^2(2k+3)}t^{2k+3}\Big],$$
$$w(x,t) = A\exp\Big[\frac{b}{k+1}xt^{k+1} + \mu x + \frac{ab^2}{(k+1)^2(2k+3)}t^{2k+3} + \frac{2ab\mu}{(k+1)(k+2)}t^{k+2} + a\mu^2 t\Big].$$

2°. Преобразование

$$w(x,t) = u(z,t)\exp\Big[\frac{b}{k+1}xt^{k+1} + \frac{ab^2}{(k+1)^2(2k+3)}t^{2k+3}\Big], \qquad z = x + \frac{2ab}{(k+1)(k+2)}t^{k+2}$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a\partial_{zz}u$, которое рассматривается в разделе 1.1.1.

16. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx^2t^n + cxt^m + dt^k)w.$

Частный случай уравнения 1.8.7.5 при $n(t) = a$, $f(t) = g(t) = 0$, $h(t) = bt^n$, $s(t) = ct^m$, $p(t) = dt^k$.

1.3.2. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t)\dfrac{\partial w}{\partial x}$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bt+c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.8.2.1 при $f(t) = bt + c$.

1°. Частные решения (A, B, μ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = 2Ax + A(bt^2 + 2ct) + B,$$
$$w(x,t) = A\big(x + \tfrac{1}{2}bt^2 + ct\big)^2 + 2aAt + B,$$
$$w(x,t) = A\exp\big[\mu x + \tfrac{1}{2}\mu bt^2 + (a\mu^2 + \mu c)t\big] + B.$$

2°. Замена $z = x + \frac{1}{2}bt^2 + ct$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t w = a\partial_{zz}w$, которое рассматривается в разделе 1.1.1.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Это уравнение является частным случаем уравнения 1.8.2.2 при $f(x) = bx$ и частным случаем уравнения 1.8.2.3 при $f(t) = b$.

1°. Частные решения (A, B, μ — произвольные постоянные):

$$w(x) = A\int \exp\Bigl(-\frac{b}{2a}x^2\Bigr)\,dx + B,$$
$$w(x,t) = Axe^{bt} + B,$$
$$w(x,t) = Abx^2e^{2bt} + Aae^{2bt} + B,$$
$$w(x,t) = A\exp\bigl(2b\mu xe^{bt} + 2ab\mu^2e^{2bt}\bigr) + B.$$

2°. Переходя от t, x к новым переменным

$$\tau = \frac{A^2}{2b}e^{2bt} + B, \quad z = Axe^{bt},$$

где A, B — любые, для функции $w(\tau, z)$ получим уравнение с постоянными коэффициентами $\partial_\tau w = a\partial_{zz}w$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

3°. Область: $-\infty < x < \infty$. Задача Коши.
Задано начальное условие:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Решение:

$$w(x,t) = \Bigl[\frac{2\pi a}{b}\bigl(e^{2bt} - 1\bigr)\Bigr]^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\biggl[-\frac{b\bigl(xe^{bt} - \xi\bigr)^2}{2a\bigl(e^{2bt} - 1\bigr)}\biggr]f(\xi)\,d\xi.$$

⊙ *Литература*: У. Миллер (1981, стр. 137), А. Д. Полянин, А. В. Вязьмин, А. И. Журов, Д. А. Казенин (1998, стр. 68).

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bt^2 + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.8.2.1 при $f(t) = bt^2 + c$.

1°. Частные решения (A, B, μ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = A\bigl(x + \tfrac{1}{3}bt^3 + ct\bigr) + B,$$
$$w(x,t) = A\bigl(x + \tfrac{1}{3}bt^3 + ct\bigr)^2 + 2aAt + B,$$
$$w(x,t) = A\exp\bigl[\mu x + \tfrac{1}{3}\mu bt^3 + \mu(a\mu + c)t\bigr] + B.$$

2°. Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x + \frac{1}{3}bt^3 + ct$, получим уравнение с постоянными коэффициентами $\partial_t w = a\partial_{zz}w$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(bt + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.8.2.3 при $f(t) = bt + c$.

1°. Частные решения (A, B, μ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = Ax\exp\bigl(\tfrac{1}{2}bt^2 + ct\bigr) + B,$$
$$w(x,t) = Ax^2\exp\bigl(bt^2 + 2ct\bigr) + 2Aa\int \exp\bigl(bt^2 + 2ct\bigr)\,dt + B,$$
$$w(x,t) = A\exp\Bigl[\mu x\exp\bigl(\tfrac{1}{2}bt^2 + ct\bigr) + a\mu^2\int \exp\bigl(bt^2 + 2ct\bigr)\,dt\Bigr] + B.$$

2°. Переходя от t, x к новым переменным (A — любое)

$$\tau = \int \exp\bigl(bt^2 + 2ct\bigr)\,dt + A, \quad z = x\exp\bigl(\tfrac{1}{2}bt^2 + ct\bigr),$$

для функции $w(\tau, z)$ получим уравнение с постоянными коэффициентами $\partial_\tau w = a\partial_{zz}w$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (ax + bt + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.8.2.7 при $f(t) = a$, $g(t) = bt + c$. См. также уравнение 1.8.2.4.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{x}{t}\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Уравнение Ильковича. Оно описывает теплоперенос к поверхности растущей капли, которая вытекает из тонкого капилляра в раствор жидкости (массовый расход движущейся по капилляру жидкости считается постоянным). Данное уравнение является частным случаем 1.8.2.3 при $f(t) = b/t$.

1°. Частные решения (A, B, μ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = Axt^b + B,$$
$$w(x,t) = A(2b+1)x^2t^{2b} + 2Aat^{2b+1} + B,$$
$$w(x,t) = A\exp\Bigl(\mu xt^b + \frac{a\mu^2}{2b+1}t^{2b+1}\Bigr) + B.$$

2°. Переходя от t, x к новым переменным

$$\tau = \frac{1}{2b+1}t^{2b+1}, \quad z = xt^b,$$

для функции $w(\tau, z)$ получим уравнение с постоянными коэффициентами $\partial_\tau w = a\partial_{zz}w$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

3°. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Первая краевая задача.
Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} &w = w_0 &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\ &w = w_s &&\text{при}\quad x = 0 &&\text{(граничное условие)},\\ &w \to w_0 &&\text{при}\quad x \to \infty &&\text{(граничное условие)},\end{aligned}$$

где w_0 и w_s — некоторые постоянные.

Решение:

$$\frac{w - w_s}{w_0 - w_s} = \operatorname{erf}\Bigl(\frac{\sqrt{2b+1}}{2\sqrt{a}}\frac{x}{\sqrt{t}}\Bigr), \qquad \text{где} \qquad \operatorname{erf}\xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\xi \exp(-\xi^2)\,d\xi.$$

⊙ *Литература*: Ю. П. Гупало, А. Д. Полянин, Ю. С. Рязанцев (1985, стр. 303).

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bt^k x + ct^m)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.8.2.7 при $f(t) = bt^k$, $g(t) = ct^m$.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \Bigl(cx + \dfrac{b}{x}\Bigr)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Переходя от x, t к новым переменным z, τ по формулам

$$z = xe^{ct}, \quad \tau = \frac{a}{2c}e^{2ct} + \mathrm{const},$$

получим более простое уравнение вида 1.2.5:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\mu}{z}\frac{\partial w}{\partial z}, \qquad \mu = \frac{b}{a}.$$

Для $\mu = 1$ и $\mu = 2$ см. также уравнения из разд. 1.2.1 и 1.2.3.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \Bigl(ct^n x + \dfrac{b}{x}\Bigr)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.8.2.6 при $f(t) = ct^n$.

1.3.3. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t)\frac{\partial w}{\partial x} + g(x,t)w + h(x,t)$

1. $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\frac{\partial w}{\partial x} + (cx+d)w.$

Частный случай уравнения 1.8.7.4 при $n(t)=a$, $f(t)=0$, $g(t)=b$, $h(t)=c$, $s(t)=d$.

1°. Частные решения (A, μ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = A\exp\Bigl[ctx - \frac{b}{2a}x + \frac{1}{3}ac^2t^3 + \Bigl(d - \frac{b^2}{4a}\Bigr)t\Bigr],$$
$$w(x,t) = A(x+act^2)\exp\Bigl[ctx - \frac{b}{2a}x + \frac{1}{3}ac^2t^3 + \Bigl(d - \frac{b^2}{4a}\Bigr)t\Bigr],$$
$$w(x,t) = A\exp\Bigl[x\Bigl(ct+\mu-\frac{b}{2a}\Bigr) + \frac{1}{3}ac^2t^3 + ac\mu t^2 + \Bigl(a\mu^2+d-\frac{b^2}{4a}\Bigr)t\Bigr],$$
$$w(x,t) = A\exp\Bigl(-\mu t - \frac{b}{2a}x\Bigr)\sqrt{\xi}\,J_{1/3}\Bigl(\frac{2}{3c\sqrt{a}}\xi^{3/2}\Bigr), \quad \xi = cx+\mu+d-\frac{b^2}{4a},$$
$$w(x,t) = A\exp\Bigl(-\mu t - \frac{b}{2a}x\Bigr)\sqrt{\xi}\,Y_{1/3}\Bigl(\frac{2}{3c\sqrt{a}}\xi^{3/2}\Bigr), \quad \xi = cx+\mu+d-\frac{b^2}{4a},$$

где $J_{1/3}(\xi)$ и $Y_{1/3}(\xi)$ — функции Бесселя первого и второго рода.

2°. Преобразование

$$w(x,t) = u(z,t)\exp\Bigl[ctx - \frac{b}{2a}x + \frac{1}{3}ac^2t^3 + \Bigl(d-\frac{b^2}{4a}\Bigr)t\Bigr], \quad z = x + act^2$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a\partial_{zz}u$, которое рассматривается в разделе 1.1.1.

2. $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx\frac{\partial w}{\partial x} + (cx+d)w.$

Частный случай уравнения 1.8.7.4 при $n(t)=a$, $f(t)=b$, $g(t)=0$, $h(t)=c$, $s(t)=d$.

1°. Частные решения (A, μ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = A\exp\Bigl[-\frac{c}{b}x + \Bigl(d+\frac{ac^2}{b^2}\Bigr)t\Bigr],$$
$$w(x,t) = A\Bigl(x - \frac{2ac}{b^2}\Bigr)\exp\Bigl[-\frac{c}{b}x + \Bigl(b+d+\frac{ac^2}{b^2}\Bigr)t\Bigr],$$
$$w(x,t) = A\exp\Bigl[\frac{a\mu^2}{2b}e^{2bt} + \mu e^{bt}\Bigl(x - \frac{2ac}{b^2}\Bigr) - \frac{c}{b}x + \Bigl(d+\frac{ac^2}{b^2}\Bigr)t\Bigr].$$

Более сложные решения см. в 1.3.4.7.

2°. Преобразование

$$w(x,t) = u(z,\tau)\exp\Bigl[-\frac{c}{b}x + \Bigl(d+\frac{ac^2}{b^2}\Bigr)t\Bigr], \quad \tau = \frac{a}{2b}e^{2bt}, \quad z = e^{bt}\Bigl(x - \frac{2ac}{b^2}\Bigr)$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_\tau u = \partial_{zz}u$, которое рассматривается в разделе 1.1.1.

3. $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx+c)\frac{\partial w}{\partial x} + (dx+e)w.$

При $b=0$ см. уравнение 1.3.3.1. При $b\neq 0$ замена $z = x + c/b$ приводит к уравнению вида 1.3.3.2:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + bz\frac{\partial w}{\partial z} + (dz+k)w, \qquad k = e - \frac{cd}{b}.$$

4. $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2(ax+b)\frac{\partial w}{\partial x} + (a^2x^2 + 2abx + c)w.$

Это уравнение является частным случаем уравнения 1.8.6.5 и частным случаем уравнения 1.8.7.5. Замена $w(x,t) = u(x,t)\exp\bigl(-\frac{1}{2}ax^2 - bx\bigr)$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами вида 1.1.3 при $\Phi\equiv 0$: $\partial_t u = \partial_{xx}u + (c-a-b^2)u$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (ax+b)\dfrac{\partial w}{\partial x} + (cx^2+dx+e)w.$

Это уравнение является частным случаем уравнения 1.8.6.5 и частным случаем уравнения 1.8.7.5.

1°. Замена

$$w(x,t) = u(x,t)\exp\left(\tfrac{1}{2}Ax^2\right),$$

где A — корень квадратного уравнения $A^2+aA+c=0$, приводит к уравнению вида 1.8.7.4:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left[(2A+a)x+b\right]\frac{\partial u}{\partial x} + \left[(Ab+d)x+A+e\right]u,$$

которое сводится к уравнению с постоянными коэффициентами.

2°. Замена

$$w(x,t) = u(x,t)\exp\left(\tfrac{1}{2}Ax^2+Bx+Ct\right)$$

приводит к более простому уравнению

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &+ \left[(2A+a)x+2B+b\right]\frac{\partial u}{\partial x} + \\ &+ \left[(A^2+Aa+c)x^2+(2AB+Ab+Ba+d)x+B^2+Bb+A-C+e\right]u.\end{aligned}$$

Подходящим выбором коэффициентов A, B, C можно различным образом упростить исходное уравнение.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (ax+bt+c)\dfrac{\partial w}{\partial x} + (sx^2+ptx+qt^2+kx+lt+m)w.$

Частный случай уравнения 1.8.7.5.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bt^k x+ct^m)\dfrac{\partial w}{\partial x} + st^n w.$

Частный случай уравнения 1.8.3.6 при $f(t)=bt^k$, $g(t)=ct^m$, $h(t)=st^n$.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{b}{x}\dfrac{\partial w}{\partial x} + \left(c+\dfrac{k}{x^2}\right)w.$

1°. Преобразование

$$w(x,t) = e^{ct}x^\lambda u(x,\tau), \quad \tau = at,$$

где λ — корень квадратного уравнения $a\lambda^2+(b-a)\lambda+k=0$, приводит к уравнению вида 1.2.5:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(2\lambda+\frac{b}{a}\right)\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

2°. Если $w(x,t)$ — решение исходного уравнения, то функции

$$\begin{aligned}w_1 &= Ae^{c(1-a^2)\tau}w(\pm ax, a^2\tau), \quad \tau = t+B,\\ w_2 &= A\tau^{\lambda-1}\exp\left(-\frac{x^2}{4a\tau}+c\tau+\frac{c}{a^2\tau}\right)w\left(\pm\frac{x}{a\tau}, -\frac{1}{a^2\tau}\right), \quad \lambda = \frac{1}{2}-\frac{b}{2a},\end{aligned}$$

где A, B — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{b}{x}\dfrac{\partial w}{\partial x} + \left(c+\dfrac{k}{x^2}\right)w + \Phi(x,t).$

Преобразование

$$w(x,t) = e^{ct}x^\lambda u(x,\tau), \quad \tau = at,$$

где λ — корень квадратного уравнения $a\lambda^2+(b-a)\lambda+k=0$, приводит к уравнению вида 1.2.6:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(2\lambda+\frac{b}{a}\right)\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \Psi(x,\tau), \qquad \Psi(x,\tau) = \frac{1}{a}e^{-ct}x^{-\lambda}\Phi(x,t).$$

1.3.4. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = (ax+b)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t)\frac{\partial w}{\partial x} + g(x,t)w$

1. $\frac{\partial w}{\partial t} = ax\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

Частный случай уравнения 1.8.6.1 при $f(x) = ax$. См. также уравнение 1.3.6.6 при $n = 0$.

1°. Частные решения (A, B, C, μ — произвольные постоянные):

$$w(x) = Ax + B,$$
$$w(x,t) = 2Aatx + Ax^2 + B,$$
$$w(x,t) = Aa^2t^2x + Aatx^2 + \tfrac{1}{6}Ax^3 + B,$$
$$w(x,t) = 2Aa^3t^3x + 3Aa^2t^2x^2 + Aatx^3 + \tfrac{1}{12}Ax^4 + B,$$
$$w(x,t) = x^n + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{[n(n-1)\dots(n-k)]^2}{n(n-k)k!}(at)^k x^{n-k},$$
$$w(x,t) = A\exp\Bigl(-\frac{x}{at+B}\Bigr) + C,$$
$$w(x,t) = \frac{Ax}{(at+B)^2}\exp\Bigl(-\frac{x}{at+B}\Bigr) + C,$$
$$w(x,t) = Aat + A(x\ln x - x) + B,$$
$$w(x,t) = Aa^2t^2 + 2Aat(x\ln x - x) + A(x^2\ln x - \tfrac{5}{2}x^2) + B,$$
$$w(x,t) = e^{\mu t}\sqrt{x}\Bigl[AJ_1\Bigl(\frac{2}{\sqrt{a}}\sqrt{-\mu x}\Bigr) + BY_1\Bigl(\frac{2}{\sqrt{a}}\sqrt{-\mu x}\Bigr)\Bigr] \quad \text{при } \mu < 0,$$
$$w(x,t) = e^{\mu t}\sqrt{x}\Bigl[AI_1\Bigl(\frac{2}{\sqrt{a}}\sqrt{\mu x}\Bigr) + BK_1\Bigl(\frac{2}{\sqrt{a}}\sqrt{\mu x}\Bigr)\Bigr] \quad \text{при } \mu > 0,$$

где $J_1(z)$ и $Y_1(z)$ — функции Бесселя, $I_1(z)$ и $K_1(z)$ — модифицированные функции Бесселя.

2°. Решение, содержащее произвольную функцию координаты:

$$w(x,t) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(at)^n}{n!}\boldsymbol{L}^n[f(x)], \qquad \boldsymbol{L} \equiv x\frac{d^2}{dx^2},$$

где $f(x)$ — любая бесконечно дифференцируемая функция. Это решение удовлетворяет начальному условию $w(x,0) = f(x)$. Сумма будет конечной, если $f(x)$ является полиномом.

3°. Решение, содержащее произвольную функцию времени:

$$w(x,t) = A + xg(t) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n[(n-1)!]^2a^{n-1}}x^n g_t^{(n-1)}(t),$$

где $g(t)$ — любая бесконечно дифференцируемая функция, A — произвольная постоянная. Это решение обладает свойствами

$$w(0,t) = A, \qquad \partial_x w(0,t) = g(t).$$

4°. Пусть $w = w(x,t)$ — некоторое решение исходного уравнения. Тогда функции

$$w_1 = Aw(\lambda x,\, \lambda t + C),$$
$$w_2 = A\exp\Bigl[-\frac{\beta x}{a(\delta+\beta t)}\Bigr]w\Bigl(\frac{x}{(\delta+\beta t)^2},\, \frac{\gamma+\lambda t}{\delta+\beta t}\Bigr), \qquad \lambda\delta - \beta\gamma = 1,$$

где A, C, β, δ, λ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2. $\frac{\partial w}{\partial t} = ax\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (-bx + c)w$.

Преобразование

$$w(x,t) = u(z,\tau)\exp\Bigl(\sqrt{\frac{b}{a}}\,x + ct\Bigr), \quad z = x\exp(2\sqrt{ab}\,t), \quad \tau = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}\exp(2\sqrt{ab}\,t)$$

приводит к более простому уравнению вида 1.3.4.1:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bxt^n w.$

Частный случай уравнения 1.8.8.1 при $f(t) = a$, $g(t) = 0$, $h(t) = bt^n$, $s(t) = 0$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bt^n x + ct^m)w.$

Частный случай уравнения 1.8.8.1 при $f(t) = a$, $g(t) = 0$, $h(t) = bt^n$, $s(t) = ct^m$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\Big[(x+b)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big].$

Это уравнение описывает теплоперенос в неподвижной среде (твердом теле), когда коэффициент температуропроводности является линейной функцией координаты.

1°. Исходное уравнение можно записать в более привычном для приложений виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\Big[(x+b)\frac{\partial w}{\partial x}\Big].$$

2°. Замена $x = \frac{1}{4}z^2 - b$ приводит к уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{z}\frac{\partial w}{\partial z}\Big),$$

которое рассматривается в разд. 1.2.1.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx\dfrac{\partial w}{\partial x} + (cx+d)w.$

Частный случай уравнения 1.8.8.1 при $f(t) = a$, $g(t) = b$, $h(t) = c$, $s(t) = d$.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = (a_2 x + b_2)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (a_1 x + b_1)\dfrac{\partial w}{\partial x} + (a_0 x + b_0)w.$

Частный случай уравнения 1.8.6.5 при $f(x) = a_2x + b_2$, $g(x) = a_1x + b_1$, $h(x) = a_0x + b_0$, $\Phi \equiv 0$.

Частные решения исходного уравнения представлены в табл. 15, где функция

$$\mathcal{J}(a,b;x) = C_1\Phi(a,b;x) + C_2\Psi(a,b;x), \qquad C_1,\ C_2 \text{ — любые},$$

является произвольным решением вырожденного гипергеометрического уравнения

$$xy''_{xx} + (b-x)y'_x - ay = 0,$$

а функция

$$Z_\nu(x) = C_1J_\nu(x) + C_2Y_\nu(x), \qquad C_1,\ C_2 \text{ — любые},$$

является произвольным решением уравнения Бесселя

$$x^2y''_{xx} + xy'_x + (x^2 - \nu^2)y = 0.$$

О вырожденных гипергеометрических функциях $\Phi(a,b;x)$ и $\Psi(a,b;x)$ см. книги М. Абрамовица, И. Стиган (1979) и Г. Бейтмена, А. Эрдейи (1973, т. 1). О функциях Бесселя $J_\nu(x)$ и $Y_\nu(x)$ см. книги М. Абрамовица, И. Стиган (1979) и Г. Бейтмена, А. Эрдейи (1974, т. 2).

Замечание. При $b_2 = 0$ исходное уравнение является частным случаем уравнения вида 1.8.7.4 и сводится к уравнению теплопроводности, которое рассматривается в разд. 1.1.1. В этом случае можно указать множество решений, которые не содержатся в табл. 15.

1.3.5. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = (ax^2+bx+c)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x,t)w$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx\dfrac{\partial w}{\partial x} + cw.$

1°. Частные решения (A, B, μ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = \big(A\ln|x| + B\big)|x|^n \exp\big[(c-an^2)t\big],$$
$$w(x,t) = A\big(2at + \ln^2|x|\big)|x|^n \exp\big[(c-an^2)t\big],$$
$$w(x,t) = A|x|^\mu \exp\big[(c + a\mu^2 - 2an\mu)t\big],$$

где $n = \dfrac{a-b}{2a}$.

ТАБЛИЦА 15
Частные решения уравнения 1.3.4.7 для различных значений определяющих параметров (μ — произвольное число).

Частное решение: $w(x,t)=\exp(hx-\mu t)F(\xi)$, где $\xi=\dfrac{x+\gamma}{p}$

Условия	h	p	γ	F	Параметры
$a_2\neq 0$, $D\neq 0$	$\dfrac{D-a_1}{2a_2}$	$-\dfrac{a_2}{A(h)}$	$\dfrac{b_2}{a_2}$	$\mathcal{J}(a,b;\xi)$	$a=B(h)/A(h)$, $b=(a_2b_1-a_1b_2)a_2^{-2}$
$a_2=0$, $a_1\neq 0$	$-\dfrac{a_0}{a_1}$	1	$\dfrac{2b_2h+b_1}{a_1}$	$\mathcal{J}\left(a,\frac{1}{2};k\xi^2\right)$	$a=B(h)/(2a_1)$, $k=-a_1/(2b_2)$
$a_2\neq 0$, $a_1^2=4a_0a_2$	$-\dfrac{a_1}{2a_2}$	a_2	$\dfrac{b_2}{a_2}$	$\xi^{\alpha}Z_{2\alpha}(\beta\sqrt{\xi})$	$\alpha=\dfrac{1}{2}-\dfrac{2b_2h+b_1}{2a_2}$, $\beta=2\sqrt{B(h)}$
$a_2=a_1=0$, $a_0\neq 0$	$-\dfrac{b_1}{2b_2}$	1	$\dfrac{4(b_0+\mu)b_2-b_1^2}{4a_0b_2}$	$\xi^{1/2}Z_{1/3}(k\xi^{3/2})$	$k=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{a_0}{b_2}\right)^{1/2}$

Обозначения: $D^2=a_1^2-4a_0a_2$, $A(h)=2a_2h+a_1$, $B(h)=b_2h^2+b_1h+b_0+\mu$

2°. Преобразование

$$w(x,t)=|x|^n\exp\bigl[(c-an^2)t\bigr]u(z,t),\quad z=\ln|x|,\qquad n=\frac{a-b}{2a}$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u=a\partial_{zz}u$, которое рассматривается в разделе 1.1.1.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=ax^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+(bt^n+c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.4.2 при $f(t)=bt^n+c$.

Преобразование

$$w(x,t)=u(z,t)\exp\left(\frac{b}{n+1}t^{n+1}+ct\right),\quad z=\ln|x|$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами вида 1.1.4:

$$\frac{\partial u}{\partial\tau}=a\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-a\frac{\partial u}{\partial z}.$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=ax^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+bx\dfrac{\partial w}{\partial x}+(cx^k+s)w.$

Частный случай уравнения 1.8.6.5 при $f(x)=ax^2$, $g(x)=bx$, $h(x)=cx^k+s$, $\Phi\equiv 0$. При $c=0$ см. уравнение 1.3.5.1.

Частные решения при $c\neq 0$:

$$w(x,t)=Ae^{-\mu t}x^{\frac{a-b}{2a}}J_\nu\left(\frac{2}{k}\sqrt{\frac{c}{a}}\,x^{\frac{k}{2}}\right),\quad \nu=\frac{1}{ak}\sqrt{(a-b)^2-4a(s+\mu)},$$
$$w(x,t)=Ae^{-\mu t}x^{\frac{a-b}{2a}}Y_\nu\left(\frac{2}{k}\sqrt{\frac{c}{a}}\,x^{\frac{k}{2}}\right),\quad \nu=\frac{1}{ak}\sqrt{(a-b)^2-4a(s+\mu)},$$

где A и μ — произвольные постоянные, $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ — функции Бесселя.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=a_2x^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+(a_1x^2+b_1x)\dfrac{\partial w}{\partial x}+(a_0x^2+b_0x+c_0)w.$

Частный случай уравнения 1.8.6.5 при $f(x)=a_2x^2$, $g(x)=a_1x^2+b_1x$, $h(x)=a_0x^2+b_0x+c_0$, $\Phi\equiv 0$.

1°. Частные решения при $a_1^2 \neq 4a_0a_2$:

$$w(x,t) = A\exp(-\nu t + \mu x)x^k \Phi\Big(\alpha,\ 2k + \frac{b_1}{a_2};\ -\gamma x\Big),$$
$$w(x,t) = A\exp(-\nu t + \mu x)x^k \Psi\Big(\alpha,\ 2k + \frac{b_1}{a_2};\ -\gamma x\Big), \tag{1}$$

где A и ν — произвольные постоянные, $k = k(\nu)$ — корень квадратного уравнения $a_2k^2 + (b_1 - a_2)k + c_0 + \nu = 0$,

$$\mu = \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2} - a_1}{2a_2}, \quad \alpha = \frac{(b_1 + 2a_2k)\mu + b_0 + a_1k}{2a_2\mu + a_1}, \quad \gamma = 2\mu + \frac{a_1}{a_2},$$

$\Phi(\alpha,\beta;z)$ и $\Psi(\alpha,\beta;z)$ — вырожденные гипергеометрические функции. [О вырожденных гипергеометрических функциях см. книги М. Абрамовица, И. Стиган (1979) и Г. Бейтмена, А. Эрдейи (1973, т. 1).]

2°. Частные решения при $a_1^2 = 4a_0a_2$:

$$w(x,t) = A\exp\Big(-\nu t - \frac{a_1}{2a_2}x\Big)x^k\xi^m J_{2m}\big(2\sqrt{p\xi}\big), \quad \xi = \frac{x}{a_2},$$
$$w(x,t) = A\exp\Big(-\nu t - \frac{a_1}{2a_2}x\Big)x^k\xi^m Y_{2m}\big(2\sqrt{p\xi}\big), \quad \xi = \frac{x}{a_2}, \tag{2}$$

где A и ν — произвольные постоянные, $k = k(\nu)$ — корень квадратного уравнения $a_2k^2 + (b_1 - a_2)k + c_0 + \nu = 0$;

$$m = \frac{1}{2} - k - \frac{b_1}{2a_2}, \quad p = -\frac{a_1}{2a_2}(b_1 + 2a_2k) + b_0 + a_1k = 0;$$

$J_m(z)$ и $Y_m(z)$ — функции Бесселя. [О функциях Бесселя см. книги М. Абрамовица, И. Стиган (1979) и Г. Бейтмена, А. Эрдейи (1974, т. 2).]

Замечание. В решениях (1), (2) параметр k можно считать произвольным, а параметр $\nu = -a_2k^2 - (b_1 - a_2)k - c_0$.

5. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a_2x^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (a_1x^{k+1} + b_1x)\frac{\partial w}{\partial x} + (a_0x^{2k} + b_0x^k + c_0)w.$

Частный случай уравнения 1.8.6.5 при $f(x) = a_2x^2$, $g(x) = a_1x^{k+1} + b_1x$, $h(x) = a_0x^{2k} + b_0x^k + c_0$, $\Phi \equiv 0$.

Замена $\xi = x^k$ приводит к уравнению вида 1.3.5.4:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a_2k^2\xi^2\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + k\big(a_1\xi^2 + \beta\xi\big)\frac{\partial w}{\partial \xi} + (a_0\xi^2 + b_0\xi + c_0)w,$$

где $\beta = b_1 + a_2(k-1)$.

6. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = (ax^2 + b)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ax\frac{\partial w}{\partial x} + cw.$

Замена $z = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + b}}$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + cw,$$

которое рассматривается в разд. 1.1.3.

1.3.6. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = f(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x,t)\frac{\partial w}{\partial x} + h(x,t)w$

1. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = ax^3\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bxt^k\frac{\partial w}{\partial x} + ct^m w.$

Частный случай уравнения 1.8.8.7 при $n = 3$, $f(t) = a$, $g(t) = bt^k$, $h(t) = ct^m$.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^4 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw.$

Частный случай уравнения 1.3.7.6 при $n = m = 0$.

1°. Частные решения (A, B, μ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = e^{bt}(Ax + B),$$
$$w(x,t) = e^{bt}\Bigl(2Aatx + \frac{A}{x} + B\Bigr),$$
$$w(x,t) = Ax\exp\Bigl[(b + a\mu^2)t + \frac{\mu}{x}\Bigr].$$

2°. Преобразование $w(x,t) = xe^{bt}u(\xi,t)$, $\xi = 1/x$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a\partial_{\xi\xi} u$, которое рассматривается в разделе 1.1.1.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = (x^2 + a^2)^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \Phi(x,t).$

Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\ w &= g(t) &&\text{при}\quad x = 0 &&\text{(граничное условие)},\\ w &= h(t) &&\text{при}\quad x = l &&\text{(граничное условие)}.\end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t) = \int_0^t \int_0^l G(x,\xi,t-\tau)\Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau + \int_0^l G(x,\xi,t)f(\xi)\,d\xi +$$
$$+ a^4\int_0^t g(\tau)\Lambda_1(x,t-\tau)\,d\tau - (a^2 + l^2)^2\int_0^t h(\tau)\Lambda_2(x,t-\tau)\,d\tau.$$

Здесь функция Грина G определяется по формулам

$$G(x,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n(x)y_n(\xi)\exp(-\mu_n^2 t)}{\|y_n\|^2(\xi^2 + a^2)^2}, \quad \mu_n^2 = \Bigl[\frac{\pi n a}{\operatorname{arctg}(l/a)}\Bigr]^2 - a^2,$$
$$y_n(x) = \sqrt{x^2 + a^2}\sin\Bigl[\pi n\frac{\operatorname{arctg}(x/a)}{\operatorname{arctg}(l/a)}\Bigr], \quad \|y_n\|^2 = \frac{\operatorname{arctg}(l/a)}{2a},$$

а функции Λ_1 и Λ_2 выражаются через функцию Грина следующим образом:

$$\Lambda_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,t)\Big|_{\xi=0}, \quad \Lambda_2(x,t) = \frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,t)\Big|_{\xi=l}.$$

⊙ *Литература*: А. Г. Бутковский (1979, стр. 69).

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = (x - a_1)^2(x - a_2)^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - bw, \qquad a_1 \neq a_2.$

Преобразование

$$w(x,t) = (x - a_2)e^{-bt}u(\xi,\tau), \quad \xi = \ln\frac{x - a_1}{x - a_2}, \quad \tau = (a_1 - a_2)^2 t$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial u}{\partial \xi},$$

которое рассматривается в разд. 1.1.4.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = (a_2x^2 + a_1x + a_0)^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw.$

Преобразование

$$w(x,t) = \exp\bigl[(a_2a_0 - \tfrac{1}{4}a_1^2 + b)t\bigr]\sqrt{a_2x^2 + a_1x + a_0}\,u(\xi,t), \quad \xi = \int\frac{dx}{a_2x^2 + a_1x + a_0}$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = \partial_{\xi\xi} u$, которое рассматривается в разделе 1.1.1.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^{1-n}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

Это уравнение встречается в задачах диффузионного пограничного слоя (см. уравнение 1.9.1.3) и является частным случаем 1.8.6.1 при $f(x) = ax^{1-n}$. Кроме того, при $n = -1$ это частный случай уравнения 1.3.5.1, а при $n = -3$ это уравнение вида 1.3.6.2 (в этих случаях уравнение сводится к уравнению с постоянными коэффициентами). При $n = 0$ см. уравнение 1.3.4.1.

1°. Частные решения (A, B, μ — произвольные постоянные):

$$w(x) = Ax + B,$$
$$w(x,t) = Aan(n+1)t + Ax^{n+1} + B,$$
$$w(x,t) = Aa(n+1)(n+2)tx + Ax^{n+2} + B,$$
$$w(x,t) = A\left[an(n+1)t^2 + 2tx^{n+1} + \frac{x^{2n+2}}{a(n+1)(2n+1)}\right] + B,$$
$$w(x,t) = A\left[a(n+1)(n+2)t^2x + 2tx^{n+2} + \frac{x^{2n+3}}{a(n+1)(2n+3)}\right] + B,$$
$$w(x,t) = A + Bt^{-\frac{n}{n+1}}\exp\left[-\frac{x^{n+1}}{a(n+1)^2t}\right],$$
$$w(x,t) = A + Bxt^{-\frac{n+2}{n+1}}\exp\left[-\frac{x^{n+1}}{a(n+1)^2t}\right],$$
$$w(x,t) = e^{\mu t}\sqrt{x}\left[AJ_{\frac{1}{2q}}\left(\frac{\sqrt{-\mu}}{\sqrt{a}\,q}x^q\right) + BY_{\frac{1}{2q}}\left(\frac{\sqrt{-\mu}}{\sqrt{a}\,q}x^q\right)\right] \quad \text{при } \mu < 0,$$
$$w(x,t) = e^{\mu t}\sqrt{x}\left[AI_{\frac{1}{2q}}\left(\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{a}\,q}x^q\right) + BK_{\frac{1}{2q}}\left(\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{a}\,q}x^q\right)\right] \quad \text{при } \mu > 0,$$

где $q = \frac{1}{2}(n+1)$; $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ — функции Бесселя; $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ — модифицированные функции Бесселя.

Пусть $2/(n+1) = 2m+1$, где m — целое число. Частные решения (A, B, μ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = e^{\mu t}x(x^{1-2q}D)^{m+1}\left[A\exp\left(\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{a}\,q}x^q\right) + B\exp\left(-\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{a}\,q}x^q\right)\right] \quad \text{при } m \geqslant 0,$$
$$w(x,t) = e^{\mu t}x(x^{1-2q}D)^{-m}\left[A\exp\left(\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{a}\,q}x^q\right) + B\exp\left(-\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{a}\,q}x^q\right)\right] \quad \text{при } m < 0,$$

где $D = \dfrac{d}{dx}$, $q = \dfrac{n+1}{2} = \dfrac{1}{2m+1}$.

2°. Пусть $w = w(x,t)$ — некоторое решение исходного уравнения. Тогда функции

$$w_1 = Aw(\lambda x,\ \lambda^{n+1}t + C),$$
$$w_2 = \frac{A}{(\delta+\beta t)^{nk}}\exp\left[-\frac{\beta k^2x^{n+1}}{a(\delta+\beta t)}\right]w\left(\frac{x}{(\delta+\beta t)^{2k}},\ \frac{\gamma+\lambda t}{\delta+\beta t}\right), \qquad k = \frac{1}{n+1}, \quad \lambda\delta - \beta\gamma = 1,$$

где A, C, β, δ, λ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

3°. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} &w = w_0 &&\text{при} && t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\ &w = w_1 &&\text{при} && x = 0 &&\text{(граничное условие)},\\ &w \to w_0 &&\text{при} && x \to \infty &&\text{(граничное условие)}, \end{aligned}$$

где $w_0 = \text{const}$, $w_1 = \text{const}$.

Решение:

$$\frac{w - w_1}{w_0 - w_1} = \frac{1}{\Gamma(k)}\gamma\left(k,\ \frac{k^2x^{n+1}}{at}\right), \qquad k = \frac{1}{n+1},$$

где $\Gamma(k) = \gamma(k,\infty)$ — гамма-функция, $\gamma(k,\zeta) = \displaystyle\int_0^\zeta \zeta^{k-1}e^{-\zeta}d\zeta$ — неполная гамма-функция.

4°. Преобразование

$$\tau = \tfrac{1}{4}a(n+1)^2 t, \qquad \xi = x^{\frac{n+1}{2}}$$

приводит к уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{1-2k}{\xi}\frac{\partial w}{\partial \xi}, \qquad k = \frac{1}{n+1},$$

которое рассматривается в разд. 1.2.5.

5°. Укажем два дискретных преобразования, сохраняющих вид исходного уравнения (при которых меняется параметр n).

5.1. Точечное преобразование

$$z = \frac{1}{x}, \quad u = \frac{w}{x} \qquad \text{(преобразование } \mathcal{F}\text{)}$$

приводит к уравнению аналогичного вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = az^{n+3}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{1}$$

Преобразование $\mathcal{F}$ меняет параметры уравнения по правилу $n \overset{\mathcal{F}}{\Longrightarrow} -n-2$. Повторное действие преобразования $\mathcal{F}$ приводит к исходному уравнению.

5.2. Используя преобразование Беклунда (см. 1.8.6.1, п. 5.2)

$$\xi = x^n, \quad w = \frac{\partial v}{\partial \xi} \qquad \text{(преобразование } \mathcal{H}\text{)}$$

и интегрируя полученное уравнение по переменной ξ, получим

$$\frac{\partial v}{\partial t} = an^2 \xi^{\frac{n-1}{n}}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}. \tag{2}$$

Преобразование $\mathcal{H}$ меняет параметры уравнения по правилу $n \overset{\mathcal{H}}{\Longrightarrow} \dfrac{1}{n}$. Повторное действие преобразования $\mathcal{H}$ приводит к исходному уравнению.

Комбинация преобразований $\mathcal{G} = \mathcal{H} \circ \mathcal{F}$ меняет параметры уравнения по правилу $n \overset{\mathcal{G}}{\Longrightarrow} -\dfrac{1}{n+2}$.

Исходное уравнение сводится к уравнению с постоянными коэффициентами при $n = -3$ (см. 1.3.6.2). Подставляя это значение в (2), получим уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A\xi^{4/3}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2},$$

которое также приводится к уравнению с постоянными коэффициентами.

Используя преобразования $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, аналогичным образом можно найти и некоторые другие уравнения рассматриваемого типа, которые приводятся к уравнению теплопроводности с постоянными коэффициентами.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.8.4.5 при $f(t) = b$. Переходя от x, t к новым переменным

$$z = xe^{bt}, \quad \tau = \frac{a}{b(2-n)}e^{b(2-n)t} + \text{const},$$

получим уравнение вида 1.3.6.6:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = z^n\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$$

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\Big(x^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + nx^{n-1}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big).$

Это уравнение описывает теплоперенос в неподвижной среде (твердом теле), когда коэффициент температуропроводности является степенной функцией координаты. Его можно записать в более привычном для приложений виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\frac{\partial w}{\partial x}\Big).$$

1°. При $n = 2$ см. уравнение 1.3.5.1. При $n \neq 2$ переходя от t, x к новым переменным $\tau = \frac{1}{4}a(2-n)^2 t$, $z = x^{\frac{2-n}{2}}$, получим уравнение вида 1.2.5:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{n}{2-n}\frac{1}{z}\frac{\partial w}{\partial z}.$$

2°. Преобразование

$$w(x,t) = x^{1-n}u(\xi,t), \quad \xi = x^{3-2n}$$

приводит к уравнению аналогичного вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = b\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi^{\frac{4-3n}{3-2n}}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right), \qquad b = a(3-2n)^2.$$

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\left(x^{2n}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + nx^{2n-1}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right).$

Частный случай уравнения 1.8.4.7 при $f(t) = g(t) = 0$.

Замена

$$\xi = \begin{cases} \dfrac{1}{1-n}x^{1-n} & \text{при } n \neq 1, \\ \ln|x| & \text{при } n = 1 \end{cases}$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t w = a\partial_{\xi\xi} w$, которое рассматривается в разделе 1.1.1.

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(bt^m + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.8.4.5 при $f(t) = bt^m + c$.

1.3.7. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(x,t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x,t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(x,t)w$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = axt\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx + ct^n)w.$

Частный случай уравнения 1.8.8.1 при $f(t) = at$, $g(t) = 0$, $h(t) = b$, $s(t) = ct^n$.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = axt^k\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bxt^m\dfrac{\partial w}{\partial x} + ct^n w.$

Частный случай уравнения 1.8.8.1 при $f(t) = at^k$, $g(t) = bt^m$, $h(t) = 0$, $s(t) = ct^n$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = x\left(at^k\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bt^m\dfrac{\partial w}{\partial x} + ct^n w\right).$

Частный случай уравнения 1.8.8.1 при $f(t) = at^k$, $g(t) = bt^m$, $h(t) = ct^n$, $s(t) = 0$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^2t^k\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bt^m x\dfrac{\partial w}{\partial x} + ct^n w.$

Частный случай уравнения 1.8.8.2 при $f(t) = at^k$, $g(t) = bt^m$, $h(t) = ct^n$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^3t^m\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bxt^k\dfrac{\partial w}{\partial x} + ct^l w.$

Частный случай уравнения 1.8.8.7 при $n = 3$, $f(t) = at^m$, $g(t) = bt^k$, $h(t) = ct^l$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^4t^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bt^m w.$

Частный случай уравнения 1.8.8.4 при $f(t) = at^n$, $g(t) = bt^m$.

1°. Частные решения (A, B, λ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = (Ax + B)\exp\Bigl(\frac{b}{m+1}t^{m+1}\Bigr),$$
$$w(x,t) = A\Bigl(\frac{2a}{n+1}t^{n+1}x + \frac{1}{x}\Bigr)\exp\Bigl(\frac{b}{m+1}t^{m+1}\Bigr),$$
$$w(x,t) = Ax\exp\Bigl(\frac{b}{m+1}t^{m+1} + \frac{a\lambda^2}{n+1}t^{n+1} + \frac{\lambda}{x}\Bigr).$$

2°. Преобразование

$$w(x,t) = x\exp\Bigl(\frac{b}{m+1}t^{m+1}\Bigr)u(\xi,\tau), \quad \xi = \frac{1}{x}, \quad \tau = \frac{a}{n+1}t^{n+1}$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_\tau u = \partial_{\xi\xi}u$, которое рассматривается в разделе 1.1.1.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = at^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bt^m x + ct^i)\dfrac{\partial w}{\partial x} + (dt^l x + et^p)w.$

Частный случай уравнения 1.8.7.4 (поэтому оно может быть сведено к уравнению с постоянными коэффициентами, которое рассматривается в разд. 1.1.1).

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = at^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bt^m x + ct^i)\dfrac{\partial w}{\partial x} + (dt^l x^2 + et^p x + st^q)w.$

Частный случай уравнения 1.8.7.5.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^n t^m\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bxt^k\dfrac{\partial w}{\partial x} + ct^p w.$

Частный случай уравнения 1.8.8.7 при $f(t) = at^m$, $g(t) = bt^k$, $h(t) = ct^p$.

1.3.8. Уравнение массопереноса в пленке жидкости $(1 - y^2)\dfrac{\partial w}{\partial x} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}$

Это уравнение описывает процессы стационарного тепло- и массопереноса в пленке жидкости с параболическим профилем скорости. Физический смысл переменных: w — безразмерная температура (концентрация); x и y — безразмерные координаты, отсчитываемые соответственно вдоль и поперек пленки (значение $y = 0$ соответствует свободной поверхности пленки, а $y = 1$ — твердой поверхности, по которой она стекает), $\mathrm{Pe} = 1/a$ — число Пекле. В практических приложениях обычно встречаются смешанные граничные условия.

1.3.8-1. Частные решения (A, B, λ — произвольные постоянные):

$$w(y) = A + By,$$
$$w(x,y) = A\exp\bigl(-a\lambda^2 x\bigr)\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}\lambda y^2\bigr)\,\Phi\bigl(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\lambda,\ \tfrac{1}{2};\ \lambda y^2\bigr),$$
$$w(x,y) = A\exp\bigl(-a\lambda^2 x\bigr)y\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}\lambda y^2\bigr)\,\Phi\bigl(\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{4}\lambda,\ \tfrac{3}{2};\ \lambda y^2\bigr),$$

где $\Phi(\alpha,\ \beta;\ z) = 1 + \sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+m-1)}{\beta(\beta+1)\dots(\beta+m-1)}\dfrac{z^m}{m!}$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

1.3.8-2. Массообмен между газом и пленкой жидкости.

Массообмен между газом и пленкой жидкости, когда концентрация примеси на поверхности пленки постоянна и отсутствует массоперенос через твердую поверхность, описывается граничными условиями:

$$w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (0 < y < 1),$$
$$w = 1 \quad \text{при} \quad y = 0 \quad (x > 0),$$
$$\partial_y w = 0 \quad \text{при} \quad y = 1 \quad (x > 0).$$

ТАБЛИЦА 16

Собственные значения λ_m и коэффициенты разложения A_m в решении (1).

m	λ_m	A_m	m	λ_m	A_m
1	2,2631	1,3382	6	22,3181	−0,1873
2	6,2977	−0,5455	7	26,3197	0,1631
3	10,3077	0,3589	8	30,3209	−0,1449
4	14,3128	−0,2721	9	34,3219	0,1306
5	18,3159	0,2211	10	38,3227	−0,1191

Решение исходного уравнения с этими граничными условиями имеет вид

$$w(x,y) = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} A_m \exp\bigl(-a\lambda_m^2 x\bigr) F_m(y), \qquad F_m(y) = y\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}\lambda_m y^2\bigr)\Phi\bigl(\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{4}\lambda_m,\ \tfrac{3}{2};\ \lambda_m y^2\bigr), \tag{1}$$

где функции F_m и коэффициенты A_m и λ_m не зависят от параметра a.

Собственные значения λ_m являются решениями трансцендентного уравнения

$$\lambda_m \Phi\bigl(\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{4}\lambda_m,\ \tfrac{3}{2};\ \lambda_m\bigr) - \Phi\bigl(\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{4}\lambda_m,\ \tfrac{1}{2};\ \lambda_m\bigr) = 0.$$

Коэффициенты ряда A_m вычисляются по формулам

$$A_m = \frac{\displaystyle\int_0^1 (1-y^2) F_m(y)\,dy}{\displaystyle\int_0^1 (1-y^2)\bigl[F_m(y)\bigr]^2\,dy}, \qquad \text{где} \quad m = 1,\ 2,\ \ldots$$

В табл. 16 указаны 10 первых собственных значений λ_m и коэффициентов A_m.

Асимптотика решения при $ax \to 0$ определяется формулой

$$w = \operatorname{erfc}\Bigl(\frac{y}{2\sqrt{ax}}\Bigr),$$

где $\operatorname{erfc} z = \displaystyle\int_z^{\infty} \exp\bigl(-\xi^2\bigr)\,d\xi$ — дополнительный интеграл вероятностей.

1.3.8-3. Растворение пластины ламинарной пленкой жидкости.

Растворение пластины ламинарной пленкой жидкости, когда концентрация на твердой поверхности постоянна и отсутствует поток вещества из пленки в газ, описывается граничными условиями:

$$\begin{aligned} w &= 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (0 < y < 1),\\ \partial_y w &= 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \quad (x > 0),\\ w &= 1 \quad \text{при} \quad y = 1 \quad (x > 0). \end{aligned}$$

Решение исходного уравнения с этими граничными условиями имеет вид

$$w(x,y) = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} A_m \exp\bigl(-a\lambda_m^2 x\bigr) G_m(y), \qquad G_m(y) = \exp\bigl(-\tfrac{1}{2}\lambda_m y^2\bigr)\,\Phi\bigl(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\lambda_m,\ \tfrac{1}{2};\ \lambda_m y^2\bigr), \tag{2}$$

где функции G_m и коэффициенты A_m и λ_m не зависят от параметра a.

Собственные значения λ_m являются решениями трансцендентного уравнения

$$\Phi\bigl(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\lambda_m,\ \tfrac{1}{2};\ \lambda_m\bigr) = 0.$$

Для определения λ_m удобно использовать приближенную зависимость

$$\lambda_m = 4m + 1{,}68 \qquad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{3}$$

максимальная погрешность которой меньше 0,2%.

Численные значения коэффициентов A_m хорошо аппроксимируются формулами

$$A_0 = 1{,}2, \quad A_m = (-1)^m 2{,}27\lambda_m^{-7/6} \qquad \text{при} \quad m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

где собственные значения λ_m приведены в (3). Максимальная погрешность выражений для A_m составляет меньше 0,1%.

Асимптотика решения при $ax \to 0$ определяется формулой

$$w = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \Gamma\left(\tfrac{1}{3},\ \tfrac{2}{9}\zeta\right), \quad \zeta = \frac{(1-y)^3}{ax},$$

где $\Gamma(\alpha, z) = \displaystyle\int_z^\infty e^{-\xi}\xi^{\alpha-1}\,d\xi$ — неполная гамма-функция, $\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha, 0)$ — гамма-функция, $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \approx 2{,}679$.

⊙ *Литература к разделу 1.3.8*: Z. Rotem, J. E. Neilson (1966), E. J. Davis (1973), А. М. Кутепов, А. Д. Полянин, З. Д. Запрянов и др. (1996, стр. 114–122).

1.3.9. Уравнения вида $f(x,y)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x,y)\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + h(x,y)$

1. $ax^n \dfrac{\partial w}{\partial x} + bx^k y \dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$

Частный случай уравнения 1.9.1.1 при $f(x) = ax^n$, $g(x) = bx^k$.

Преобразование

$$t = \frac{1}{a}\int \exp\left[-\frac{2b}{a(k-n+1)}x^{k-n+1}\right]\frac{dx}{x^n}, \quad z = y\exp\left[-\frac{b}{a(k-n+1)}x^{k-n+1}\right]$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t w = \partial_{zz} w$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

2. $ax^n \dfrac{\partial w}{\partial x} + bx^k y \dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} - cx^m w.$

Частный случай уравнения 1.9.1.2 при $f(x) = ax^n$, $g(x) = bx^k$, $h(x) = cx^m$.

3. $ax^m y^{n-1} \dfrac{\partial w}{\partial x} + bx^k y^n \dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$

Частный случай уравнения 1.9.1.3 при $f(x) = ax^m$, $g(x) = bx^k$.

Преобразование

$$t = \frac{1}{a}\int \exp\left[-\frac{b(n+1)}{a(k-m+1)}x^{k-m+1}\right]\frac{dx}{x^m}, \quad z = y\exp\left[-\frac{b}{a(k-m+1)}x^{k-m+1}\right]$$

приводит к более простому уравнению вида 1.3.6.6:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = z^{1-n}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$$

4. $a\left(\dfrac{y}{\sqrt{x}}\right)^n \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{b}{\sqrt{x}}\left(\dfrac{y}{\sqrt{x}}\right)^k \dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$

Частный случай уравнения 1.9.1.4 при $f(z) = az^n$, $g(z) = bz^k$.

► *Другие уравнения этого вида см. в разд.* 1.9.1.

1.4. Уравнения с произвольными параметрами, содержащие экспоненциальные функции

1.4.1. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t)w$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(be^{\beta t} + c\right)w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.1 при $f(t) = be^{\beta t} + c$.

1°. Частные решения (A, B, λ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = (Ax+B)\exp\Bigl(\frac{b}{\beta}e^{\beta t} + ct\Bigr),$$
$$w(x,t) = A(x^2+2at)\exp\Bigl(\frac{b}{\beta}e^{\beta t} + ct\Bigr),$$
$$w(x,t) = A\exp\Bigl(\lambda x + a\lambda^2 t + \frac{b}{\beta}e^{\beta t} + ct\Bigr).$$

2°. Замена $w(x,t) = u(x,t)\exp\Bigl(\frac{b}{\beta}e^{\beta t} + ct\Bigr)$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a\partial_{xx}u$, которое рассматривается в разделе 1.1.1.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (be^{\beta t} + cx)w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.6 при $f(t) = c$, $g(t) = be^{\beta t}$.

1°. Частные решения (A, λ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = A\exp\Bigl(cxt + \frac{b}{\beta}e^{\beta t} + \frac{1}{3}ac^2t^3\Bigr),$$
$$w(x,t) = A\bigl(x + act^2\bigr)\exp\Bigl(cxt + \frac{b}{\beta}e^{\beta t} + \frac{1}{3}ac^2t^3\Bigr),$$
$$w(x,t) = A\exp\Bigl[x(ct+\lambda) + \frac{b}{\beta}e^{\beta t} + \frac{1}{3}ac^2t^3 + ac\lambda t^2 + a\lambda^2 t\Bigr].$$

2°. Преобразование

$$w(x,t) = u(z,t)\exp\Bigl(cxt + \frac{b}{\beta}e^{\beta t} + \frac{1}{3}ac^2t^3\Bigr), \quad z = x + act^2$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a\partial_{zz}u$, которое рассматривается в разделе 1.1.1.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (be^{\beta x} - c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.2 при $f(x) = be^{\beta x} - c$.

Частные решения (A, λ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = A\exp(-\lambda t)J_\nu\Bigl(\frac{2\sqrt{b}}{\beta\sqrt{a}}e^{\beta x/2}\Bigr), \quad \nu = \frac{2}{\beta}\sqrt{\frac{c-\lambda}{a}},$$
$$w(x,t) = A\exp(-\lambda t)Y_\nu\Bigl(\frac{2\sqrt{b}}{\beta\sqrt{a}}e^{\beta x/2}\Bigr), \quad \nu = \frac{2}{\beta}\sqrt{\frac{c-\lambda}{a}},$$

где $J_\nu(\xi)$ и $Y_\nu(\xi)$ — функции Бесселя первого и второго рода.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bxe^{\beta t} + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.6 при $f(t) = be^{\beta t}$, $g(t) = c$.

1°. Частные решения (A, λ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = A\exp\Bigl(\frac{b}{\beta}xe^{\beta t} + \frac{ab^2}{2\beta^3}e^{2\beta t} + ct\Bigr),$$
$$w(x,t) = A\Bigl(x + \frac{2ab}{\beta^2}e^{\beta t}\Bigr)\exp\Bigl(\frac{b}{\beta}xe^{\beta t} + \frac{ab^2}{2\beta^3}e^{2\beta t} + ct\Bigr),$$
$$w(x,t) = A\exp\Bigl[x\Bigl(\frac{b}{\beta}e^{\beta t} + \lambda\Bigr) + \frac{ab^2}{2\beta^3}e^{2\beta t} + \frac{2ab\lambda}{\beta^2}e^{\beta t} + (a\lambda^2 + c)t\Bigr].$$

2°. Преобразование

$$w(x,t) = u(z,t)\exp\Bigl(\frac{b}{\beta}xe^{\beta t} + \frac{ab^2}{2\beta^3}e^{2\beta t} + ct\Bigr), \quad z = x + \frac{2ab}{\beta^2}e^{\beta t}$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a\partial_{zz}u$, которое рассматривается в разделе 1.1.1.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(be^{\beta t} + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.3 при $f(t) = be^{\beta t} + c$.

1°. Частные решения (A, λ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = A\exp\Big[x\Big(\frac{b}{\beta}e^{\beta t} + ct\Big) + a\phi(t)\Big],$$
$$w(x,t) = A\Big[x + a\Big(\frac{2b}{\beta^2}e^{\beta t} + ct^2\Big)\Big]\exp\Big[x\Big(\frac{b}{\beta}e^{\beta t} + ct\Big) + a\phi(t)\Big],$$
$$w(x,t) = A\exp\Big[x\Big(\frac{b}{\beta}e^{\beta t} + ct + \lambda\Big) + a\lambda\Big(\frac{2b}{\beta^2}e^{\beta t} + ct^2 + \lambda t\Big) + a\phi(t)\Big],$$

где $\phi(t) = \frac{1}{2}b^2\beta^{-3}e^{2\beta t} + 2bc\beta^{-3}(\beta t - 1)e^{\beta t} + \frac{1}{3}c^2t^3$.

2°. Преобразование

$$w(x,t) = u(z,t)\exp\Big[x\Big(\frac{b}{\beta}e^{\beta t} + ct\Big) + a\phi(t)\Big], \quad z = x + a\Big(\frac{2b}{\beta^2}e^{\beta t} + ct^2\Big)$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a\partial_{zz}u$, которое рассматривается в разделе 1.1.1.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x^2(be^{\beta t} + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.7.5 при $n(t) = a$, $f(t) = g(t) = s(t) = p(t) = 0$, $h(t) = be^{\beta t} + c$.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (be^{\beta t} + ce^{\lambda t})w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.1 при $f(t) = be^{\beta t} + ce^{\lambda t}$.

1°. Частные решения (A, B, ν — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = (Ax + B)\exp\Big(\frac{b}{\beta}e^{\beta t} + \frac{c}{\lambda}e^{\lambda t}\Big),$$
$$w(x,t) = A(x^2 + 2at)\exp\Big(\frac{b}{\beta}e^{\beta t} + \frac{c}{\lambda}e^{\lambda t}\Big),$$
$$w(x,t) = A\exp\Big(\nu x + a\nu^2 t + \frac{b}{\beta}e^{\beta t} + \frac{c}{\lambda}e^{\lambda t}\Big).$$

2°. Замена $w(x,t) = u(x,t)\exp\Big(\dfrac{b}{\beta}e^{\beta t} + \dfrac{c}{\lambda}e^{\lambda t}\Big)$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a\partial_{xx}u$, которое рассматривается в разделе 1.1.1.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (be^{\beta x} + ce^{\lambda t} + d)w.$

Замена $w(x,t) = u(x,t)\exp\Big(\dfrac{c}{\lambda}e^{\lambda t}\Big)$ приводит к уравнению вида 1.4.1.3:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (be^{\beta x} + d)u.$$

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (be^{\beta x + \lambda t} + c)w.$

При $\beta = 0$ см. уравнение 1.4.1.1, при $\lambda = 0$ см. уравнение 1.4.1.3.

При $\beta \neq 0$ преобразование

$$w(x,t) = u(z,t)e^{\mu x}, \quad z = x + \frac{\lambda}{\beta}t, \qquad \text{где} \quad \mu = \frac{\lambda}{2a\beta},$$

приводит к уравнению вида 1.4.1.3:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (be^{\beta z} + c + a\mu^2)u.$$

1.4.2. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t)\dfrac{\partial w}{\partial x}$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (be^{\beta t} + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Частный случай уравнения 1.8.2.1 при $f(t) = be^{\beta t} + c$.

1°. Частные решения (A, B, λ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = Ax + A\Big(\frac{b}{\beta}e^{\beta t} + ct\Big) + B,$$

$$w(x,t) = A\Big(x + \frac{b}{\beta}e^{\beta t} + ct\Big)^2 + 2aAt + B,$$

$$w(x,t) = A\exp\Big[\lambda x + \lambda\frac{b}{\beta}e^{\beta t} + (a\lambda^2 + c\lambda)t\Big] + B.$$

2°. Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x + \dfrac{b}{\beta}e^{\beta t} + ct$, получим уравнение с постоянными коэффициентами $\partial_t w = a\partial_{zz} w$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (be^{\beta x} + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Частный случай уравнения 1.8.2.2 при $f(x) = be^{\beta x} + c$.

1°. Частные решения (A, λ — произвольные постоянные):

$$\begin{aligned} w(x,t) &= A\exp(-\lambda t + k\beta x)\Phi\Big(k,\ 2k + 1 + \frac{c}{a\beta};\ -\frac{b}{a\beta}e^{\beta x}\Big),\\ w(x,t) &= A\exp(-\lambda t + k\beta x)\Psi\Big(k,\ 2k + 1 + \frac{c}{a\beta};\ -\frac{b}{a\beta}e^{\beta x}\Big), \end{aligned} \qquad (1)$$

где $k = k(\lambda)$ — корень квадратного уравнения $a\beta^2k^2 + c\beta k + \lambda = 0$; $\Phi(\alpha,\nu;z)$ и $\Psi(\alpha,\nu;z)$ — вырожденные гипергеометрические функции. [О вырожденных гипергеометрических функциях см. книги М. Абрамовица, И. Стиган (1979) и Г. Бейтмена, А. Эрдейи (1973, т. 1).]

Замечание. В решениях (1) параметр k можно считать произвольным, а параметр $\lambda = -a\beta^2k^2 - c\beta k$.

2°. Другие частные решения (A, B — произвольные постоянные):

$$w(x) = A + B\int F(x)\,dx, \quad F(x) = \exp\Big(-\frac{b}{a\beta}e^{\beta x} - \frac{c}{a}x\Big),$$

$$w(x,t) = Aat + A\int F(x)\Big(\int\frac{dx}{F(x)}\Big)dx,$$

$$w(x,t) = AatG(x) + A\int F(x)\Big(\int\frac{G(x)\,dx}{F(x)}\Big)dx, \quad G(x) = \int F(x)\,dx.$$

3°. Замена $z = e^{\beta x}$ приводит к уравнению вида 1.3.5.4:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\beta^2z^2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \beta z(bz + c + a\beta)\frac{\partial w}{\partial z}.$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(be^{\beta t} + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Частный случай уравнения 1.8.2.3 при $f(t) = be^{\beta t} + c$.

1°. Частные решения (A, B, λ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = AxF(t) + B, \quad F(t) = \exp\Big(\frac{b}{\beta}e^{\beta t} + ct\Big),$$

$$w(x,t) = Ax^2F^2(t) + 2Aa\int F^2(t)\,dt + B,$$

$$w(x,t) = A\exp\Big[\lambda xF(t) + a\lambda^2\int F^2(t)\,dt\Big] + B.$$

2°. Переходя от t, x к новым переменным (A, B — произвольные постоянные)

$$\tau = \int F^2(t)\,dt + A, \quad z = xF(t), \qquad \text{где} \quad F(t) = \exp\Big(\frac{b}{\beta}e^{\beta t} + ct\Big),$$

для функции $w(\tau, z)$ получим уравнение с постоянными коэффициентами $\partial_\tau w = a\partial_{zz} w$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (be^{\beta t} + ce^{\lambda t})\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.8.2.1 при $f(t) = be^{\beta t} + ce^{\lambda t}$.

1°. Частные решения (A, B, μ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = Ax + A\Big(\frac{b}{\beta}e^{\beta t} + \frac{c}{\lambda}e^{\lambda t}\Big) + B,$$

$$w(x,t) = A\Big(x + \frac{b}{\beta}e^{\beta t} + \frac{c}{\lambda}e^{\lambda t}\Big)^2 + 2aAt + B,$$

$$w(x,t) = A\exp\Big(\mu x + \mu\frac{b}{\beta}e^{\beta t} + \mu\frac{c}{\lambda}e^{\lambda t} + a\mu^2 t\Big) + B.$$

2°. Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x + \dfrac{b}{\beta}e^{\beta t} + \dfrac{c}{\lambda}e^{\lambda t}$, получим уравнение с постоянными коэффициентами $\partial_t w = a\partial_{zz} w$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (be^{\beta t + \lambda x} + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

При $\beta = 0$ см. уравнение 1.4.2.2, при $\lambda = 0$ см. уравнение 1.4.2.1.

При $\lambda \neq 0$ замена $z = x + (\beta/\lambda)t$ приводит к уравнению вида 1.4.2.2:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \Big(be^{\lambda z} + c - \frac{\beta}{\lambda}\Big)\frac{\partial w}{\partial z}.$$

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (be^{\beta t} + cx)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.8.1.6 при $f(t) = c$, $g(t) = be^{\beta t}$.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bxe^{\beta t} + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.8.1.6 при $f(t) = be^{\beta t}$, $g(t) = c$.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bxe^{\beta t} + ce^{\lambda t})\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.8.1.6 при $f(t) = be^{\beta t}$, $g(t) = ce^{\lambda t}$.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(be^{\beta t} + ce^{\lambda t})\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.8.2.3 при $f(t) = be^{\beta t} + ce^{\lambda t}$.

1°. Частные решения (A, B, μ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = AxF(t) + B, \quad F(t) = \exp\Big(\frac{b}{\beta}e^{\beta t} + \frac{c}{\lambda}e^{\lambda t}\Big),$$

$$w(x,t) = Ax^2F^2(t) + 2Aa\int F^2(t)\,dt + B,$$

$$w(x,t) = A\exp\Big[\mu xF(t) + a\mu^2\int F^2(t)\,dt\Big] + B.$$

2°. Переходя от t, x к новым переменным (A, B — любые)

$$\tau = \int F^2(t)\,dt + A, \quad z = xF(t), \qquad \text{где} \quad F(t) = \exp\Big(\frac{b}{\beta}e^{\beta t} + \frac{c}{\lambda}e^{\lambda t}\Big),$$

для функции $w(\tau, z)$ получим уравнение с постоянными коэффициентами $\partial_\tau w = a\partial_{zz} w$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \Big(cxe^{\beta t} + \dfrac{b}{x}\Big)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.8.2.6 при $f(t) = ce^{\beta t}$.

1.4.3. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x,t)w$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial w}{\partial x} + (ce^{\beta t} + s)w.$

Замена

$$w(x,t) = u(x,t)\exp\left[-\frac{b}{2a}x + \frac{c}{\beta}e^{\beta t} + \left(s - \frac{b^2}{4a}\right)t\right]$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a\partial_{xx}u$, которое рассматривается в разделе 1.1.1.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial w}{\partial x} + (ce^{\beta x} + s)w.$

Замена $w(x,t) = u(x,t)\exp\left(-\dfrac{b}{2a}x\right)$ приводит к уравнению вида 1.4.1.3:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(ce^{\beta x} + s - \frac{b^2}{4a}\right)u.$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial w}{\partial x} + (ce^{\beta t} + se^{\mu t})w.$

Замена

$$w(x,t) = u(x,t)\exp\left(-\frac{b}{2a}x + \frac{c}{\beta}e^{\beta t} + \frac{s}{\mu}e^{\mu t} - \frac{b^2}{4a}t\right)$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a\partial_{xx}u$, которое рассматривается в разделе 1.1.1.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial w}{\partial x} + (ce^{\beta x} + se^{\mu t})w.$

Замена $w(x,t) = u(x,t)\exp\left(\dfrac{s}{\mu}e^{\mu t}\right)$ приводит к уравнению вида 1.4.3.2:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial u}{\partial x} + ce^{\beta x}u.$$

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta x\dfrac{\partial w}{\partial x} + ce^{2\beta t}w.$

Переходя от t, x к новым переменным (A, B — любые)

$$\tau = \frac{A^2}{2\beta}e^{2\beta t} + B, \quad z = Axe^{\beta t},$$

для функции $w(\tau, z)$ получим уравнение с постоянными коэффициентами вида 1.1.3:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + cA^{-2}w.$$

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a_2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (a_1e^{\beta x} + b_1)\dfrac{\partial w}{\partial x} + (a_0e^{2\beta x} + b_0e^{\beta x} + c_0)w.$

Замена $z = e^{\beta x}$ приводит к уравнению вида 1.3.5.4:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a_2\beta^2z^2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \beta z(a_1z + b_1 + a_2\beta)\frac{\partial w}{\partial z} + (a_0z^2 + b_0z + c_0)w.$$

1.4.4. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x,t)w$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (be^{\beta t} + cx)w.$

Частный случай уравнения 1.8.8.1 при $f(t) = a$, $g(t) = 0$, $h(t) = c$, $s(t) = be^{\beta t}$.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bxe^{\beta t} + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.8.1 при $f(t) = a$, $g(t) = 0$, $h(t) = be^{\beta t}$, $s(t) = c$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx\dfrac{\partial w}{\partial x} + (ce^{\beta t} + d)w.$

Частный случай уравнения 1.8.8.1 при $f(t) = a$, $g(t) = b$, $h(t) = 0$, $s(t) = ce^{\beta t} + d$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (be^{\beta t} + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.8.2 при $f(t) = a$, $g(t) = 0$, $h(t) = be^{\beta t} + c$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^4\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (be^{\beta t} + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.8.4 при $f(t) = a$, $g(t) = be^{\beta t} + c$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(be^{\beta t} + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.8.4.5 при $f(t) = be^{\beta t} + c$.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bxe^{\beta t}\dfrac{\partial w}{\partial x} + ce^{\mu t}w.$

Частный случай уравнения 1.8.8.7 при $f(t) = a$, $g(t) = be^{\beta t}$, $h(t) = ce^{\mu t}$.

1.4.5. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ae^{\beta x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x,t)w$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ae^{\beta x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

Частный случай уравнения 1.8.6.1 при $f(x) = ae^{\beta x}$.

Частные решения (A, B, μ — произвольные постоянные):

$$\begin{aligned}
w(x) &= Ax + B,\\
w(x,t) &= A\bigl(a\beta^2 t + e^{-\beta x}\bigr) + B,\\
w(x,t) &= A\bigl(a\beta^3 tx + \beta xe^{-\beta x} + 2e^{-\beta x}\bigr) + B,\\
w(x,t) &= A\bigl(2a^2\beta^4 t^2 + 4a\beta^2 te^{-\beta x} + e^{-2\beta x}\bigr) + B,\\
w(x,t) &= A\exp(-\mu t)J_0\Bigl(\frac{2}{\beta}\sqrt{\frac{\mu}{a}}\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}\beta x\bigr)\Bigr),\\
w(x,t) &= A\exp(-\mu t)Y_0\Bigl(\frac{2}{\beta}\sqrt{\frac{\mu}{a}}\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}\beta x\bigr)\Bigr),
\end{aligned}$$

где $J_0(\xi)$ и $Y_0(\xi)$ — функции Бесселя.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ae^{\beta x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw.$

1°. Частные решения (A, B, μ — произвольные постоянные):

$$\begin{aligned}
w(x,t) &= e^{bt}(Ax + B),\\
w(x,t) &= Ae^{bt}\bigl(a\beta^2 t + e^{-\beta x}\bigr) + Be^{bt},\\
w(x,t) &= Ae^{bt}\bigl(a\beta^3 tx + \beta xe^{-\beta x} + 2e^{-\beta x}\bigr) + Be^{bt},\\
w(x,t) &= Ae^{bt}\bigl(2a^2\beta^4 t^2 + 4a\beta^2 te^{-\beta x} + e^{-2\beta x}\bigr),\\
w(x,t) &= A\exp(-\mu t)J_0\Bigl(\frac{2}{\beta}\sqrt{\frac{\mu+b}{a}}\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}\beta x\bigr)\Bigr),\\
w(x,t) &= A\exp(-\mu t)Y_0\Bigl(\frac{2}{\beta}\sqrt{\frac{\mu+b}{a}}\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}\beta x\bigr)\Bigr),
\end{aligned}$$

где $J_0(\xi)$ и $Y_0(\xi)$ — функции Бесселя.

2°. Замена $w(x,t) = e^{bt}u(x,t)$ приводит к уравнению вида 1.4.5.1: $\partial_t u = ae^{\beta x}\partial_{xx}u$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ae^{\beta x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (be^{\mu t} + c)w.$

1°. Частные решения (A, B, μ — произвольные постоянные):

$$w(x) = (Ax + B)\exp\Big(\frac{b}{\mu}e^{\mu t} + ct\Big),$$
$$w(x,t) = A\big(a\beta^2 t + e^{-\beta x}\big)\exp\Big(\frac{b}{\mu}e^{\mu t} + ct\Big),$$
$$w(x,t) = A\big(a\beta^3 tx + \beta x e^{-\beta x} + 2e^{-\beta x}\big)\exp\Big(\frac{b}{\mu}e^{\mu t} + ct\Big),$$
$$w(x,t) = A\exp\Big[\frac{b}{\mu}e^{\mu t} + (c-\mu)t\Big]J_0\Big(\frac{2}{\beta}\sqrt{\frac{\mu}{a}}\exp\big(-\tfrac{1}{2}\beta x\big)\Big).$$

2°. Замена $w(x,t) = \exp\Big(\dfrac{b}{\mu}e^{\mu t} + ct\Big)u(x,t)$ приводит к уравнению вида 1.4.5.1: $\partial_t u = ae^{\beta x}\partial_{xx}u$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\Big(e^{\beta x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta e^{\beta x}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big).$

Это уравнение описывает теплоперенос в неподвижной среде (твердом теле), когда коэффициент температуропроводности является экспоненциальной функцией координаты. Его можно записать в более привычном для приложений дивергентном виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\Big(e^{\beta x}\frac{\partial w}{\partial x}\Big).$$

1°. Частные решения (A, B, C, μ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = A\exp\Big(-\frac{e^{-\beta x}}{a\beta^2 t + C}\Big) + B,$$
$$w(x,t) = Aa\beta^2 t - A(\beta x + 1)e^{-\beta x} + B,$$
$$w(x,t) = 2Aa\beta^2 te^{-\beta x} + Ae^{-2\beta x} + B,$$
$$w(x,t) = Aa^2\beta^4 t^2 - 2Aa\beta^2 t(\beta x + 1)e^{-\beta x} - A(\beta x + \tfrac{5}{2})e^{-2\beta x} + B,$$
$$w(x,t) = Aa^2\beta^4 t^2 e^{-\beta x} + Aa\beta^2 te^{-2\beta x} + \tfrac{1}{6}Ae^{-3\beta x} + B,$$
$$w(x,t) = 2Aa^3\beta^6 t^3 e^{-\beta x} + 3Aa^2\beta^4 t^2 e^{-2\beta x} + Aa\beta^2 te^{-3\beta x} + \tfrac{1}{12}Ae^{-4\beta x} + B,$$
$$w(x,t) = e^{-n\beta x} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\big[n(n-1)\dots(n-k)\big]^2}{n(n-k)k!}(a\beta^2 t)^k e^{(k-n)\beta x},$$
$$w(x,t) = e^{\mu t - \frac{1}{2}\beta x}\Big[AJ_1\Big(\frac{2\sqrt{-\mu}}{\beta\sqrt{a}}e^{-\frac{1}{2}\beta x}\Big) + BY_1\Big(\frac{2\sqrt{-\mu}}{\beta\sqrt{a}}e^{-\frac{1}{2}\beta x}\Big)\Big] \quad \text{при } \mu < 0,$$
$$w(x,t) = e^{\mu t - \frac{1}{2}\beta x}\Big[AI_1\Big(\frac{2\sqrt{\mu}}{\beta\sqrt{a}}e^{-\frac{1}{2}\beta x}\Big) + BK_1\Big(\frac{2\sqrt{\mu}}{\beta\sqrt{a}}e^{-\frac{1}{2}\beta x}\Big)\Big] \quad \text{при } \mu > 0,$$

где $J_1(z)$ и $Y_1(z)$ — функции Бесселя, $I_1(z)$ и $K_1(z)$ — модифицированные функции Бесселя.

2°. Решение, содержащее произвольную функцию координаты:

$$w(x,t) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(at)^n}{n!}\boldsymbol{L}^n\big[f(x)\big], \qquad \boldsymbol{L} \equiv \frac{d}{dx}\Big(e^{\beta x}\frac{d}{dx}\Big),$$

где $f(x)$ — любая бесконечно дифференцируемая функция. Это решение удовлетворяет начальному условию $w(x,0) = f(x)$.

3°. Решение, содержащие произвольную функцию времени:

$$w(x,t) = A + e^{-\beta x}g(t) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\big[(n-1)!\big]^2(a\beta^2)^{n-1}}e^{-\beta nx}g_t^{(n-1)}(t),$$

где $g(t)$ — любая бесконечно дифференцируемая функция. Если $g(t)$ — полином, то ряд будет содержать конечное число слагаемых.

4°. Преобразование (C_1, C_2, C_3 — любые)

$$w(x,t) = u(\xi,\tau)\exp\left[-\frac{e^{-\beta x}}{a\beta^2(t+C_1)}\right], \quad \xi = x - \frac{1}{\beta}\ln\frac{C_2}{(t+C_1)^2}, \quad \tau = C_3 - \frac{C_2}{t+C_1}$$

приводит к к уравнению такого же вида

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a\frac{\partial}{\partial \xi}\left(e^{\beta\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right).$$

5°. Замена $z = e^{-\beta x}$ приводит к уравнению вида 1.3.4.1:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\beta^2 z\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$$

6°. Решение исходного уравнения (при постоянных значениях функции w на границе и в начальный момент времени) приведено в книге А. В. Лыкова (1967).

5. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = ae^{2\beta x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sqrt{a}\,e^{\beta x}\big(\sqrt{a}\,\beta e^{\beta x} + b\big)\frac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.8.5.2 при $f(t) = b$, $g(t) = 0$. Замена $\xi = \dfrac{1}{\sqrt{a}\,\beta}(1 - e^{-\beta x})$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами вида 1.1.4 при $\Phi \equiv 0$:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + b\frac{\partial w}{\partial \xi}.$$

6. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = ae^{2\beta x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sqrt{a}\,e^{\beta x}\big(\sqrt{a}\,\beta e^{\beta x} + be^{\mu t}\big)\frac{\partial w}{\partial x} + ce^{\nu t}w.$

Частный случай уравнения 1.8.5.2 при $f(t) = be^{\mu t}$, $g(t) = ce^{\nu t}$.

1.4.6. Другие уравнения

1. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = ae^{\beta t}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\mu t}\frac{\partial w}{\partial x} + ce^{\nu t}w.$

Частный случай уравнения 1.8.7.3 при $f(t) = ae^{\beta t}$, $g(t) = be^{\mu t}$, $h(t) = ce^{\nu t}$.

2. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = ae^{\beta t}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bxe^{\mu t}\frac{\partial w}{\partial x} + cxe^{\nu t}w.$

Частный случай уравнения 1.8.7.4 при $n(t) = ae^{\beta t}$, $f(t) = be^{\mu t}$, $g(t) = 0$, $h(t) = ce^{\nu t}$, $s(t) = 0$.

3. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = ae^{\beta x + \mu t}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\nu t}w.$

Преобразование

$$w(x,t) = \exp\left(\frac{b}{\nu}e^{\nu t}\right)u(x,\tau), \quad \tau = \frac{a}{\mu}e^{\mu t}$$

приводит к уравнению вида 1.4.5.1: $\partial_\tau u = e^{\beta x}\partial_{xx}u$.

1.5. Уравнения с произвольными параметрами, содержащие гиперболические функции

1.5.1. Уравнения, содержащие гиперболический косинус

1. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\operatorname{ch}^k \omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.1 при $f(t) = b\operatorname{ch}^k \omega t + c$.

2. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\operatorname{ch}^k \omega t + cx)w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.6 при $f(t) = c$, $g(t) = b\operatorname{ch}^k \omega t$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b\operatorname{ch}^k \omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.3 при $f(t) = b\operatorname{ch}^k \omega t + c$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (c\operatorname{ch}^k \omega t - bx^2)w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.7 при $f(t) = c\operatorname{ch}^k \omega t$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\operatorname{ch}^k \omega t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.8.2.1 при $f(t) = b\operatorname{ch}^k \omega t + c$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b\operatorname{ch}^k \omega t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.8.2.3 при $f(t) = b\operatorname{ch}^k \omega t + c$.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial w}{\partial x} + (c\operatorname{ch}^k \omega t + s)w.$

Частный случай уравнения 1.8.3.1 при $f(t) = b$, $g(t) = c\operatorname{ch}^k \omega t + s$.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(cx\operatorname{ch}^k \omega t + \dfrac{b}{x}\right)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.8.2.6 при $f(t) = c\operatorname{ch}^k \omega t$.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx\operatorname{ch}^k \omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.4.1 при $f(t) = b\operatorname{ch}^k \omega t$, $g(t) = c$.

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\operatorname{ch}^k \omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.4.2 при $f(t) = b\operatorname{ch}^k \omega t + c$.

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^4\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\operatorname{ch}^k \omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.8.4 при $f(t) = a$, $g(t) = b\operatorname{ch}^k \omega t + c$.

12. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b\operatorname{ch}^k \omega t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.8.4.5 при $f(t) = b\operatorname{ch}^k \omega t + c$.

1.5.2. Уравнения, содержащие гиперболический синус

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\operatorname{sh}^k \omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.1 при $f(t) = b\operatorname{sh}^k \omega t + c$.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\operatorname{sh}^k \omega t + cx)w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.6 при $f(t) = c$, $g(t) = b\operatorname{sh}^k \omega t$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b\operatorname{sh}^k \omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.3 при $f(t) = b\operatorname{sh}^k \omega t + c$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (c\operatorname{sh}^k \omega t - bx^2)w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.7 при $f(t) = c\operatorname{sh}^k \omega t$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\operatorname{sh}^k \omega t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Частный случай уравнения 1.8.2.1 при $f(t) = b\operatorname{sh}^k \omega t + c$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b\operatorname{sh}^k \omega t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Частный случай уравнения 1.8.2.3 при $f(t) = b\operatorname{sh}^k \omega t + c$.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial w}{\partial x} + (c\operatorname{sh}^k \omega t + s)w$.

Частный случай уравнения 1.8.3.1 при $f(t) = b$, $g(t) = c\operatorname{sh}^k \omega t + s$.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(cx\operatorname{sh}^k \omega t + \dfrac{b}{x}\right)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Частный случай уравнения 1.8.2.6 при $f(t) = c\operatorname{sh}^k \omega t$.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx\operatorname{sh}^k \omega t + c)w$.

Частный случай уравнения 1.8.4.1 при $f(t) = b\operatorname{sh}^k \omega t$, $g(t) = c$.

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\operatorname{sh}^k \omega t + c)w$.

Частный случай уравнения 1.8.4.2 при $f(t) = b\operatorname{sh}^k \omega t + c$.

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^4\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\operatorname{sh}^k \omega t + c)w$.

Частный случай уравнения 1.8.8.4 при $f(t) = a$, $g(t) = b\operatorname{sh}^k \omega t + c$.

12. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b\operatorname{sh}^k \omega t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Частный случай уравнения 1.8.4.5 при $f(t) = b\operatorname{sh}^k \omega t + c$.

1.5.3. Уравнения, содержащие гиперболический тангенс

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\operatorname{th}^k \omega t + c)w$.

Частный случай уравнения 1.8.1.1 при $f(t) = b\operatorname{th}^k \omega t + c$.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\operatorname{th}^k \omega t + cx)w$.

Частный случай уравнения 1.8.1.6 при $f(t) = c$, $g(t) = b\operatorname{th}^k \omega t$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b\operatorname{th}^k \omega t + c)w$.

Частный случай уравнения 1.8.1.3 при $f(t) = b\operatorname{th}^k \omega t + c$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (c\operatorname{th}^k \omega t - bx^2)w$.

Частный случай уравнения 1.8.1.7 при $f(t) = c\operatorname{th}^k \omega t$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\operatorname{th}^k \omega t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Частный случай уравнения 1.8.2.1 при $f(t) = b\operatorname{th}^k \omega t + c$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b\operatorname{th}^k \omega t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Частный случай уравнения 1.8.2.3 при $f(t) = b\operatorname{th}^k \omega t + c$.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial w}{\partial x} + (c\,\mathrm{th}^k\,\omega t + s)w.$

Частный случай уравнения 1.8.3.1 при $f(t) = b$, $g(t) = c\,\mathrm{th}^k\,\omega t + s$.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(cx\,\mathrm{th}^k\,\omega t + \dfrac{b}{x}\right)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.8.2.6 при $f(t) = c\,\mathrm{th}^k\,\omega t$.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx\,\mathrm{th}^k\,\omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.4.1 при $f(t) = b\,\mathrm{th}^k\,\omega t$, $g(t) = c$.

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\,\mathrm{th}^k\,\omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.4.2 при $f(t) = b\,\mathrm{th}^k\,\omega t + c$.

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^4\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\,\mathrm{th}^k\,\omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.8.4 при $f(t) = a$, $g(t) = b\,\mathrm{th}^k\,\omega t + c$.

12. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b\,\mathrm{th}^k\,\omega t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.8.4.5 при $f(t) = b\,\mathrm{th}^k\,\omega t + c$.

1.5.4. Уравнения, содержащие гиперболический котангенс

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\,\mathrm{cth}^k\,\omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.1 при $f(t) = b\,\mathrm{cth}^k\,\omega t + c$.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\,\mathrm{cth}^k\,\omega t + cx)w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.6 при $f(t) = c$, $g(t) = b\,\mathrm{cth}^k\,\omega t$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b\,\mathrm{cth}^k\,\omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.3 при $f(t) = b\,\mathrm{cth}^k\,\omega t + c$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (c\,\mathrm{cth}^k\,\omega t - bx^2)w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.7 при $f(t) = c\,\mathrm{cth}^k\,\omega t$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\,\mathrm{cth}^k\,\omega t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.8.2.1 при $f(t) = b\,\mathrm{cth}^k\,\omega t + c$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b\,\mathrm{cth}^k\,\omega t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.8.2.3 при $f(t) = b\,\mathrm{cth}^k\,\omega t + c$.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial w}{\partial x} + (c\,\mathrm{cth}^k\,\omega t + s)w.$

Частный случай уравнения 1.8.3.1 при $f(t) = b$, $g(t) = c\,\mathrm{cth}^k\,\omega t + s$.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(cx\,\mathrm{cth}^k\,\omega t + \dfrac{b}{x}\right)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.8.2.6 при $f(t) = c\,\mathrm{cth}^k\,\omega t$.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx \operatorname{cth}^k \omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.4.1 при $f(t) = b \operatorname{cth}^k \omega t$, $g(t) = c$.

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b \operatorname{cth}^k \omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.4.2 при $f(t) = b \operatorname{cth}^k \omega t + c$.

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^4 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b \operatorname{cth}^k \omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.8.4 при $f(t) = a$, $g(t) = b \operatorname{cth}^k \omega t + c$.

12. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^n \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b \operatorname{cth}^k \omega t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.8.4.5 при $f(t) = b \operatorname{cth}^k \omega t + c$.

1.6. Уравнения с произвольными параметрами, содержащие логарифмические функции

1.6.1. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x,t)w$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b \ln t + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.1 при $f(t) = b \ln t + c$.

Замена $w(x,t) = u(x,t)\exp(bt\ln t - bt + ct)$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a\partial_{xx}^2 u$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx + c \ln t)w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.6 при $f(t) = b$, $g(t) = c \ln t$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b \ln^k t + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.3 при $f(t) = b \ln^k t + c$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (-bx^2 + c \ln^k t)w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.7 при $f(t) = c \ln^k t$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b \ln t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Замена $z = x + bt\ln t - bt + ct$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t w = a\partial_{zz}^2 w$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b \ln t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.8.2.3 при $f(t) = b \ln t + c$.

Переходя от t, x к новым переменным (A, B — любые)

$$\tau = \int F^2(t)\,dt + A, \quad z = xF(t), \qquad \text{где} \quad F(t) = B\exp(bt\ln t - bt + ct),$$

для функции $w(\tau, z)$ получим уравнение с постоянными коэффициентами $\partial_\tau w = a\partial_{zz} w$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

1.6.2. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = ax^k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t)\frac{\partial w}{\partial x} + g(x,t)w$

1. $\frac{\partial w}{\partial t} = ax\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx + c\ln t)w.$

Частный случай уравнения 1.8.8.1 при $f(t) = a$, $g(t) = 0$, $h(t) = b$, $s(t) = c\ln t$.

2. $\frac{\partial w}{\partial t} = ax\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx\ln t + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.8.1 при $f(t) = a$, $g(t) = 0$, $h(t) = b\ln t$, $s(t) = c$.

3. $\frac{\partial w}{\partial t} = ax\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx\frac{\partial w}{\partial x} + (c\ln t + d)w.$

Частный случай уравнения 1.8.8.1 при $f(t) = a$, $g(t) = b$, $h(t) = 0$, $s(t) = c\ln t + d$.

4. $\frac{\partial w}{\partial t} = ax^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\ln t + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.8.2 при $f(t) = a$, $g(t) = 0$, $h(t) = b\ln t + c$.

5. $\frac{\partial w}{\partial t} = ax^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\ln x\, w.$

Частный случай уравнения 1.8.8.3 при $n(t) = a$, $f(t) = g(t) = h(t) = p(t) = 0$, $s(t) = b$.

6. $\frac{\partial w}{\partial t} = ax^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bt^k\ln x\, w.$

Частный случай уравнения 1.8.8.3 при $n(t) = a$, $f(t) = g(t) = h(t) = p(t) = 0$, $s(t) = bt^k$.

7. $\frac{\partial w}{\partial t} = ax^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\ln^2 x\, w.$

Частный случай уравнения 1.8.8.3 при $n(t) = a$, $f(t) = g(t) = s(t) = p(t) = 0$, $h(t) = b$. См. также уравнение 1.8.6.5.

8. $\frac{\partial w}{\partial t} = ax^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bt^k\ln^2 x\, w.$

Частный случай уравнения 1.8.8.3 при $n(t) = a$, $f(t) = g(t) = s(t) = p(t) = 0$, $h(t) = bt^k$.

9. $\frac{\partial w}{\partial t} = ax^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(b\ln^2 x + c\ln x\ln t + d\ln^2 t\right)w.$

Частный случай уравнения 1.8.8.3 при $n(t) = a$, $f(t) = g(t) = 0$, $h(t) = b$, $s(t) = c\ln t$, $p(t) = d\ln^2 t$.

10. $\frac{\partial w}{\partial t} = ax^4\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\ln t + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.8.4 при $f(t) = a$, $g(t) = b\ln t + c$.

11. $\frac{\partial w}{\partial t} = ax^n\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\ln t + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.8.7 при $f(t) = a$, $g(t) = 0$, $h(t) = b\ln t + c$.

12. $\frac{\partial w}{\partial t} = ax^n\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b\ln t + c)\frac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.8.4.5 при $f(t) = b\ln t + c$.

1.7. Уравнения с произвольными параметрами, содержащие тригонометрические функции

1.7.1. Уравнения, содержащие косинус

1. $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(b\cos^k \omega t + c\right)w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.1 при $f(t) = b\cos^k \omega t + c$.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\cos^k \omega t + cx)w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.6 при $f(t) = c$, $g(t) = b\cos^k \omega t$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b\cos^k \omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.3 при $f(t) = b\cos^k \omega t + c$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (c\cos^k \omega t - bx^2)w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.7 при $f(t) = c\cos^k \omega t$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\cos^k \omega t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.8.2.1 при $f(t) = b\cos^k \omega t + c$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b\cos^k \omega t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.8.2.3 при $f(t) = b\cos^k \omega t + c$.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial w}{\partial x} + (c\cos^k \omega t + s)w.$

Частный случай уравнения 1.8.3.1 при $f(t) = b$, $g(t) = c\cos^k \omega t + s$.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(cx\cos^k \omega t + \dfrac{b}{x}\right)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.8.2.6 при $f(t) = c\cos^k \omega t$.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx\cos^k \omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.4.1 при $f(t) = b\cos^k \omega t$, $g(t) = c$.

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\cos^k \omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.4.2 при $f(t) = b\cos^k \omega t + c$.

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^4\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\cos^k \omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.8.4 при $f(t) = a$, $g(t) = b\cos^k \omega t + c$.

12. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b\cos^k \omega t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.8.4.5 при $f(t) = b\cos^k \omega t + c$.

1.7.2. Уравнения, содержащие синус

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\sin^k \omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.1 при $f(t) = b\sin^k \omega t + c$.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\sin^k \omega t + cx)w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.6 при $f(t) = c$, $g(t) = b\sin^k \omega t$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b\sin^k \omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.3 при $f(t) = b\sin^k \omega t + c$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (c\sin^k \omega t - bx^2)w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.7 при $f(t) = c\sin^k \omega t$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\sin^k \omega t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.8.2.1 при $f(t) = b\sin^k \omega t + c$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b\sin^k \omega t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.8.2.3 при $f(t) = b\sin^k \omega t + c$.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial w}{\partial x} + (c\sin^k \omega t + s)w.$

Частный случай уравнения 1.8.3.1 при $f(t) = b$, $g(t) = c\sin^k \omega t + s$.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(cx\sin^k \omega t + \dfrac{b}{x}\right)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.8.2.6 при $f(t) = c\sin^k \omega t$.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx\sin^k \omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.4.1 при $f(t) = b\sin^k \omega t$, $g(t) = c$.

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\sin^k \omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.4.2 при $f(t) = b\sin^k \omega t + c$.

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^4\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\sin^k \omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.8.4 при $f(t) = a$, $g(t) = b\sin^k \omega t + c$.

12. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b\sin^k \omega t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.8.4.5 при $f(t) = b\sin^k \omega t + c$.

1.7.3. Уравнения, содержащие тангенс

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\,\mathrm{tg}^k\, \omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.1 при $f(t) = b\,\mathrm{tg}^k\, \omega t + c$.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\,\mathrm{tg}^k\, \omega t + cx)w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.6 при $f(t) = c$, $g(t) = b\,\mathrm{tg}^k\, \omega t$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b\,\mathrm{tg}^k\, \omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.3 при $f(t) = b\,\mathrm{tg}^k\, \omega t + c$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (c\,\mathrm{tg}^k\, \omega t - bx^2)w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.7 при $f(t) = c\,\mathrm{tg}^k\, \omega t$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\,\mathrm{tg}^k\, \omega t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.8.2.1 при $f(t) = b\,\mathrm{tg}^k\, \omega t + c$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b\operatorname{tg}^k \omega t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.8.2.3 при $f(t) = b\operatorname{tg}^k \omega t + c$.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial w}{\partial x} + (c\operatorname{tg}^k \omega t + s)w.$

Частный случай уравнения 1.8.3.1 при $f(t) = b$, $g(t) = c\operatorname{tg}^k \omega t + s$.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(cx\operatorname{tg}^k \omega t + \dfrac{b}{x}\right)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.8.2.6 при $f(t) = c\operatorname{tg}^k \omega t$.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx\operatorname{tg}^k \omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.4.1 при $f(t) = b\operatorname{tg}^k \omega t$, $g(t) = c$.

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\operatorname{tg}^k \omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.4.2 при $f(t) = b\operatorname{tg}^k \omega t + c$.

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^4\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\operatorname{tg}^k \omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.8.4 при $f(t) = a$, $g(t) = b\operatorname{tg}^k \omega t + c$.

12. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b\operatorname{tg}^k \omega t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.8.4.5 при $f(t) = b\operatorname{tg}^k \omega t + c$.

1.7.4. Уравнения, содержащие котангенс

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\operatorname{ctg}^k \omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.1 при $f(t) = b\operatorname{ctg}^k \omega t + c$.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\operatorname{ctg}^k \omega t + cx)w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.6 при $f(t) = c$, $g(t) = b\operatorname{ctg}^k \omega t$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b\operatorname{ctg}^k \omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.3 при $f(t) = b\operatorname{ctg}^k \omega t + c$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (c\operatorname{ctg}^k \omega t - bx^2)w.$

Частный случай уравнения 1.8.1.7 при $f(t) = c\operatorname{ctg}^k \omega t$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\operatorname{ctg}^k \omega t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.8.2.1 при $f(t) = b\operatorname{ctg}^k \omega t + c$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b\operatorname{ctg}^k \omega t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.8.2.3 при $f(t) = b\operatorname{ctg}^k \omega t + c$.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial w}{\partial x} + (c\operatorname{ctg}^k \omega t + s)w.$

Частный случай уравнения 1.8.3.1 при $f(t) = b$, $g(t) = c\operatorname{ctg}^k \omega t + s$.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(cx\operatorname{ctg}^k \omega t + \dfrac{b}{x}\right)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Частный случай уравнения 1.8.2.6 при $f(t) = c\operatorname{ctg}^k \omega t$.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx\operatorname{ctg}^k \omega t + c)w$.

Частный случай уравнения 1.8.4.1 при $f(t) = b\operatorname{ctg}^k \omega t$, $g(t) = c$.

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\operatorname{ctg}^k \omega t + c)w$.

Частный случай уравнения 1.8.4.2 при $f(t) = b\operatorname{ctg}^k \omega t + c$.

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^4\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\operatorname{ctg}^k \omega t + c)w$.

Частный случай уравнения 1.8.8.4 при $f(t) = a$, $g(t) = b\operatorname{ctg}^k \omega t + c$.

12. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b\operatorname{ctg}^k \omega t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Частный случай уравнения 1.8.4.5 при $f(t) = b\operatorname{ctg}^k \omega t + c$.

1.8. Уравнения, содержащие произвольные функции

1.8.1. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t)w$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)w$.

1°. Частные решения (A, B, λ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = (Ax+B)\exp\left[\int f(t)\,dt\right],$$

$$w(x,t) = A(x^2+2at)\exp\left[\int f(t)\,dt\right],$$

$$w(x,t) = A\exp\left[\lambda x + a\lambda^2 t + \int f(t)\,dt\right],$$

$$w(x,t) = A\cos(\lambda x)\exp\left[-a\lambda^2 t + \int f(t)\,dt\right],$$

$$w(x,t) = A\sin(\lambda x)\exp\left[-a\lambda^2 t + \int f(t)\,dt\right].$$

2°. Замена $w(x,t) = u(x,t)\exp\left[\int f(t)\,dt\right]$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a\partial_{xx} u$, которое рассматривается в разделе 1.1.1.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x)w$.

Частный случай уравнения 1.8.9 при $s(x) \equiv 1$, $p(x) = a = \mathrm{const}$, $q(x) = -f(x)$, $\Phi \equiv 0$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + xf(t)w$.

1°. Частные решения (A, λ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = A\exp\left[xF(t) + a\int F^2(t)\,dt\right], \quad F(t) = \int f(t)\,dt,$$

$$w(x,t) = A\left[x + 2a\int F(t)\,dt\right]\exp\left[xF(t) + a\int F^2(t)\,dt\right],$$

$$w(x,t) = A\exp\left[xF(t) + \lambda x + a\lambda^2 t + a\int F^2(t)\,dt + 2a\lambda\int F(t)\,dt\right].$$

2°. Преобразование

$$w(x,t) = u(z,t)\exp\Big[xF(t) + a\int F^2(t)\,dt\Big], \quad z = x + 2a\int F(t)\,dt,$$

где $F(t) = \displaystyle\int f(t)\,dt$, приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a\partial_{zz}u$, которое рассматривается в разделе 1.1.1.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x^2 f(t)w.$

Частный случай уравнения 1.8.7.5.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + [f(x) + g(t)]w.$

1°. Существуют решения в виде произведения (λ — произвольная постоянная)

$$w(x,t) = \exp\Big[\lambda t + \int g(t)\,dt\Big]\varphi(x),$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi''_{xx} + [f(x) - \lambda]\varphi = 0.$$

2°. Замена $w(x,t) = u(x,t)\exp\Big[\displaystyle\int g(t)\,dt\Big]$ приводит к уравнению вида 1.8.1.2:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x)u.$$

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + [xf(t) + g(t)]w.$

1°. Частные решения (A, λ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = A\exp\Big[xF(t) + a\int F^2(t)\,dt + \int g(t)\,dt\Big], \quad F(t) = \int f(t)\,dt,$$

$$w(x,t) = A\Big[x + 2a\int F(t)\,dt\Big]\exp\Big[xF(t) + a\int F^2(t)\,dt + \int g(t)\,dt\Big],$$

$$w(x,t) = \exp\Big[xF(t) + \lambda x + a\lambda^2 t + 2a\lambda\int F(t)\,dt + a\int F^2(t)\,dt + \int g(t)\,dt\Big].$$

2°. Преобразование

$$w(x,t) = u(z,t)\exp\Big[xF(t) + a\int F^2(t)\,dt + \int g(t)\,dt\Big], \quad z = x + 2a\int F(t)\,dt,$$

где $F(t) = \displaystyle\int f(t)\,dt$, приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a\partial_{zz}u$, которое рассматривается в разделе 1.1.1.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + [-bx^2 + f(t)]w.$

1°. Частные решения (A — произвольная постоянная):

$$w(x,t) = A\exp\Big[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}x^2 + \sqrt{ab}\,t + \int f(t)\,dt\Big],$$

$$w(x,t) = Ax\exp\Big[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}x^2 + 3\sqrt{ab}\,t + \int f(t)\,dt\Big].$$

2°. Преобразование (C — любое)

$$w(x,t) = u(z,\tau)\exp\Big[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}x^2 + \sqrt{ab}\,t + \int f(t)\,dt\Big],$$

$$z = x\exp\big(2\sqrt{ab}\,t\big), \quad \tau = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{a}{b}}\exp\big(4\sqrt{ab}\,t\big) + C$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_\tau u = \partial_{zz}u$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x\bigl[-bx + f(t)\bigr]w.$

1°. Частное решение (A, B — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = \exp\biggl[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}\,x^2 + xF(t) + \sqrt{ab}\,t + a\int_A^t F^2(t)\,dt\biggr],$$

$$F(t) = \exp\bigl(2\sqrt{ab}\,t\bigr)\int_B^t f(\tau)\exp\bigl(-2\sqrt{ab}\,\tau\bigr)\,d\tau.$$

2°. Преобразование

$$w(x,t) = \exp\Bigl(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}\,x^2\Bigr)u(z,\tau), \quad z = x\exp\bigl(2\sqrt{ab}\,t\bigr), \quad \tau = \frac{1}{4\sqrt{ab}}\exp\bigl(4\sqrt{ab}\,t\bigr)$$

приводит к уравнению вида 1.8.1.6:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \Bigl[z\Phi(\tau) + \frac{1}{4\tau}\Bigr]u,$$

где $\Phi(\tau) = \dfrac{1}{(n\tau)^{3/2}}f\Bigl(\dfrac{\ln\tau + \ln n}{n}\Bigr)$, $n = 4\sqrt{ab}$.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bigl[x^2 f(t) + xg(t) + h(t)\bigr]w.$

Частный случай уравнения 1.8.7.5.

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x - bt)w.$

Переходя от t, x к новым переменным t, $\xi = x - bt$, получим уравнение вида 1.8.6.5:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + b\frac{\partial w}{\partial \xi} + f(\xi)w.$$

1.8.2. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t)\dfrac{\partial w}{\partial x}$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Уравнение описывает теплоперенос в движущейся среде, скорость движения которой является произвольной функцией времени.

1°. Частные решения (A, B, μ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = Ax + A\int f(t)\,dt + B,$$

$$w(x,t) = A\Bigl[x + \int f(t)\,dt\Bigr]^2 + 2aAt + B,$$

$$w(x,t) = A\exp\Bigl[\lambda x + a\lambda^2 t + \lambda\int f(t)\,dt\Bigr] + B.$$

2°. Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x + \displaystyle\int f(t)\,dt$, получим уравнение с постоянными коэффициентами $\partial_t w = a\partial_{zz}w$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.8.6.4. Уравнение описывает теплоперенос в движущейся среде, скорость движения которой является произвольной функцией координаты.

1°. Уравнение имеет решения с разделяющимися переменными вида
$$w(x,t) = e^{-\lambda t} u(x),$$
где функция $u = u(x)$ определяется путем решения обыкновенного дифференциального уравнения с параметром λ:
$$au''_{xx} + f(x)u'_x + \lambda u = 0.$$

Другие частные решения (A, B — произвольные постоянные):
$$w(x) = A + B\int F(x)\,dx, \quad F(x) = \exp\Bigl[-\frac{1}{a}\int f(x)\,dx\Bigr],$$
$$w(x,t) = Aat + A\int\Bigl(\int\frac{dx}{F(x)}\Bigr)F(x)\,dx + B,$$
$$w(x,t) = Aat\Phi(x) + A\int\Bigl(\int\frac{\Phi(x)\,dx}{F(x)}\Bigr)F(x)\,dx, \quad \Phi(x) = \int F(x)\,dx.$$
Более сложные решения указаны далее в п. 2°.

2°. Исходное уравнение для любой функции $f(x)$ допускает решения вида
$$w_n(x,t) = \sum_{i=0}^{n} t^i \varphi_{n,i}(x). \tag{1}$$
Подставляя выражение (1) в исходное уравнение и приравнивая члены при одинаковых степенях t, для определения функций $\varphi_{n,i} = \varphi_{n,i}(x)$ получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (штрихи соответствуют производным по x):
$$a\varphi''_{n,n} + f(x)\varphi'_{n,n} = 0,$$
$$a\varphi''_{n,i} + f(x)\varphi'_{n,i} = (i+1)\varphi_{n,i+1}; \quad i = 0,\,1,\,\ldots,\,n-1.$$
Интегрируя эти уравнения последовательно в порядке убывания номера i, находим решение (A, B — любые):
$$\begin{aligned}\varphi_{n,n}(x) &= A + B\int F(x)\,dx, \quad F(x) = \exp\Bigl[-\frac{1}{a}\int f(x)\,dx\Bigr],\\ \varphi_{n,i}(x) &= n(n-1)\ldots(i+1)\boldsymbol{L}_f^{n-i}\bigl[\varphi_{n,n}(x)\bigr]; \quad i = 0,\,1,\,\ldots,\,n-1.\end{aligned} \tag{2}$$
Здесь интегральный оператор $\boldsymbol{L}_f$ вводится следующим образом:
$$\boldsymbol{L}_f[y(x)] \equiv \frac{1}{a}\int F(x)\Bigl(\int\frac{y(x)\,dx}{F(x)}\Bigr)\,dx. \tag{3}$$
Степени оператора определяются так: $\boldsymbol{L}_f^i[y(x)] = \boldsymbol{L}_f\bigl[\boldsymbol{L}_f^{i-1}[y(x)]\bigr]$.

Формулы (1)–(3) дают решение исходного уравнения для произвольной функции $f(x)$.

Линейная комбинация частных решений
$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{N} C_n w_n(x,t) \qquad (C_n \text{ — произвольны})$$
также является решением однородного уравнения.

3. $\boldsymbol{\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + xf(t)\dfrac{\partial w}{\partial x}}$.

Обобщенное уравнение Ильковича. Оно описывает массоперенос к поверхности растущей капли, которая вытекает из тонкого капилляра в раствор жидкости (массовый расход движущейся по капилляру жидкости произвольным образом зависит от времени).

1°. Частные решения (A, B, λ — произвольные постоянные):
$$w(x,t) = AxF(t) + B, \quad F(t) = \exp\Bigl[\int f(t)\,dt\Bigr],$$
$$w(x,t) = Ax^2F^2(t) + 2Aa\int F^2(t)\,dt + B,$$
$$w(x,t) = A\exp\Bigl[\lambda xF(t) + a\lambda^2\int F^2(t)\,dt\Bigr] + B.$$

2°. Переходя от t, x к новым переменным (A — любое)

$$\tau = \int F^2(t)\,dt + A, \quad z = xF(t), \qquad \text{где} \quad F(t) = \exp\Bigl[\int f(t)\,dt\Bigr],$$

для функции $w(\tau, z)$ получим уравнение с постоянными коэффициентами $\partial_\tau w = a\partial_{zz} w$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

3°. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} &w = w_0 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad &&\text{(начальное условие)},\\ &w = w_1 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad &&\text{(граничное условие)},\\ &w \to w_0 \quad \text{при} \quad x \to \infty \quad &&\text{(граничное условие)}, \end{aligned}$$

где w_0 и w_1 — некоторые постоянные.

Решение:

$$\frac{w - w_1}{w_0 - w_1} = \operatorname{erf}\Bigl(\frac{z}{2\sqrt{a\tau}}\Bigr), \quad \operatorname{erf}\xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\xi \exp(-\xi^2)\,d\xi,$$

$$\tau = \int_0^t F^2(t)\,dt, \quad z = xF(t), \quad F(t) = \exp\Bigl[\int f(t)\,dt\Bigr],$$

где $\operatorname{erf}\xi$ — интеграл вероятностей.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x - bt)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

1°. Частные решения (A, B — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = A + B\int F(z)\,dz, \quad F(z) = \exp\Bigl[-\frac{1}{a}\int f(z)\,dz - \frac{b}{a}z\Bigr],$$

$$w(x,t) = Aat + A\int\Bigl(\int\frac{dz}{F(z)}\Bigr)F(z)\,dz,$$

$$w(x,t) = Aat\Phi(z) + A\int\Bigl(\int\frac{\Phi(z)\,dz}{F(z)}\Bigr)F(z)\,dx, \quad \Phi(z) = \int F(z)\,dz,$$

где $z = x - bt$.

2°. Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x - bt$, получим уравнение с разделяющимися переменными вида 1.8.2.2:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \bigl[f(z) + b\bigr]\frac{\partial w}{\partial z}.$$

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{t}}f\Bigl(\dfrac{x}{\sqrt{t}}\Bigr)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

1°. Переходя от t, x к новым переменным $\tau = \ln t$, $\xi = \dfrac{x}{\sqrt{t}}$, получим уравнение с разделяющимися переменными вида 1.8.2.2:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \bigl[f(\xi) + \tfrac{1}{2}\xi\bigr]\frac{\partial w}{\partial \xi}.$$

2°. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Первая краевая задача. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} &w = w_0 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad &&\text{(начальное условие)},\\ &w = w_1 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad &&\text{(граничное условие)},\\ &w \to w_0 \quad \text{при} \quad x \to \infty \quad &&\text{(граничное условие)}, \end{aligned}$$

где w_0 и w_1 — некоторые постоянные.

Решение:

$$\frac{w - w_0}{w_1 - w_0} = \frac{\int_\xi^\infty \exp\bigl[-\Phi(\xi)\bigr]\,d\xi}{\int_0^\infty \exp\bigl[-\Phi(\xi)\bigr]\,d\xi}, \qquad \Phi(\xi) = \frac{1}{4a}\xi^2 + \frac{1}{a}\int_0^\xi f(\xi)\,d\xi,$$

где $\xi = x/\sqrt{t}$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left[xf(t) + \dfrac{b}{x}\right]\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

1°. Частные решения (A, B — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = Ax^n \exp\Big[n\int f(t)\,dt\Big] + B, \quad n = 1 - \frac{b}{a},$$
$$w(x,t) = Ax^2 F(t) + 2A(a+b)\int F(t)\,dt + B, \quad F(t) = \exp\Big[2\int f(t)\,dt\Big].$$

2°. Переходя от t, x к новым переменным (A — любое)

$$\tau = \int F^2(t)\,dt + A, \quad z = xF(t), \qquad \text{где} \quad F(t) = \exp\Big[\int f(t)\,dt\Big],$$

для функции $w(\tau, z)$ получим более простое уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{b}{z}\frac{\partial w}{\partial z},$$

которое рассматривается в разд. 1.2.1, 1.2.3, 1.2.5.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + [xf(t) + g(t)]\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Преобразование (A, B, C — любые)

$$\tau = \int F^2(t)\,dt + A, \quad z = xF(t) + \int g(t)F(t)\,dt + C, \qquad F(t) = B\exp\Big[\int f(t)\,dt\Big]$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_\tau w = a\partial_{zz} w$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

1.8.3. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x,t)w$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(t)w.$

Частный случай уравнения 1.8.7.3.

1°. Частные решения (A, B, λ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = \big[Ax + AF(t) + B\big]\exp\Big[\int g(t)\,dt\Big], \quad F(t) = \int f(t)\,dt,$$
$$w(x,t) = A\Big\{\big[x + F(t)\big]^2 + 2at\Big\}\exp\Big[\int g(t)\,dt\Big],$$
$$w(x,t) = A\exp\Big[a\lambda^2 t + \int g(t)\,dt \pm \lambda F(t) \pm \lambda x\Big],$$
$$w(x,t) = A\exp\Big[-a\lambda^2 t + \int g(t)\,dt\Big]\cos\big[\lambda x + \lambda F(t)\big],$$
$$w(x,t) = A\exp\Big[-a\lambda^2 t + \int g(t)\,dt\Big]\sin\big[\lambda x + \lambda F(t)\big].$$

2°. Преобразование

$$w(x,t) = u(z,t)\exp\Big[\int g(t)\,dt\Big], \quad z = x + \int f(t)\,dt$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a\partial_{zz} u$, которое рассматривается в разделе 1.1.1.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(t)w.$

1°. Частные решения (A, B — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = \Big[A + B\int F(x)\,dx\Big]G(t),$$
$$w(x,t) = A\Big[at + \int F(x)\Big(\int \frac{dx}{F(x)}\Big)\,dx\Big]G(t),$$
$$w(x,t) = A\Big[at\Psi(x) + \int F(x)\Big(\int \frac{\Psi(x)\,dx}{F(x)}\Big)\,dx\Big]G(t).$$

При записи этих формул использованы следующие обозначения:

$$G(t) = \exp\Big[\int g(t)\,dt\Big], \quad F(x) = \exp\Big[-\frac{1}{a}\int f(x)\,dx\Big], \quad \Psi(x) = \int F(x)\,dx.$$

2°. Замена $w(x,t) = u(x,t)\exp\Big[\int g(t)\,dt\Big]$ приводит к уравнению вида 1.8.2.2:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x)\frac{\partial u}{\partial x}.$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x)w.$

Частный случай уравнения 1.8.6.5.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + xf(t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(t)w.$

Преобразование (A, B, C — любые)

$$\tau = \int F^2(t)\,dt + A, \quad z = xF(t) + C, \quad w(t,x) = u(\tau,z)\exp\Big[\int g(t)\,dt\Big],$$

где $F(t) = B\exp\Big[\int f(t)\,dt\Big]$, приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_\tau u = a\partial_{zz}u$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \Big[xf(t) + \dfrac{b}{x}\Big]\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(t)w.$

Замена $w(x,t) = u(x,t)\exp\Big[\int g(t)\,dt\Big]$ приводит к уравнению вида 1.8.2.6:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Big[xf(t) + \frac{b}{x}\Big]\frac{\partial u}{\partial x}.$$

При $b = 0$ см. уравнение 1.8.2.3.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \big[xf(t) + g(t)\big]\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(t)w.$

Преобразование (A, B, C — любые)

$$\tau = \int F^2(t)\,dt + A, \quad F(t) = B\exp\Big[\int f(t)\,dt\Big],$$
$$z = xF(t) + \int g(t)F(t)\,dt + C,$$
$$w(t,x) = u(\tau,z)\exp\Big[\int h(t)\,dt\Big]$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_\tau u = a\partial_{zz}u$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \big[xf(t) + g(t)\big]\dfrac{\partial w}{\partial x} + \big[xh(t) + s(t)\big]w.$

Частный случай уравнения 1.8.7.4 при $n(t) = a$.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \big[xf(t) + g(t)\big]\dfrac{\partial w}{\partial x} + \big[x^2h(t) + xs(t) + p(t)\big]w.$

Частный случай уравнения 1.8.7.5 при $n(t) = a$.

1.8.4. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x,t)w$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + [xf(t) + g(t)]w.$

Частный случай уравнения 1.8.8.1.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)w.$

Частный случай уравнения 1.8.8.2. Преобразование

$$w(x,t) = u(z,t)\exp\Bigl[\int f(t)\,dt\Bigr], \quad z = \ln|x|$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами вида 1.1.4:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - a\frac{\partial u}{\partial z}.$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \ln x f(t)w.$

Частный случай уравнения 1.8.8.3.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \ln^2 x f(t)w.$

Частный случай уравнения 1.8.8.3.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + xf(t)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

1°. Частные решения (A, B — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = Ax\exp\Bigl[\int f(t)\,dt\Bigr] + B,$$

$$w(x,t) = Ax^{2-n}F(t) + Aa(n-1)(n-2)\int F(t)\,dt,$$

где $F(t) = \exp\Bigl[(2-n)\int f(t)\,dt\Bigr]$.

2°. Переходя от x, t к новым переменным

$$z = xF(t), \quad \tau = a\int F^{2-n}(t)\,dt, \quad F(t) = \exp\Bigl[\int f(t)\,dt\Bigr],$$

получим уравнение вида 1.3.6.6:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = z^n\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$$

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + xf(t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + bw.$

Замена $w(x,t) = e^{bt}u(x,t)$ приводит к уравнению вида 1.8.4.5:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ax^n\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xf(t)\frac{\partial u}{\partial x}.$$

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^{2n}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sqrt{a}\,x^n\bigl[\sqrt{a}\,nx^{n-1} + f(t)\bigr]\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(t)w.$

Замена

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{a}}\begin{cases} \dfrac{x^{1-n}}{1-n} & \text{при } n \neq 1, \\ \ln|x| & \text{при } n = 1 \end{cases}$$

приводит к частному случаю уравнения 1.8.7.3:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + f(t)\frac{\partial w}{\partial \xi} + g(t)w.$$

1.8.5. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ae^{\beta x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x,t)w$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ae^{\beta x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)w.$

Замена $w(x,t) = u(x,t)\exp\Bigl[\int f(t)\,dt\Bigr]$ приводит к уравнению вида 1.4.5.1:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ae^{\beta x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ae^{2\beta x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sqrt{a}\,e^{\beta x}\bigl[\sqrt{a}\,\beta e^{\beta x} + f(t)\bigr]\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(t)w.$

Замена $\xi = \dfrac{1}{\beta\sqrt{a}}\bigl(1 - e^{-\beta x}\bigr)$ приводит к частному случаю уравнения 1.8.7.3:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + f(t)\frac{\partial w}{\partial \xi} + g(t)w.$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ae^{\beta x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.8.6.4.

1°. Частные решения с разделяющимися переменными имеют вид

$$w(x,t) = e^{-\lambda t}u(x), \tag{1}$$

где функция $u(x)$ ищется путем решения следующего линейного обыкновенного дифференциального уравнения с параметром λ:

$$ae^{\beta x}u''_{xx} + f(x)u'_x + \lambda u = 0. \tag{2}$$

2°. Другие частные решения (A, B — произвольные постоянные):

$$w(x) = A + B\int F(x)\,dx, \quad F(x) = \exp\Bigl[-\frac{1}{a}\int e^{-\beta x}f(x)\,dx\Bigr],$$
$$w(x,t) = Aat + A\int F(x)\Bigl(\int \frac{dx}{e^{\beta x}F(x)}\Bigr)dx,$$
$$w(x,t) = Aat\Phi(x) + A\int F(x)\Bigl(\int \frac{\Phi(x)\,dx}{e^{\beta x}F(x)}\Bigr)dx, \quad \Phi(x) = \int F(x)\,dx.$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ae^{\beta x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(t)w.$

Частный случай уравнения 1.8.6.6.

Замена $w(x,t) = u(x,t)\exp\Bigl[\int g(t)\,dt\Bigr]$ приводит к уравнению вида 1.8.5.3:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ae^{\beta x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x)\frac{\partial u}{\partial x}.$$

1.8.6. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x,t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(x,t)w$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

Это уравнение вида 1.8.9 при $s(x) = 1/f(x)$, $p(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$, $\Phi(x,t) \equiv 0$.

1°. Частные решения имеют вид

$$w(x,t) = e^{-\lambda t}u(x), \tag{1}$$

где функция $u(x)$ ищется путем решения следующего линейного обыкновенного дифференциального уравнения с параметром λ:

$$f(x)u''_{xx} + \lambda u = 0. \tag{2}$$

Процедура построения решений конкретных краевых задач для исходного уравнения с помощью частных решений вида (1) подробно описана в 1.8.9.

Основная проблема здесь состоит в исследовании вспомогательного уравнения (2), которое далеко не всегда допускает аналитическое решение (поэтому часто приходится прибегать к численным методам решения). Значительное число конкретных разрешимых уравнений вида (2) приведено в справочниках Э. Камке (1971) и В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995) [см. также G. M. Murphy (1960)].

2°. Частные решения (A, B, x_0 — произвольные постоянные):

$$
\begin{aligned}
w(x) &= Ax + B,\\
w(x,t) &= At + AF(x), \quad F(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)}{f(\xi)}\,d\xi,\\
w(x,t) &= Atx + AG(x), \quad G(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)}{f(\xi)}\,\xi\,d\xi,\\
w(x,t) &= At^2 + 2AtF(x) + 2A\int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)}{f(\xi)}F(\xi)\,d\xi,\\
w(x,t) &= At^2x + 2AtG(x) + 2A\int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)}{f(\xi)}G(\xi)\,d\xi.
\end{aligned}
$$

Более сложные решения указаны далее в п. 3°.

3°. Для любой функции $f(x)$ исходное уравнение имеет частные решения вида

$$
w_n(x,t) = t^n + \sum_{i=0}^{n-1} t^i \varphi_{n,i}(x). \tag{3}
$$

Подставляя выражение (3) в исходное уравнение и приравнивая члены при одинаковых степенях t, для определения функций $\varphi_{n,i} = \varphi_{n,i}(x)$ получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений (штрихи соответствуют производным по x):

$$
\begin{gathered}
f(x)\varphi''_{n,i} = (i+1)\varphi_{n,i+1},\\
i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1; \quad \varphi_{n,n} \equiv 1.
\end{gathered}
$$

Интегрируя эти уравнения последовательно в порядке убывания номера i, находим

$$
\varphi_{n,i}(x) = n(n-1)\ldots(i+1)\boldsymbol{L}_f^{n-i}[1]. \tag{4}
$$

Здесь интегральный оператор $\boldsymbol{L}_f$ вводится следующим образом:

$$
\boldsymbol{L}_f[y(x)] \equiv \int\left(\int \frac{y(x)}{f(x)}\,dx\right)dx = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)}{f(\xi)}\,y(\xi)\,d\xi + Ax + B, \tag{5}
$$

где x_0, A, B — произвольные постоянные. Степени оператора определяются, как обычно: $\boldsymbol{L}_f^i[y(x)] = \boldsymbol{L}_f\big[\boldsymbol{L}_f^{i-1}[y(x)]\big]$, а константы A, B при повторных действиях оператора $\boldsymbol{L}_f$ в этой формуле, вообще говоря, будут различными.

Формулы (3), (4) определяют решение исходного уравнения для произвольной функции $f(x)$.

Линейная комбинация частных решений (3):

$$
w(x,t) = \sum_{n=0}^{N} C_n w_n(x,t) \qquad (C_n \text{ — произвольны})
$$

также является решением однородного уравнения.

Укажем также другие частные решения исходного уравнения (n — натуральное число):

$$
w_n(x,t) = t^n x + \sum_{i=0}^{n-1} t^i \phi_{n,i}(x), \quad \phi_{n,i}(x) = n(n-1)\ldots(i+1)\boldsymbol{L}_f^{n-i}[x],
$$

где оператор $\boldsymbol{L}_f$ описывается формулой (5). Произвольная линейная комбинация этих решений с линейной комбинацией решений вида (3) также будет решением исходного уравнения.

О структуре других частных решений см. уравнение 1.8.6.5 (замечание в п. 3°).

4°. Решение в виде бесконечного ряда, содержащее произвольную функцию координаты:

$$w(x,t) = \Theta(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n \boldsymbol{L}^n[\Theta(x)], \qquad \boldsymbol{L} \equiv f(x)\frac{d^2}{dx^2},$$

где $\Theta(x)$ — любая бесконечно дифференцируемая функция. Это решение удовлетворяет начальному условию $w(x,0) = \Theta(x)$.

5°. Укажем два дискретных преобразования, сохраняющих вид исходного уравнения (при которых меняется функция f).

5.1. Преобразование

$$z = \frac{1}{x}, \quad u = \frac{w}{x} \qquad \text{(точечное преобразование)}$$

приводит к уравнению аналогичного вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = z^4 f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

5.2. Сначала сделаем замену

$$\xi = \int \frac{dx}{f(x)}.$$

В результате имеем уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[F(\xi)\frac{\partial w}{\partial \xi}\right],$$

где функция $F = F(\xi)$ задается параметрически:

$$F = \frac{1}{f(x)}, \quad \xi = \int \frac{dx}{f(x)}.$$

Вводя новую неизвестную функцию $v = v(\xi, t)$ по формуле

$$w = \frac{\partial v}{\partial \xi} \qquad \text{(преобразование Беклунда)}$$

и интегрируя полученное уравнение по переменной ξ, приходим к искомому уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} = F(\xi)\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}.$$

(Здесь функция v определена с точностью до произвольного слагаемого, зависящего от t.)

Для степенных и экспоненциальных функций указанное преобразование действует по правилу

$$f(x) = bx^n \quad \Longrightarrow \quad F(\xi) = A\xi^{\frac{n}{n-1}},$$
$$f(x) = be^{-\beta x} \quad \Longrightarrow \quad F(\xi) = \beta\xi,$$

где $A = \frac{1}{b}\left[b(1-n)\right]^{\frac{n}{n-1}}$.

⦿ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 313–316).

2. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = f(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \Phi(x,t).$

Это уравнение вида 1.8.9 при $s(x) = 1/f(x)$, $p(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$. При $\Phi(x,t) \equiv 0$ см. уравнение 1.8.6.1.

1°. При

$$\Phi(x,t) = g_n(x)t^n \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

для произвольных функций $f(x)$, $g_n(x)$ исходное уравнение имеет частное решение вида

$$\bar{w}_n(x,t) = \sum_{i=0}^{n} t^i \psi_{n,i}(x). \tag{1}$$

Здесь функции $\psi_{n,i} = \psi_{n,i}(x)$ вычисляются по формулам

$$\psi_{n,i}(x) = \begin{cases} -\boldsymbol{L}_f\left[g_n(x)\right] & \text{при } i = n, \\ -n(n-1)\ldots(i+1)\boldsymbol{L}_f^{n-i+1}\left[g_n(x)\right] & \text{при } i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1 \end{cases} \tag{2}$$

с помощью интегрального оператора $\boldsymbol{L}_f$, который определяется формулой (5) в уравнении 1.8.6.1.

2°. Если неоднородная часть уравнения представима в виде суммы

$$\Phi(x,t)=\sum_{n=1}^{N} g_n(x)t^n,$$

то одно из решений является суммой частных решений вида (1):

$$\bar{w}(x,t)=\sum_{n=1}^{N}\bar{w}_n(x,t).$$

Например, при

$$\Phi(x,t)=g(x)t+h(x),$$

где $g(x)$, $h(x)$ — произвольные функции, исходное уравнение имеет частное решение вида

$$\bar{w}(x,t)=-t\psi(x)-\int_{x_0}^{x}\frac{\psi(\xi)+h(\xi)}{f(\xi)}(x-\xi)\,d\xi,$$

$$\psi(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{g(\xi)}{f(\xi)}(x-\xi)\,d\xi,\quad x_0 \text{ — любое.}$$

О структуре частных решений для других функций $\Phi(x,t)$ см. уравнение 1.8.6.5, п. 3°.

Суммируя различные решения однородного уравнения (см. уравнение 1.8.6.1) с любым частным решением неоднородного уравнения, можно получить широкий класс частных решений неоднородного уравнения.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big].$

Частный случай уравнения 1.8.6.4 при $g(x)=f'_x(x)$. Уравнение описывает теплоперенос в неподвижной среде (твердом теле), когда зависимость коэффициента температуропроводности от координаты x задается функцией $f(x)$.

1°. Частные решения (A, B — произвольные постоянные):

$$w(x)=A+B\int\frac{dx}{f(x)},$$

$$w(x,t)=At+A\int\frac{x\,dx}{f(x)}+B,$$

$$w(x,t)=At\varphi(x)+A\int\Big(\int\varphi(x)\,dx\Big)\frac{dx}{f(x)}+B,\quad \varphi(x)=\int\frac{dx}{f(x)},$$

$$w(x,t)=At^2+2At\psi(x)+2A\int\Big(\int\psi(x)\,dx\Big)\frac{dx}{f(x)}+B,\quad \psi(x)=\int\frac{x\,dx}{f(x)},$$

$$w(x,t)=At^2\varphi(x)+2AtI(x)+2A\int\Big(\int I(x)\,dx\Big)\frac{dx}{f(x)}+B,\quad I(x)=\int\Big(\int\varphi(x)\,dx\Big)\frac{dx}{f(x)}.$$

2°. Решение в виде бесконечного ряда:

$$w(x,t)=\Theta(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n\boldsymbol{L}^n\big[\Theta(x)\big],\qquad \boldsymbol{L}\equiv\frac{d}{dx}\Big[f(x)\frac{d}{dx}\Big],$$

содержащее произвольную функцию пространственной переменной $\Theta=\Theta(x)$. Это решение удовлетворяет начальному условию $w(x,0)=\Theta(x)$.

3°. Преобразование

$$w(x,t)=\varphi(x)u(\xi,t),\quad \xi=-\int\varphi^2(x)\,dx,\qquad \varphi(x)=\int\frac{dx}{f(x)}$$

приводит к уравнению аналогичного вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial\xi}\Big[F(\xi)\frac{\partial u}{\partial\xi}\Big],$$

где функция $F(\xi)$ задается параметрически

$$F(\xi)=f(x)\psi^4(x),\quad \xi=-\int\varphi^2(x)\,dx,\qquad \varphi(x)=\int\frac{dx}{f(x)}.$$

4°. Замена $z = \int \frac{dx}{f(x)}$ приводит к уравнению вида 1.8.6.1:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = g(z)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2},$$

где функция $g(z)$ задается параметрически

$$g(z) = \frac{1}{f(x)}, \quad z = \int \frac{dx}{f(x)}.$$

4. $\boldsymbol{\frac{\partial w}{\partial t} = f(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x)\frac{\partial w}{\partial x}.}$

1°. Это уравнение можно представить в виде

$$s(x)\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial w}{\partial x}\right], \tag{1}$$

где

$$s(x) = \frac{1}{f(x)}\exp\left[\int \frac{g(x)}{f(x)}\,dx\right], \quad p(x) = \exp\left[\int \frac{g(x)}{f(x)}\,dx\right], \quad q(x) \equiv 0.$$

О решении уравнения (1) см. в разд. 1.8.9.

2°. Частные решения с разделяющимися переменными имеют вид

$$w(x,t) = e^{-\lambda t}u(x), \tag{2}$$

где функция $u(x)$ ищется путем решения следующего линейного обыкновенного дифференциального уравнения с параметром λ:

$$f(x)u''_{xx} + g(x)u'_x + \lambda u = 0. \tag{3}$$

Процедура построения решений конкретных краевых задач для исходного уравнения с помощью частных решений вида (2) подробно описана в разд. 0.4.1. Значительное число конкретных разрешимых уравнений вида (3) приведено справочниках Э. Камке (1971) и В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995) [см. также G. M. Murphy (1960)].

3°. Другие частные решения (A, B — произвольные постоянные):

$$w(x) = A + B\int F(x)\,dx, \quad F(x) = \exp\left[-\int \frac{g(x)}{f(x)}dx\right],$$
$$w(x,t) = At + A\int F(x)\left(\int \frac{dx}{f(x)F(x)}\right)dx,$$
$$w(x,t) = At\Phi(x) + A\int F(x)\left(\int \frac{\Phi(x)\,dx}{f(x)F(x)}\right)dx, \quad \Phi(x) = \int F(x)\,dx.$$

Более сложные решения указаны далее в п. 4°.

4°. Исходное уравнение для любых функций $f(x)$ и $g(x)$ допускает частные решения вида

$$w_n(x,t) = \sum_{i=0}^{n} t^i \varphi_{n,i}(x). \tag{4}$$

Подставляя выражение (4) в исходное уравнение и приравнивая члены при одинаковых степенях t, для определения функций $\varphi_{n,i} = \varphi_{n,i}(x)$ получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений (штрихи соответствуют производным по x):

$$f(x)\varphi''_{n,n} + g(x)\varphi'_{n,n} = 0,$$
$$f(x)\varphi''_{n,i} + g(x)\varphi'_{n,i} = (i+1)\varphi_{n,i+1}; \quad i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n-1.$$

Интегрируя эти уравнения последовательно в порядке убывания номера i, находим решение (A, B — любые):

$$\begin{aligned} &\varphi_{n,n}(x) = A + B\int F(x)\,dx, \quad F(x) = \exp\left[-\int \frac{g(x)}{f(x)}dx\right], \\ &\varphi_{n,i}(x) = n(n-1)\ldots(i+1)L_f^{n-i}\left[\varphi_{n,n}(x)\right]; \quad i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n-1. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь интегральный оператор $\boldsymbol{L}_f$ вводится следующим образом:

$$\boldsymbol{L}_f[y(x)] \equiv \int F(x)\Bigl(\int \frac{y(x)\,dx}{f(x)F(x)}\Bigr)\,dx. \tag{6}$$

Степени оператора определяются так: $\boldsymbol{L}_f^i[y(x)] = \boldsymbol{L}_f\bigl[\boldsymbol{L}_f^{i-1}[y(x)]\bigr]$.

Формулы (4)–(6) дают решение исходного уравнения для произвольной функции $f(x)$.

Линейная комбинация частных решений (4):

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{N} C_n w_n(x,t) \qquad (C_n \text{ — произвольны})$$

также является решением однородного уравнения.

О структуре других частных решений см. уравнение 1.8.6.5 (замечание в п. 3°).

5°. Замена $\xi = \int \varphi(x)\,dx$, $\varphi(x) = \exp\Bigl[-\int \frac{g(x)}{f(x)}dx\Bigr]$ приводит к уравнению вида 1.8.6.1:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = F(\xi)\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2},$$

где функция $F = F(\xi)$ определяется путем исключения переменной x из выражений

$$F = f(x)\varphi^2(x), \quad \xi = \int \varphi(x)\,dx.$$

6°. Решение уравнения в виде бесконечного ряда, содержащее произвольную функцию координаты:

$$w(x,t) = \Theta(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}t^n \boldsymbol{L}^n[\Theta(x)], \qquad \boldsymbol{L} \equiv f(x)\frac{d^2}{dx^2} + g(x)\frac{d}{dx},$$

где $\Theta(x)$ — любая бесконечно дифференцируемая функция. Это решение удовлетворяет начальному условию $w(x,0) = \Theta(x)$.

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 317–318).

5. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = f(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x)\frac{\partial w}{\partial x} + h(x)w + \Phi(x,t).$

1°. Это уравнение можно представить в виде

$$s(x)\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Bigl[p(x)\frac{\partial w}{\partial x}\Bigr] - q(x)w + s(x)\Phi(x,t), \tag{1}$$

где

$$s(x) = \frac{1}{f(x)}\exp\Bigl[\int \frac{g(x)}{f(x)}dx\Bigr], \quad p(x) = \exp\Bigl[\int \frac{g(x)}{f(x)}dx\Bigr], \quad q(x) = -\frac{h(x)}{f(x)}\exp\Bigl[\int \frac{g(x)}{f(x)}dx\Bigr].$$

О решении уравнения (1) см. в разд. 1.8.9.

2°. Рассмотрим однородное уравнение при $\Phi(x,t) \equiv 0$.

2.1. Частные решения с разделяющимися переменными имеют вид

$$w(x,t) = e^{-\lambda t}u(x),$$

где функция $u(x)$ ищется путем решения следующего линейного обыкновенного дифференциального уравнения с параметром λ:

$$f(x)u''_{xx} + g(x)u'_x + \bigl[h(x) + \lambda\bigr]u = 0.$$

2.2. Пусть известно нетривиальное частное решение $w_0 = w_0(x)$ обыкновенного дифференциального уравнения

$$f(x)w_0'' + g(x)w_0' + h(x)w_0 = 0, \tag{2}$$

соответствующего стационарному случаю ($\partial_t w \equiv 0$). Тогда другими частными решениями исходного уравнения будут функции

$$w(x) = Aw_0 + Bw_0\int \frac{F}{w_0^2}dx, \quad F = \exp\Bigl(-\int \frac{g}{f}dx\Bigr),$$

$$w(x,t) = Atw_0 + Aw_0\int \frac{F}{w_0^2}\Bigl(\int \frac{w_0^2}{fF}\,dx\Bigr)\,dx,$$

$$w(x,t) = Atw_0\Psi + Aw_0\int \frac{F}{w_0^2}\Bigl(\int \frac{w_0^2\Psi}{fF}dx\Bigr)\,dx, \quad \Psi = \int \frac{F}{w_0^2}dx,$$

где A, B — произвольные постоянные.

Широкий класс более сложных решений исходного уравнения можно указать, сделав предварительно замену $w(x,t) = w_0(x)u(x,t)$, которая приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left[2f(x)\frac{w_0'(x)}{w_0(x)} + g(x)\right]\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Отсюда с помощью результатов п. 4° из 1.8.6.4 следует, что любое нетривиальное частное решение вспомогательного линейного обыкновенного дифференциального уравнения (2) порождает бесконечное множество частных решений исходного уравнения в частных производных.

О структуре других частных решений см. замечание в конце п. 3°.

2.3. Пусть известно частное нестационарное решение $w_0 = w_0(x,t)$ $(\partial_t w_0 \not\equiv 0)$ однородного уравнения. Тогда функции

$$w_n(x,t) = \frac{\partial^n w_0}{\partial t^n}(x,t),$$

полученные дифференцированием этого решения по переменной t, также будут частными решениями рассматриваемого уравнения.

Кроме того, новое частное решение можно искать в виде

$$\bar{w}(x,t) = \int_{t_0}^{t} w_0(x,\tau)\,d\tau + \phi(x), \tag{3}$$

где неизвестная функция $\phi(x)$ находится после подстановки выражения (3) в исходное уравнение. Построив решение (3), можно указанным способом строить следующее решение и т. д.

2.4. Случай $h(x) = h = \text{const}$. Частные решения (A, B — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = e^{ht}\bigl[A + B\int F(x)\,dx\bigr], \quad F(x) = \exp\Bigl[-\int \frac{g(x)}{f(x)}\,dx\Bigr],$$

$$w(x,t) = Ae^{ht}\Bigl[t + \int F(x)\Bigl(\int \frac{dx}{f(x)F(x)}\Bigr)dx\Bigr],$$

$$w(x,t) = Ae^{ht}\Bigl[t\Psi(x) + \int F(x)\Bigl(\int \frac{\Psi(x)\,dx}{f(x)F(x)}\Bigr)dx\Bigr], \quad \Psi(x) = \int F(x)\,dx.$$

Замена $w(x,t) = e^{ht}v(x,t)$ приводит к уравнению вида 1.8.6.4:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = f(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + g(x)\frac{\partial v}{\partial x}.$$

3°. Структура частных решений $\bar{w}(x,t)$ неоднородного уравнения 1.8.6.5 для некоторых функций $\Phi(x,t)$ указана в табл. 17.

Замечание. Однородное уравнение (при $\Phi \equiv 0$) будет иметь все частные решения, которые указаны в табл. 17. В этом случае следует считать, что n — любое целое число, а β и λ — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 322–324).

6. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = f(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x)\frac{\partial w}{\partial x} + h(t)w.$

1°. Частные решения (A, B — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = \bigl[A + B\int F(x)\,dx\bigr]H(t),$$

$$w(x,t) = A\Bigl[t + \int F(x)\Bigl(\int \frac{dx}{f(x)F(x)}\Bigr)dx\Bigr]H(t),$$

$$w(x,t) = A\Bigl[t\Psi(x) + \int F(x)\Bigl(\int \frac{\Psi(x)\,dx}{f(x)F(x)}\Bigr)dx\Bigr]H(t).$$

При записи этих формул использованы следующие обозначения:

$$H(t) = \exp\Bigl[\int h(t)\,dt\Bigr], \quad F(x) = \exp\Bigl[-\int \frac{g(x)}{f(x)}\,dx\Bigr], \quad \Psi(x) = \int F(x)\,dx.$$

ТАБЛИЦА 17

Структура частных решений линейных неоднородных уравнений специального вида.

№	Функции $\Phi(x,t)$	Вид частного решения $\bar{w}(x,t)$	Замечания
1	$\varphi(x)t^n$	$\sum\limits_{m=0}^{n} \psi_m(x)t^m$	n — целое, уравнения для $\psi_m(x)$ решаются последовательно, начиная с $m=n$
2	$\varphi(x)e^{\beta t}$	$\psi(x)e^{\beta t}$	$\psi(x)$ описыватся одним уравнением
3	$\varphi(x)t^n e^{\beta t}$	$e^{\beta t}\sum\limits_{m=0}^{n} \psi_m(x)t^m$	n — целое, уравнения для $\psi_m(x)$ решаются последовательно, начиная с $m=n$
4	$\varphi(x)\,\mathrm{sh}(\beta t)$	$\psi(x)e^{\beta t}+\chi(x)e^{-\beta t}$	уравнения для $\psi(x)$ и $\chi(x)$ независимы
5	$\varphi(x)\,\mathrm{ch}(\beta t)$	$\psi(x)e^{\beta t}+\chi(x)e^{-\beta t}$	уравнения для $\psi(x)$ и $\chi(x)$ независимы
6	$\varphi(x)\sin(\beta t)$	$\psi(x)\sin(\beta t)+\chi(x)\cos(\beta t)$	система уравнений для $\psi(x)$ и $\chi(x)$
7	$\varphi(x)\cos(\beta t)$	$\psi(x)\sin(\beta t)+\chi(x)\cos(\beta t)$	система уравнений для $\psi(x)$ и $\chi(x)$
8	$\varphi(x)e^{\lambda t}\sin(\beta t)$	$\psi(x)e^{\lambda t}\sin(\beta t)+\chi(x)e^{\lambda t}\cos(\beta t)$	система уравнений для $\psi(x)$ и $\chi(x)$
9	$\varphi(x)e^{\lambda t}\cos(\beta t)$	$\psi(x)e^{\lambda t}\sin(\beta t)+\chi(x)e^{\lambda t}\cos(\beta t)$	система уравнений для $\psi(x)$ и $\chi(x)$

2°. Замена $w(x,t)=u(x,t)\exp\Bigl[\int h(t)\,dt\Bigr]$ приводит к уравнению вида 1.8.6.4:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=f(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g(x)\frac{\partial u}{\partial x}.$$

7. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t}=f(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+g(x)\frac{\partial w}{\partial x}+\bigl[h_1(x)+h_2(t)\bigr]w.$

Замена $w(x,t)=u(x,t)\exp\Bigl[\int h_2(t)\,dt\Bigr]$ приводит к уравнению вида 1.8.6.5:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=f(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g(x)\frac{\partial u}{\partial x}+h_1(x)u.$$

8. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t}=f^2(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+f(x)\bigl[f'_x(x)+g(t)\bigr]\frac{\partial w}{\partial x}+h(t)w.$

Замена $\xi=\displaystyle\int\frac{dx}{f(x)}$ приводит к частному случаю уравнения 1.8.7.3:

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}+g(t)\frac{\partial w}{\partial \xi}+h(t)w.$$

9. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t}=f^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+f(f'_x+2g+\varphi)\frac{\partial w}{\partial x}+(fg'_x+g^2+g\varphi+\psi)w,$

где $f=f(x),\ g=g(x),\ \varphi=\varphi(t),\ \psi=\psi(t).$

Преобразование

$$w(x,t)=u(\xi,t)\exp\Bigl(-\int\frac{g}{f}dx\Bigr),\quad \xi=\int\frac{dx}{f(x)}$$

приводит к частному случаю уравнения 1.8.7.3:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\varphi(t)\frac{\partial u}{\partial \xi}+\psi(t)u.$$

1.8.7. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x,t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(x,t)w$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(t)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

1°. Частные решения (A, B, λ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = Ax + A\int g(t)\,dt + B,$$
$$w(x,t) = A\Big[x + \int g(t)\,dt\Big]^2 + 2A\int f(t)\,dt + B,$$
$$w(x,t) = A\exp\Big[\lambda x + \lambda^2\int f(t)\,dt + \lambda\int g(t)\,dt\Big].$$

2°. Переходя от t, x к новым переменным (A, B — любые)

$$\tau = \int f(t)\,dt + A, \qquad z = x + \int g(t)\,dt + B,$$

для функции $w(\tau, z)$ получим уравнение с постоянными коэффициентами $\partial_\tau w = \partial_{zz} w$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + xg(t)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

1°. Частные решения (A, B, λ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = AxG(t) + B, \quad G(t) = \exp\Big[\int g(t)\,dt\Big],$$
$$w(x,t) = Ax^2G^2(t) + 2A\int f(t)G^2(t)\,dt + B,$$
$$w(x,t) = A\exp\Big[\lambda xG(t) + \lambda^2\int f(t)G^2(t)\,dt\Big].$$

2°. Переходя от t, x к новым переменным (A — любое)

$$\tau = \int f(t)G^2(t)\,dt + A, \quad z = xG(t), \qquad \text{где} \quad G(t) = \exp\Big[\int g(t)\,dt\Big],$$

для функции $w(\tau, z)$ получим уравнение с постоянными коэффициентами $\partial_\tau w = \partial_{zz} w$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(t)w$.

Частный случай уравнения 1.8.7.4.

Преобразование

$$w(x,t) = u(z,\tau)\exp\Big[\int h(t)\,dt\Big], \quad z = x + \int g(t)\,dt, \quad \tau = \int f(t)\,dt$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_\tau u = \partial_{zz} u$, которое рассматривается в разделе 1.1.1.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = n(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \big[xf(t) + g(t)\big]\dfrac{\partial w}{\partial x} + \big[xh(t) + s(t)\big]w$.

Сделаем преобразование

$$w(x,t) = \exp\big[x\alpha(t) + \beta(t)\big]u(z,\tau), \quad \tau = \varphi(t), \quad z = x\psi(t) + \chi(t), \tag{1}$$

где неизвестные функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ находятся далее из условия максимального упрощения полученного уравнения. Для новой зависимой переменной $u(z,\tau)$ имеем

$$\varphi'_t\frac{\partial u}{\partial \tau} = n\psi^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \big[x(f\psi - \psi'_t) + 2n\psi\alpha + g\psi - \chi'_t\big]\frac{\partial u}{\partial z} +$$
$$+ \big[x(f\alpha + h - \alpha'_t) + n\alpha^2 + g\alpha + s - \beta'_t\big]u.$$

Пусть неизвестные функции удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi'_t = n\psi^2, \tag{2}$$
$$\psi'_t = f\psi, \tag{3}$$
$$\chi'_t = 2n\alpha\psi + g\psi, \tag{4}$$
$$\alpha'_t = f\alpha + h, \tag{5}$$
$$\beta'_t = n\alpha^2 + g\alpha + s. \tag{6}$$

Тогда исходное уравнение преобразованием (1)–(6) приводится к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

которое подробно рассматривается в разд. 1.1.1.

Систему (2)–(6) можно решить последовательно, начиная, например, с уравнения (3), в следующем порядке: (3) $\to$ (2) $\to$ (5) $\to$ (6) $\to$ (4). В результате получим искомые функции

$$\psi = C_1 \exp\Bigl(\int f\,dt\Bigr), \quad C_1 \neq 0,$$
$$\varphi = \int n\psi^2\,dt + C_2,$$
$$\alpha = \psi \int \frac{h}{\psi}dt + C_3\psi,$$
$$\beta = \int \bigl(n\alpha^2 + g\alpha + s\bigr)\,dt + C_4,$$
$$\chi = \int (2n\alpha + g)\psi\,dt + C_5,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 — произвольные постоянные.

Замечание. Аналогичным образом можно упростить неоднородное уравнение с дополнительным слагаемым $\Phi(x,t)$ в правой части.

5. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = n(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bigl[xf(t) + g(t)\bigr]\frac{\partial w}{\partial x} + \bigl[x^2h(t) + xs(t) + p(t)\bigr]w.$

Замена $w(x,t) = \exp\bigl[\varphi(t)x^2\bigr]u(x,t)$ приводит к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = n\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \bigl[x(4n\varphi + f) + g\bigr]\frac{\partial u}{\partial x} + \\ + \bigl[x^2(h + 2f\varphi + 4n\varphi^2 - \varphi'_t) + x(s + 2g\varphi) + p + 2n\varphi\bigr]u. \tag{1}$$

Выбираем функцию $\varphi = \varphi(t)$ так, чтобы она была решением (частным) обыкновенного дифференциального уравнения Риккати

$$\varphi'_t = 4n\varphi^2 + 2f\varphi + h. \tag{2}$$

Тогда преобразованное уравнение (1) становится уравнением вида 1.8.7.4:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = n\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \bigl[x(4n\varphi + f) + g\bigr]\frac{\partial u}{\partial x} + \bigl[x(s + 2g\varphi) + p + 2n\varphi\bigr]u.$$

Большое число конкретных разрешимых уравнений Риккати (2) описано в справочниках Э. Камке (1971) и В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995) [см. также G. M. Murphy (1960)].

В частном случае, при выполнении условий

$$n = af, \quad h = bf, \qquad \text{где} \quad a, b = \text{const}, \quad f = f(t),$$

частными решениями уравнения (2) являются корни квадратного уравнения $4a\varphi^2 + 2\varphi + b = 0$ ($\varphi = \text{const}$).

1.8.8. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(x,t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x,t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(x,t)w$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = xf(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + xg(t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + \big[xh(t) + s(t)\big]w.$

Сделаем преобразование

$$\tau = \varphi(t), \quad z = x\psi(t), \quad w(x,t) = u(z,\tau)\exp\Big[x\alpha(t) + \int s(t)\,dt\Big], \tag{1}$$

где неизвестные функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\alpha(t)$ находятся далее из условия максимального упрощения полученного уравнения. Для новой зависимой переменной $u(z,\tau)$ имеем

$$\varphi'_t\frac{\partial u}{\partial \tau} = zf\psi\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{z}{\psi}(2f\psi\alpha + g\psi - \psi'_t)\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{z}{\psi}(f\alpha^2 + g\alpha + h - \alpha'_t)u.$$

Пусть неизвестные функции удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi'_t = f\psi, \tag{2}$$
$$\psi'_t = 2f\alpha\psi + g\psi, \tag{3}$$
$$\alpha'_t = f\alpha^2 + g\alpha + h. \tag{4}$$

Тогда исходное уравнение преобразованием (1)–(4) приводится к уравнению вида 1.3.4.1:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Систему (2)–(4) будем решать последовательно, начиная с уравнения (4) в следующем порядке: (4) $\to$ (3) $\to$ (2).

Уравнение Риккати (4) можно решать отдельно. Большое число конкретных разрешимых уравнений этого вида приведено в справочниках Э. Камке (1971) и В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995) [см. также G. M. Murphy (1960)].

Считая, что решение $\alpha = \alpha(t)$ уравнения (4) получено, находим решения уравнений (2), (3) в виде (C_1, C_2 — любые):

$$\psi(t) = C_1\exp\Big[\int(2f\alpha + g)\,dt\Big], \quad \varphi(t) = \int f\psi\,dt + C_2.$$

Замечание. Преобразованием (1)–(4) можно упростить неоднородное уравнение с дополнительным слагаемым $\Phi(x,t)$ в правой части.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = x^2 f(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + xg(t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(t)w.$

Замена $x = \pm e^{\xi}$ приводит к уравнению вида 1.8.7.3:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = f(t)\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \big[g(t) - f(t)\big]\frac{\partial w}{\partial \xi} + h(t)w.$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = x^2 n(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x\big[f(t)\ln x + g(t)\big]\dfrac{\partial w}{\partial x} + \big[h(t)\ln^2 x + s(t)\ln x + p(t)\big]w.$

Замена $z = \ln x$ приводит к уравнению вида 1.8.7.5:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = n(t)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \big[zf(t) + g(t) - n(t)\big]\frac{\partial w}{\partial z} + \big[z^2h(t) + zs(t) + p(t)\big]w.$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = x^4 f(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(t)w.$

1°. Частные решения (A, B, λ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = (Ax + B)\exp\Big[\int g(t)\,dt\Big],$$
$$w(x,t) = \Big[2Ax\int f(t)\,dt + Bx + \frac{A}{x}\Big]\exp\Big[\int g(t)\,dt\Big],$$
$$w(x,t) = Ax\exp\Big[\lambda^2\int f(t)\,dt + \int g(t)\,dt + \frac{\lambda}{x}\Big].$$

2°. Преобразование

$$w(x,t) = x\exp\Bigl[\int g(t)\,dt\Bigr]u(\xi,\tau), \quad \xi = \frac{1}{x}, \quad \tau = \int f(t)\,dt$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_\tau u = \partial_{\xi\xi} u$, которое рассматривается в разделе 1.1.1.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = (x-a_1)^2(x-a_2)^2 f(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(t)w, \qquad a_1 \neq a_2.$

Преобразование

$$w(x,t) = (x-a_2)\exp\Bigl[\int g(t)\,dt\Bigr]u(\xi,\tau), \quad \xi = \ln\frac{x-a_1}{x-a_2}, \quad \tau = (a_1-a_2)^2\int f(t)\,dt$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial u}{\partial \xi},$$

которое рассматривается в разд. 1.1.4.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = (ax^2+bx+c)^2 f(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(t)w.$

Преобразование

$$w(x,t) = (ax^2+bx+c)^{1/2}\exp\Bigl[\int g(t)\,dt\Bigr]u(\xi,\tau), \quad \xi = \int\frac{dx}{ax^2+bx+c}, \quad \tau = \int f(t)\,dt$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \bigl(ac - \tfrac{1}{4}b^2\bigr)u,$$

которое рассматривается в разд. 1.1.3.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = x^n f(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + xg(t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(t)w.$

Преобразование

$$w(x,t) = u(z,\tau)\exp\Bigl[\int h(t)\,dt\Bigr], \quad z = xG(t), \quad \tau = \int f(t)G^{2-n}(t)\,dt,$$

где $G(t) = \exp\Bigl[\int g(t)\,dt\Bigr]$, приводит к уравнению вида 1.3.6.6:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = z^n\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = e^{\beta x} f(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(t)w.$

Преобразование

$$w(x,t) = \exp\Bigl[\int g(t)\,dt\Bigr]u(x,\tau), \qquad \tau = \int f(t)\,dt$$

приводит к уравнению вида 1.4.5.1:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = e^{\beta x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(x)g(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + h(t)w.$

1°. Частные решения (A, B, x_0 — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = (Ax+B)H(t),$$
$$w(x,t) = A\bigl[M(t)+F(x)\bigr]H(t),$$
$$w(x,t) = A\bigl[M(t)x+\Psi(x)\bigr]H(t),$$
$$w(x,t) = A\Bigl[M^2(t)+2M(t)F(x)+2\int_{x_0}^{x}\frac{(x-\xi)}{f(\xi)}F(\xi)\,d\xi\Bigr]H(t),$$
$$w(x,t) = A\Bigl[M^2(t)x+2M(t)\Psi(x)+2\int_{x_0}^{x}\frac{(x-\xi)}{f(\xi)}\Psi(\xi)\,d\xi\Bigr]H(t).$$

Здесь использованы краткие обозначения:

$$H(t) = \exp\left[\int h(t)\,dt\right], \quad M(t) = \int g(t)\,dt,$$

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)}{f(\xi)}\,d\xi, \qquad \Psi(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)}{f(\xi)}\,\xi\,d\xi.$$

2°. Преобразование

$$w(x,t) = \exp\left[\int h(t)\,dt\right] u(x,\tau), \qquad \tau = \int g(t)\,dt$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = f(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Широкий класс частных решений этого уравнения описан в 1.8.6.1.

1.8.9. Уравнения вида $s(x)\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] - q(x)w + \Phi(x,t)$.

Уравнения этого вида часто встречаются в теории тепло- и массопереноса и химической технологии. Далее считается, что функции s, p, p'_x, q — непрерывны, $s > 0, p > 0$ и $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$.

1.8.9-1. Общие формулы для решения линейных неоднородных краевых задач.

Решение данного уравнения с начальным условием

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \tag{1}$$

и произвольными линейными неоднородными граничными условиями

$$\begin{aligned} a_1\partial_x w + b_1 w &= g_1(t) \quad \text{при} \quad x = x_1,\\ a_2\partial_x w + b_2 w &= g_2(t) \quad \text{при} \quad x = x_2 \end{aligned} \tag{2}$$

можно записать в виде суммы

$$\begin{aligned} w(x,t) = \int_0^t \int_{x_1}^{x_2} \Phi(\xi,\tau)\mathcal{G}(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau + \int_{x_1}^{x_2} s(\xi)f(\xi)\mathcal{G}(x,\xi,t)\,d\xi\,+\\ + p(x_1)\int_0^t g_1(\tau)\Lambda_1(x,t-\tau)\,d\tau + p(x_2)\int_0^t g_2(\tau)\Lambda_2(x,t-\tau)\,d\tau. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь модифицированная функция Грина определяется по формуле

$$\mathcal{G}(x,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n(x)y_n(\xi)}{\|y_n\|^2}\exp(-\lambda_n t), \qquad \|y_n\|^2 = \int_{x_1}^{x_2} s(x)y_n^2(x)\,dx, \tag{4}$$

где λ_n и $y_n(x)$ — собственные значения и собственные функции задачи Штурма — Лиувилля для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\begin{aligned} &[p(x)y'_x]'_x + [\lambda s(x) - q(x)]y = 0,\\ &a_1 y'_x + b_1 y = 0 \quad \text{при} \quad x = x_1,\\ &a_2 y'_x + b_2 y = 0 \quad \text{при} \quad x = x_2. \end{aligned} \tag{5}$$

Функции $\Lambda_1(x,t)$ и $\Lambda_2(x,t)$, входящие в подынтегральные выражения двух последних слагаемых в решении (3), выражаются через функцию Грина (4). Соответствующие формулы будут указаны далее при исследовании конкретных краевых задач в разд. 1.8.9-3 — 1.8.9-7.

1.8.9-2. Общие свойства задачи Штурма — Лиувилля (5).

1°. Существует бесконечное множество собственных значений. Все собственные значения вещественны и могут быть упорядочены $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots$, причем $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$ (поэтому может быть лишь конечное число отрицательных собственных значений). Каждое собственное значение имеет кратность 1.

2°. Собственные функции определяются с точностью до постоянного множителя. Каждая собственная функция $y_n(x)$ имеет в открытом интервале (x_1, x_2) ровно $n-1$ нулей.

3°. Собственные функции $y_n(x)$ и $y_m(x)$ при $n \neq m$ ортогональны между собой с весом $s(x)$ на отрезке $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$:

$$\int_{x_1}^{x_2} s(x) y_n(x) y_m(x)\, dx = 0 \quad \text{при} \quad n \neq m.$$

4°. Произвольная функция $F(x)$, имеющая непрерывную производную и удовлетворяющая граничным условиям задачи Штурма — Лиувилля, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n y_n(x), \quad F_n = \frac{1}{\|y_n\|^2} \int_{x_1}^{x_2} s(x) F(x) y_n(x)\, dx,$$

где формула для $\|y_n\|^2$ приведена в (4).

5°. При выполнении условий

$$q(x) \geqslant 0, \quad a_1 b_1 \leqslant 0, \quad a_2 b_2 \geqslant 0 \tag{6}$$

отрицательных собственных значений нет. Если $q \equiv 0$, $b_1 = b_2 = 0$, то наименьшим собственным значением будет $\lambda_1 = 0$, которому отвечает собственная функция $\varphi_1 = \text{const}$. В остальных случаях при выполнении условий (6) все собственные значения положительны.

6°. Для собственных значений справедлива асимптотическая формула при $n \to \infty$:

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{\Delta^2} + O(1), \quad \Delta = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{s(x)}{p(x)}}\, dx. \tag{7}$$

В разд. 1.8.9-3 — 1.8.9-7 будут описаны также специальные свойства задачи Штурма — Лиувилля, которые зависят от вида граничных условий.

Замечание. Уравнение (5) сводится к случаю $p(x) \equiv 1$, $s(x) \equiv 1$ с помощью подстановки

$$\zeta = \int \sqrt{\frac{s(x)}{p(x)}}\, dx, \quad u(\zeta) = \bigl[p(x)s(x)\bigr]^{1/4} y(x).$$

При этом граничные условия преобразуются в граничные условия аналогичного вида.

1.8.9-3. Первая краевая задача (случай $a_1 = a_2 = 0$, $b_1 = b_2 = 1$).

Решение первой краевой задачи с начальным условием (1) и граничными условиями

$$w = g_1(t) \quad \text{при} \quad x = x_1,$$
$$w = g_2(t) \quad \text{при} \quad x = x_2$$

дается формулами (3)–(4), где

$$\Lambda_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial \xi} \mathcal{G}(x,\xi,t)\Big|_{\xi=x_1}, \quad \Lambda_2(x,t) = -\frac{\partial}{\partial \xi} \mathcal{G}(x,\xi,t)\Big|_{\xi=x_2}.$$

Отметим некоторые специальные свойства задачи Штурма — Лиувилля:

1°. При $n \to \infty$ для оценки собственных значений λ_n можно использовать асимптотику (7). При этом для собственных функций $y_n(x)$ справедлива формула

$$\frac{y_n(x)}{\|y_n\|} = \left[\frac{4}{\Delta^2 p(x) s(x)}\right]^{1/4} \sin\left[\frac{\pi n}{\Delta} \int_{x_1}^{x} \sqrt{\frac{s(x)}{p(x)}}\, dx\right] + O\Bigl(\frac{1}{n}\Bigr), \quad \Delta = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{s(x)}{p(x)}}\, dx.$$

2°. При $q \geqslant 0$ для наименьшего собственного значения имеет место оценка сверху (принцип Рэлея):

$$\lambda_1 \leqslant \frac{\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \bigl[p(x)(z'_x)^2 + q(x)z^2\bigr]\, dx}{\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} s(x) z^2\, dx}, \tag{8}$$

где $z = z(x)$ — любая дважды дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям $z(x_1) = z(x_2) = 0$. Знак равенства в (8) достигается при $z = y_1(x)$, где $y_1(x)$ — собственная функция задачи Штурма — Лиувилля, соответствующая собственному значению λ_1. Для получения конкретных оценок в правой части (8) можно положить $z = (x - x_1)(x_2 - x)$ или $z = \sin\Bigl[\dfrac{\pi(x - x_1)}{x_2 - x_1}\Bigr]$.

3°. Пусть выполнены неравенства

$$0 < p_{\min} \leqslant p(x) \leqslant p_{\max}, \quad 0 < q_{\min} \leqslant q(x) \leqslant q_{\max}, \quad 0 < s_{\min} \leqslant s(x) \leqslant s_{\max}.$$

Тогда для собственных значений справедливы двусторонние оценки:

$$\frac{p_{\min}}{s_{\max}} \frac{\pi^2 n^2}{(x_2 - x_1)^2} + \frac{q_{\min}}{s_{\max}} \leqslant \lambda_n \leqslant \frac{p_{\max}}{s_{\min}} \frac{\pi^2 n^2}{(x_2 - x_1)^2} + \frac{q_{\max}}{s_{\min}}.$$

4°. В инженерных расчетах для определения собственных значений можно использовать приближенную формулу

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{\Delta^2} + \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \frac{q(x)}{s(x)}\, dx, \quad \Delta = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{s(x)}{p(x)}}\, dx. \tag{9}$$

Эта формула обеспечивает точный результат при $p(x)s(x) = \text{const}$, $q(x)/s(x) = \text{const}$ (в частности, при постоянных коэффициентах уравнения $p = p_0$, $q = q_0$, $s = s_0$) и дает правильную асимптотику (7) для любых $p(x)$, $q(x)$, $s(x)$. Кроме того, при $p(x) = \text{const}$, $s(x) = \text{const}$ формула (9) дает правильных два первых члена разложения при $n \to \infty$ [сказанное справедливо также при выполнении условия $p(x)s(x) = \text{const}$].

5°. Пусть $p(x) = s(x) = 1$ и функция $q = q(x)$ имеет непрерывную производную. Асимптотические формулы для собственных значений λ_n и собственных функций $y_n(x)$ при $n \to \infty$:

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi n}{x_2 - x_1} + \frac{1}{\pi n} Q(x_1, x_2) + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

$$y_n(x) = \sin \frac{\pi n(x - x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{1}{\pi n}\Big[(x_1 - x)Q(x, x_2) + (x_2 - x)Q(x_1, x)\Big] \cos \frac{\pi n(x - x_1)}{x_2 - x_1} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

где

$$Q(u, v) = \frac{1}{2} \int_u^v q(x)\, dx. \tag{10}$$

1.8.9-4. Вторая краевая задача (случай $a_1 = a_2 = 1$, $b_1 = b_2 = 0$).

Решение второй краевой задачи с начальным условием (1) и граничными условиями

$$\partial_x w = g_1(t) \quad \text{при} \quad x = x_1,$$
$$\partial_x w = g_2(t) \quad \text{при} \quad x = x_2$$

дается формулами (3)–(4), где

$$\Lambda_1(x, t) = -\mathcal{G}(x, x_1, t), \quad \Lambda_2(x, t) = \mathcal{G}(x, x_2, t).$$

Отметим некоторые специальные свойства задачи Штурма — Лиувилля:

1°. При $q > 0$ для наименьшего собственного значения имеет место оценка сверху (8), где $z = z(x)$ — любая дважды дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям $z'_x(x_1) = z'_x(x_2) = 0$. Знак равенства в (8) достигается при $z = y_1(x)$, где $y_1(x)$ — собственная функция задачи Штурма — Лиувилля, соответствующая собственному значению λ_1.

2°. Пусть $p(x) = s(x) = 1$ и функция $q = q(x)$ имеет непрерывную производную. Асимптотические формулы для собственных значений λ_n и собственных функций $y_n(x)$ при $n \to \infty$:

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi(n-1)}{x_2 - x_1} + \frac{1}{\pi(n-1)} Q(x_1, x_2) + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

$$y_n(x) = \cos \frac{\pi(n-1)(x - x_1)}{x_2 - x_1} + \frac{1}{\pi(n-1)}\Big[(x_1 - x)Q(x, x_2) + $$
$$+ (x_2 - x)Q(x_1, x)\Big] \sin \frac{\pi(n-1)(x - x_1)}{x_2 - x_1} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

где функция $Q(u, v)$ определяется по формуле (10).

1.8.9-5. Третья краевая задача (случай $a_1 = a_2 = 1$, $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$).

Решение третьей краевой задачи с начальным условием (1) и граничными условиями (2) при $a_1 = a_2 = 1$ дается формулами (3)–(4), где

$$\Lambda_1(x,t) = -\mathcal{G}(x,x_1,t), \quad \Lambda_2(x,t) = \mathcal{G}(x,x_2,t).$$

Пусть $p(x) = s(x) = 1$ и функция $q = q(x)$ имеет непрерывную производную. Асимптотические формулы для собственных значений λ_n и собственных функций $y_n(x)$ при $n \to \infty$:

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi(n-1)}{x_2 - x_1} + \frac{1}{\pi(n-1)}\big[Q(x_1,x_2) - b_1 + b_2\big] + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

$$y_n(x) = \cos\frac{\pi(n-1)(x-x_1)}{x_2-x_1} + \frac{1}{\pi(n-1)}\Big\{(x_1 - x)\big[Q(x,x_2) + b_2\big] + {}$$
$$+ (x_2 - x)\big[Q(x_1,x) - b_1\big]\Big\}\sin\frac{\pi(n-1)(x-x_1)}{x_2-x_1} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

где функция $Q(u,v)$ определяется по формуле (10).

1.8.9-6. Смешанная краевая задача (случай $a_1 = b_2 = 0$, $a_2 = b_1 = 1$).

Решение смешанной краевой задачи с начальным условием (1) и граничными условиями

$$w = g_1(t) \quad \text{при} \quad x = x_1,$$
$$\partial_x w = g_2(t) \quad \text{при} \quad x = x_2$$

дается формулами (3)–(4), где

$$\Lambda_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial\xi}\mathcal{G}(x,\xi,t)\Big|_{\xi=x_1}, \quad \Lambda_2(x,t) = \mathcal{G}(x,x_2,t).$$

Отметим некоторые специальные свойства задачи Штурма — Лиувилля:

1°. При $q \geqslant 0$ для наименьшего собственного значения имеет место оценка сверху (8), где $z = z(x)$ — любая дважды дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям $z(x_1) = 0$ и $z'_x(x_2) = 0$. Знак равенства в (8) достигается при $z = y_1(x)$, где $y_1(x)$ — собственная функция задачи Штурма — Лиувилля, соответствующая собственному значению λ_1.

2°. Пусть $p(x) = s(x) = 1$ и функция $q = q(x)$ имеет непрерывную производную. Асимптотические формулы для собственных значений λ_n и собственных функций $y_n(x)$ при $n \to \infty$:

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi(2n-1)}{2(x_2-x_1)} + \frac{2}{\pi(2n-1)}Q(x_1,x_2) + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

$$y_n(x) = \sin\frac{\pi(2n-1)(x-x_1)}{2(x_2-x_1)} - \frac{2}{\pi(2n-1)}\Big[(x_1-x)Q(x,x_2) + {}$$
$$+ (x_2-x)Q(x_1,x)\Big]\cos\frac{\pi(2n-1)(x-x_1)}{2(x_2-x_1)} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

где функция $Q(u,v)$ определяется по формуле (10).

1.8.9-7. Смешанная краевая задача (случай $a_1 = b_2 = 1$, $a_2 = b_1 = 0$).

Решение смешанной краевой задачи с начальным условием (1) и граничными условиями

$$\partial_x w = g_1(t) \quad \text{при} \quad x = x_1,$$
$$w = g_2(t) \quad \text{при} \quad x = x_2$$

дается формулами (3)–(4), где

$$\Lambda_1(x,t) = -\mathcal{G}(x,x_1,t), \quad \Lambda_2(x,t) = -\frac{\partial}{\partial\xi}\mathcal{G}(x,\xi,t)\Big|_{\xi=x_2}.$$

Отметим некоторые специальные свойства задачи Штурма — Лиувилля:

1°. При $q \geqslant 0$ для наименьшего собственного значения имеет место оценка сверху (8), где $z = z(x)$ — любая дважды дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям $z'_x(x_1) = 0$ и $z(x_2) = 0$. Знак равенства в (8) достигается при $z = y_1(x)$, где $y_1(x)$ — собственная функция задачи Штурма — Лиувилля, соответствующая собственному значению λ_1.

2°. Пусть $p(x) = s(x) = 1$ и функция $q = q(x)$ имеет непрерывную производную. Асимптотические формулы для собственных значений λ_n и собственных функций $y_n(x)$ при $n \to \infty$:

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi(2n-1)}{2(x_2-x_1)} + \frac{2}{\pi(2n-1)}Q(x_1,x_2) + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

$$y_n(x) = \cos\frac{\pi(2n-1)(x-x_1)}{2(x_2-x_1)} + \frac{2}{\pi(2n-1)}\Big[(x_1-x)Q(x,x_2) + {}$$
$$+ (x_2-x)Q(x_1,x)\Big]\sin\frac{\pi(2n-1)(x-x_1)}{2(x_2-x_1)} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

где функция $Q(u,v)$ определяется по формуле (10).

⊙ *Литература к разделу 1.8.9*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 48–51, 191–194), С. Гулд (1970), Э. Камке (1971, стр. 263–265), В. С. Владимиров (1971, стр. 473–474), А. Г. Костюченко, И. С. Саргсян (1979, стр. 42–56), Б. М. Левитан, И. С. Саргсян (1988), Л. Д. Акуленко, С. В. Нестеров (1997), В. А. Винокуров, В. А. Садовничий (2000), А. Д. Полянин (2000 *a*, *c*).

1.9. Уравнения специального вида

1.9.1. Уравнения диффузионного (теплового) пограничного слоя

1. $f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x)y\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}$.

Это уравнение встречается в задачах диффузионного пограничного слоя (массообмен капель и пузырей с потоком).

Преобразование (A, B — любые)

$$t = \int\frac{h^2(x)}{f(x)}dx + A, \quad z = yh(x), \qquad \text{где} \quad h(x) = B\exp\Big[-\int\frac{g(x)}{f(x)}dx\Big],$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t w = \partial_{zz} w$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

⊙ *Литература*: В. Г. Левич (1959, стр. 403–405), Ю. П. Гупало, А. Д. Полянин, Ю. С. Рязанцев (1985, стр. 54–57), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 328).

2. $f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x)y\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} - h(x)w$.

Это уравнение встречается в задачах диффузионного пограничного слоя с объемной химической реакцией первого порядка (обычно $h \equiv \text{const}$).

Преобразование (A, B — любые)

$$w(x,y) = u(t,z)\exp\Big[-\int\frac{h(x)}{f(x)}dx\Big], \quad t = \int\frac{\varphi^2(x)}{f(x)}dx + A, \quad z = y\varphi(x),$$

где $\varphi(x) = B\exp\Big[-\displaystyle\int\frac{g(x)}{f(x)}dx\Big]$, приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = \partial_{zz} u$, которое рассматривается в разд. 1.1.1.

⊙ *Литература*: Ю. П. Гупало, А. Д. Полянин, Ю. С. Рязанцев (1985, стр. 193), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 328–329).

3. $f(x)y^{n-1}\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x)y^n\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}$.

Это уравнение встречается в задачах диффузионного пограничного слоя (массообмен твердых частиц и капель), x — координата, направленная вдоль поверхности тела, y — координата, направленная по нормали к поверхности тела.

Преобразование (A, B — любые)

$$t = \int\frac{h^{n+1}(x)}{f(x)}dx + A, \quad z = yh(x), \qquad \text{где} \quad h(x) = B\exp\Big[-\int\frac{g(x)}{f(x)}dx\Big],$$

приводит к более простому уравнению вида 1.3.6.6:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = z^{1-n}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$$

⊙ *Литература*: В. Г. Левич (1959, стр. 88–91), Ю. П. Гупало, А. Д. Полянин, Ю. С. Рязанцев (1985, стр. 128–129), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 329).

4. $f\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{x}}g\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$

Это уравнение является обобщением уравнения теплового пограничного слоя на плоской пластине.

1°. Переходя от x, y к новым переменным $t = \ln x$, $\xi = \frac{y}{\sqrt{x}}$, получим уравнение с разделяющимися переменными

$$f(\xi)\frac{\partial w}{\partial t} + \left[g(\xi) - \frac{1}{2}\xi f(\xi)\right]\frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}.$$

Частные решения этого уравнения имеют вид

$$w(t,\xi) = Ae^{\beta t}\phi(\xi),$$

где функции $\phi(\xi)$ удовлетворяют обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\phi''_{\xi\xi} = \left[g(\xi) - \tfrac{1}{2}\xi f(\xi)\right]\phi'_\xi + \beta f(\xi)\phi.$$

2°. Область: $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$. Краевая задача.
Решение исходного уравнения с граничными условиями

$$x = 0, \quad w = w_0; \qquad y = 0, \quad w = w_1; \qquad y \to \infty, \quad w \to w_0$$

(w_0, w_1 — некоторые постоянные) имеет вид

$$\frac{w - w_0}{w_1 - w_0} = \frac{\int_\xi^\infty \exp\left[-\Psi(\xi)\right] d\xi}{\int_0^\infty \exp\left[-\Psi(\xi)\right] d\xi}, \qquad \Psi(\xi) = \int_0^\xi \left[\tfrac{1}{2}\xi f(\xi) - g(\xi)\right] d\xi,$$

где $\xi = y/\sqrt{x}$. Считается, что при $\xi > 0$ справедливо неравенство $\xi f(\xi) > 2g(\xi)$.

3°. Уравнение теплового пограничного слоя на плоской пластине задается соотношениями

$$f(\xi) = \Pr F'_\xi(\xi), \qquad g(\xi) = \tfrac{1}{2}\Pr\left[\xi F'_\xi(\xi) - F(\xi)\right],$$

где $F(\xi)$ — решение Блазиуса в задаче о продольном обтекании плоской пластины поступательным потоком, Pr — число Прандтля (x — координата, направленная вдоль пластины, а y — координата, направленная по нормали к поверхности пластины). Формулы п. 2° в этом случае переходят в решение Э. Польгаузена. Подробности см. в книге Г. Шлихтинга (1974, стр. 278–280).

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 329–330), А. Д. Полянин, А. В. Вязьмин, А. И. Журов, Д. А. Казенин (1998, стр. 122–123).

5. $f(x)\frac{\partial w}{\partial x} + \left[g(x)y - \frac{b}{y}\right]\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$

При $b = 1$ уравнения этого вида описывают распределение концентрации во внутренней области диффузионного следа за движущейся частицей и каплей.

Преобразование (A, B — любые)

$$t = \int \frac{h^2(x)}{f(x)}dx + A, \quad z = yh(x), \qquad \text{где} \quad h(x) = B\exp\left[-\int \frac{g(x)}{f(x)}\,dx\right],$$

приводит к уравнению вида 1.2.5:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{b}{z}\frac{\partial w}{\partial z}.$$

⊙ *Литература*: Ю. П. Гупало, А. Д. Полянин, Ю. С. Рязанцев (1985, стр. 29).

6. $f(x)\frac{\partial w}{\partial x} + \left[g(x)y - \frac{b}{y}\right]\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + h(x)w.$

Замена $w(x,y) = u(x,y)\exp\left[\int \frac{h(x)}{f(x)}dx\right]$ приводит к уравнению вида 1.9.1.5:

$$f(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \left[g(x)y - \frac{b}{y}\right]\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 330).

7. $f(x)y^{n-1}\dfrac{\partial w}{\partial x}+\left[g(x)y^{n}-\dfrac{b}{y}\right]\dfrac{\partial w}{\partial y}=\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$

Преобразование (A, B — любые)

$$t=\int\frac{h^{n+1}(x)}{f(x)}dx+A,\quad \xi=\frac{2}{n+1}\left[yh(x)\right]^{\frac{n+1}{2}},$$

где $h(x)=B\exp\left[-\int\frac{g(x)}{f(x)}dx\right]$, приводит к уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}+\frac{1-2\beta}{\xi}\frac{\partial w}{\partial \xi},\qquad \beta=\frac{1-b}{n+1},$$

которое рассматривается в разд. 1.2.5 (см. также уравнения в разд. 1.2.1 и 1.2.3).

1.9.2. Одномерное уравнение Шредингера $i\hbar\dfrac{\partial w}{\partial t}=-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+U(x)w$

1.9.2-1. Задача на собственные значения. Задача Коши.

Уравнение Шредингера является основным уравнением квантовой механики, где w — волновая функция, $i^2=-1$, $\hbar$ — постоянная Планка, m — масса частицы, $U(x)$ — ее потенциальная энергия в силовом поле.

1°. В задачах с дискретным спектром решения ищутся в виде

$$w(x,t)=\exp\left(-\frac{iE_n}{\hbar}t\right)\psi_n(x),$$

где собственные функции ψ_n и соответствующие им значения энергии E_n должны определятся путем решения задачи на собственные значения

$$\begin{gathered}\frac{d^2\psi_n}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\left[E_n-U(x)\right]\psi_n=0,\\ \psi_n\to 0 \text{ при } x\to\pm\infty,\qquad \int_{-\infty}^{\infty}|\psi_n|^2dx=1.\end{gathered}\tag{1}$$

Последнее условие является условием нормировки для функций ψ_n.

2°. В тех случаях, когда собственные функции $\psi_n(x)$ образуют ортонормированный базис в $L_2(\mathcal{R})$, решение задачи Коши для уравнения Шредингера при начальном условии

$$w=f(x)\quad\text{при}\quad t=0\tag{2}$$

дается формулой

$$w(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}G(x,\xi,t)f(\xi)\,d\xi,\qquad G(x,\xi,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(x)\psi_n(\xi)\exp\left(-\frac{iE_n}{\hbar}t\right).$$

Ниже рассматриваются различные потенциалы $U(x)$, приводятся решения задачи на собственные значения (1) или решения задачи Коши для уравнения Шредингера. В некоторых случаях вместо нормированных собственных функций $\psi_n(x)$ будут указываться ненормированные собственные функции $\Psi_n(x)$, которые постоянным множителем отличаются от нормированных.

1.9.2-2. Свободная частица, $U(x)=0$.

Решение задачи Коши с начальным условием (2) дается формулой

$$w(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{i\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4i\tau}\right]f(\xi)\,d\xi,\quad \tau=\frac{\hbar t}{2m},\quad \sqrt{ia}=\begin{cases}e^{\pi i/4}\sqrt{|a|} & \text{при } a>0,\\ e^{-\pi i/4}\sqrt{|a|} & \text{при } a<0.\end{cases}$$

⊙ *Литература*: У. Миллер (1981, стр. 119–120).

1.9.2-3. Линейный потенциал (движение в однородном внешнем поле), $U(x)=ax$.

Решение задачи Коши с начальным условием (2) дается формулой

$$w(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{i\pi\tau}}\exp\left(-ib\tau x-\tfrac{1}{3}ib^2\tau^3\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(x+b\tau^2-\xi)^2}{4i\tau}\right]f(\xi)\,d\xi,\quad \tau=\frac{\hbar t}{2m},\quad b=\frac{2am}{\hbar^2}.$$

См. также Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц (1974, стр. 98–99).

1.9.2-4. Линейный гармонический осциллятор, $U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$.

Собственные значения:

$$E_n = \hbar\omega(n + \tfrac{1}{2}), \qquad n = 0,\, 1,\, \ldots$$

Нормированные собственные функции:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{2^n n!\, x_0}} \exp(-\tfrac{1}{2}\xi^2) H_n(\xi), \qquad \xi = \frac{x}{x_0}, \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}},$$

где $H_n(\xi)$ — полиномы Эрмита.

Функции $\psi_n(x)$ образуют ортонормированный базис в $L_2(\mathcal{R})$.

⊙ *Литература*: С. Г. Крейн (1964, стр. 293), А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972, стр. 712–713), Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц (1974, стр. 90–94).

1.9.2-5. Изотропная свободная частица, $U(x) = a/x^2$.

Здесь переменная $x \geqslant 0$ играет роль радиальной координаты, $a > 0$. Это уравнение получается из уравнения Шредингера для свободной частицы с n пространственными переменными путем перехода к сферическим (цилиндрическим) координатам и последующим отделением угловых переменных.

Решение уравнения Шредингера, удовлетворяющее начальному условию (2), имеет вид

$$w(x,t) = \frac{\exp\bigl[-\frac{1}{2}i\pi(\mu+1)\operatorname{sign} t\bigr]}{2|\tau|} \int_0^\infty \sqrt{xy}\, \exp\Bigl(i\frac{x^2+y^2}{4\tau}\Bigr) J_\mu\Bigl(\frac{xy}{2|\tau|}\Bigr) f(y)\,dy,$$

$$\tau = \frac{\hbar t}{2m}, \quad \mu = \sqrt{\frac{2am}{\hbar^2} + \frac{1}{4}} \geqslant 1.$$

⊙ *Литература*: У. Миллер (1981, стр. 146–154).

1.9.2-6. Изотропный гармонический осциллятор, $U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + ax^{-2}$.

Здесь переменная $x \geqslant 0$ играет роль радиальной координаты, $a > 0$. Это уравнение получается из уравнения Шредингера для гармонического осциллятора с n пространственными переменными путем перехода к сферическим (цилиндрическим) координатам и последующим отделением угловых переменных.

Собственные значения:

$$E_n = -\hbar\omega(2n + \mu + 1), \quad \mu = \sqrt{\frac{2am}{\hbar^2} + \frac{1}{4}} \geqslant 1, \qquad n = 0,\, 1,\, \ldots$$

Нормированные собственные функции:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2n!}{\Gamma(n+1+\mu)x_0}}\, \xi^{\frac{2\mu+1}{2}} \exp(-\tfrac{1}{2}\xi^2) L_n^\mu(\xi^2), \qquad \xi = \frac{x}{x_0}, \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}},$$

где $L_n^\mu(z)$ — обобщенные полиномы Лаггера. Нормировка величины $|\psi_n(x)|^2$ проводилась на полуоси $x \geqslant 0$.

Функции $\psi_n(x)$ образуют ортонормированный базис в $L_2(\mathcal{R}_+)$.

⊙ *Литература*: У. Миллер (1981, стр. 151).

1.9.2-7. Потенциал Морзе, $U(x) = U_0\bigl(e^{-2x/a} - 2e^{-x/a}\bigr)$.

Собственные значения:

$$E_n = -U_0\Bigl[1 - \frac{1}{\beta}(n + \tfrac{1}{2})\Bigr]^2, \quad \beta = \frac{a\sqrt{2mU_0}}{\hbar}, \qquad 0 \leqslant n < \beta - 2.$$

Собственные функции:

$$\psi_n(x) = \xi^s e^{-\xi/2} \Phi(-n,\, 2s+1;\, \xi), \qquad \xi = 2\beta e^{-x/a}, \quad s = \frac{a\sqrt{-2mE_n}}{\hbar},$$

где $\Phi(a, b; \xi)$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

В данном случае число собственных значений (уровней энергии) E_n и собственных функций ψ_n конечно: $n = 0,\, 1,\, \ldots,\, n_{\max}$.

⊙ *Литература*: С. Г. Крейн (1964, стр. 294), Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц (1974, стр. 96–95).

1.9.2-8. Потенциал содержит гиперболическую функцию, $U(x) = -U_0 \operatorname{ch}^{-2}(x/a)$.

Собственные значения:

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{2ma^2}(s-n)^2, \quad s = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8mU_0a^2}{\hbar^2}}\right), \qquad 0 \leqslant n < s.$$

Собственные функции:

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \left(\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}\right)^{-2s} F\left(\dfrac{\beta - s}{2}, -\dfrac{\beta + s}{2}, \dfrac{1}{2}; -\operatorname{sh}^2\dfrac{x}{a}\right), & \text{если } n \text{ — четное;} \\ \operatorname{sh}\dfrac{x}{a}\left(\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}\right)^{-2s} F\left(\dfrac{1 + \beta - s}{2}, \dfrac{1 - \beta - s}{2}, \dfrac{3}{2}; -\operatorname{sh}^2\dfrac{x}{a}\right), & \text{если } n \text{ — нечетное;} \end{cases}$$

где $F(a, b, c; \xi)$ — гипергеометрическая функция, $\beta = \frac{a}{\hbar}\sqrt{-2mE_n}$.

В данном случае число собственных значений (уровней энергии) E_n и собственных функций ψ_n конечно: $n = 0, 1, \ldots, n_{\max}$.

⊙ *Литература*: С. Г. Крейн (1964, стр. 294–295), Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц (1974, стр. 97–98).

1.9.2-9. Потенциал содержит тригонометрическую функцию, $U(x) = U_0 \operatorname{ctg}^2(\pi x/a)$.

Собственные значения:

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}(n^2 + 2ns - s), \quad s = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8mU_0a^2}{\pi^2\hbar^2}}\right), \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Собственные функции:

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{a}\left(\sin\dfrac{\pi x}{a}\right)^{-2s} F\left(\dfrac{1 - n - s}{2}, \dfrac{n + 1}{2}, \dfrac{3}{2}; \cos^2\dfrac{\pi x}{a}\right), & \text{если } n \text{ — четное;} \\ \left(\sin\dfrac{\pi x}{a}\right)^{-2s} F\left(-\dfrac{n + s}{2}, \dfrac{n}{2}, \dfrac{1}{2}; \cos^2\dfrac{\pi x}{a}\right), & \text{если } n \text{ — нечетное;} \end{cases}$$

где $F(a, b, c; \xi)$ — гипергеометрическая функция.

В частности, при $a = \pi\hbar/\sqrt{2m}$, $U_0 = 2$, $n = k - 1$ имеем

$$E_k = k^2 - 2, \quad \psi_k(x) = k\cos\frac{k\pi x}{a} - \sin\frac{k\pi x}{a}\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{a}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

⊙ *Литература*: С. Г. Крейн (1964, стр. 294).

2. Уравнения параболического типа с двумя пространственными переменными

2.1. Уравнение теплопроводности $\frac{\partial w}{\partial t} = a\Delta_2 w$

2.1.1. Задачи в декартовой системе координат

В прямоугольной декартовой системе координат уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right).$$

Оно описывает развитие двумерных нестационарных процессов теплопереноса в неподвижных средах или твердых телах с постоянным коэффициентом температуропроводности. Аналогичное уравнение используется для анализа соответствующих двумерных нестационарных массообменных процессов при постоянном коэффициенте диффузии.

2.1.1-1. Частные решения:

$$\begin{aligned}
w(x,y,t) &= A\exp\bigl[k_1x + k_2y + (k_1^2 + k_2^2)at\bigr],\\
w(x,y,t) &= A\cos(k_1x + C_1)\cos(k_2y + C_2)\exp\bigl[-(k_1^2 + k_2^2)at\bigr],\\
w(x,y,t) &= A\cos(k_1x + C_1)\operatorname{sh}(k_2y + C_2)\exp\bigl[-(k_1^2 - k_2^2)at\bigr],\\
w(x,y,t) &= A\cos(k_1x + C_1)\operatorname{ch}(k_2y + C_2)\exp\bigl[-(k_1^2 - k_2^2)at\bigr],\\
w(x,y,t) &= A\exp(-\mu x - \lambda y)\cos(\mu x - 2a\mu^2 t + C_1)\cos(\lambda y - 2a\lambda^2 t + C_2),\\
w(x,y,t) &= \frac{A}{t - t_0}\exp\left[-\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{4a(t - t_0)}\right],\\
w(x,y,t) &= A\operatorname{erf}\left(\frac{x - x_0}{2\sqrt{at}}\right)\operatorname{erf}\left(\frac{y - y_0}{2\sqrt{at}}\right),
\end{aligned}$$

где A, k_1, k_2, C_1, C_2, x_0, y_0, t_0 — произвольные постоянные.

Фундаментальное решение:

$$\mathscr{E}(x,y,t) = \frac{1}{4\pi at}\exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4at}\right).$$

⊙ *Литература*: В. С. Владимиров (1971, стр. 199).

2.1.1-2. Формулы для построения частных решений. Замечание о функциях Грина.

1°. Помимо обычных решений с разделяющимися переменными $w(x,y,t) = f_1(x)f_2(y)f_3(t)$ данное уравнение имеет также более сложные решения в виде произведения

$$w(x,y,t) = u(x,t)v(y,t),$$

где функции $u = u(x,t)$ и $v = v(y,t)$ являются решениями одномерных уравнений теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = a\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

которые рассматриваются в разд. 1.1.1.

2°. Пусть $w = w(x, y, t)$ — некоторое решение уравнения теплопроводности. Тогда функции

$$w_1 = Aw(\pm\lambda x + C_1,\ \pm\lambda y + C_2,\ \lambda^2 t + C_3),$$
$$w_2 = Aw(x\cos\beta - y\sin\beta + C_1,\ x\sin\beta + y\cos\beta + C_2,\ t + C_3),$$
$$w_3 = A\exp\bigl[\lambda_1 x + \lambda_2 y + a(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)t\bigr]w(x + 2a\lambda_1 t + C_1,\ y + 2a\lambda_2 t + C_2,\ t + C_3),$$
$$w_4 = \frac{A}{\delta + \beta t}\exp\Bigl[-\frac{\beta(x^2 + y^2)}{4a(\delta + \beta t)}\Bigr]w\Bigl(\frac{x}{\delta + \beta t},\ \frac{y}{\delta + \beta t},\ \frac{\gamma + \lambda t}{\delta + \beta t}\Bigr), \qquad \lambda\delta - \beta\gamma = 1,$$

где A, C_1, C_2, C_3, β, δ, λ, λ_1, λ_2 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения. Знаки при λ в формуле для w_1 выбираются произвольно независимо друг от друга.

⊙ *Литература*: У. Миллер (1981, стр. 189–190).

3°. Для всех двумерных краевых задач, которые рассматриваются в разд. 2.1.1, функцию Грина можно представить в виде произведения

$$G(x, y, \xi, \eta, t) = G_1(x, \xi, t)G_2(y, \eta, t),$$

где $G_1(x, \xi, t)$ и $G_2(y, \eta, t)$ — функции Грина соответствующих одномерных краевых задач (эти функции приводятся в разд. 1.1.1 и 1.1.2).

Пример 1. Функция Грина первой краевой задачи для полубесконечной полосы ($0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant y < \infty$), которая рассматривается в разд. 2.1.1-12, является произведением одномерной функции Грина первой краевой задачи на отрезке ($0 \leqslant x \leqslant l$) из разд. 1.1.2-5 на одномерную функцию Грина первой краевой задачи на полубесконечном интервале ($0 \leqslant y < \infty$) из разд. 1.1.2-2 (где надо x и ξ переобозначить соответственно на y и η).

2.1.1-3. Преобразования, позволяющие разделить переменные.

Возможные преобразования, приводящие двумерное уравнение теплопроводности к уравнению с разделяющимися переменными, перечислены в табл. 18. Все преобразования независимых переменных имеют вид $(x, y, t) \longmapsto (\xi, \eta, t)$. Опущены преобразования, которые можно получить с помощью перестановки независимых переменных $x \rightleftharpoons y$.

ТАБЛИЦА 18.
Преобразования $(x, y, t) \longmapsto (\xi, \eta, t)$, допускающие решения с $\mathcal{R}$-разделенными переменными вида $w = \exp\bigl[\mathcal{R}(\xi, \eta, t)\bigr]f(\xi)g(\eta)h(t)$ для двумерного уравнения теплопроводности $\partial_t w = \partial_{xx} w + \partial_{yy} w$. Во всех случаях $h(t)$ является экспоненциальной функцией.

№	Преобразование	Множитель $\exp\mathcal{R}$	Функция $f(\xi)$	Функция $g(\eta)$
1	$x = \xi$, $y = \eta$	$\mathcal{R} = 0$	Экспоненциальная функция	Экспоненциальная функция
2	$x = \xi$, $y = \eta\sqrt{\lvert t\rvert}$	$\mathcal{R} = 0$	Экспоненциальная функция	Функция Эрмита
3	$x = \xi\sqrt{\lvert t\rvert}$, $y = \eta\sqrt{\lvert t\rvert}$	$\mathcal{R} = 0$	Функция Эрмита	Функция Эрмита
4	$x = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2)$, $y = \xi\eta$	$\mathcal{R} = 0$	Функция параболического цилиндра	Функция параболического цилиндра
5	$x = \xi\cos\eta$, $y = \xi\sin\eta$	$\mathcal{R} = 0$	Функция Бесселя	Экспоненциальная функция
6	$x = \operatorname{ch}\xi\cos\eta$, $y = \operatorname{sh}\xi\sin\eta$	$\mathcal{R} = 0$	Модифицированная функция Матье	Функция Матье
7	$x = \sqrt{\lvert t\rvert}\,\xi\cos\eta$, $y = \sqrt{\lvert t\rvert}\,\xi\sin\eta$	$\mathcal{R} = 0$	Функция Лаггера	Экспоненциальная функция
8	$x = \sqrt{\lvert t\rvert}\,\operatorname{ch}\xi\cos\eta$, $y = \sqrt{\lvert t\rvert}\,\operatorname{sh}\xi\sin\eta$	$\mathcal{R} = 0$	Многочлен Айнса	Многочлен Айнса

ТАБЛИЦА 18 (*продолжение*)

№	Преобразование	Множитель $\exp\mathcal{R}$	Функция $f(\xi)$	Функция $g(\eta)$
9	$x=\xi$, $y=\eta+at^2$	$\mathcal{R}=-a\eta t$	Экспоненциальная функция	Функция Эйри
10	$x=\xi$, $y=\eta t+b/t$	$\mathcal{R}=-\frac{1}{4}\eta^2 t+\frac{1}{2}b\eta/t$	Экспоненциальная функция	Функция Эйри
11	$x=\xi$, $y=\eta\sqrt{1+t^2}$	$\mathcal{R}=-\frac{1}{4}\eta^2 t$	Экспоненциальная функция	Функция параболического цилиндра
12	$x=\xi$, $y=\eta\sqrt{\lvert 1-t^2\rvert}$	$\mathcal{R}=-\frac{1}{4}\varepsilon\eta^2 t$, $\varepsilon=\operatorname{sign}(1-t^2)$	Экспоненциальная функция	Функция Эрмита
13	$x=\xi t$, $y=\eta t$	$\mathcal{R}=-\frac{1}{4}(\xi^2+\eta^2)t$	Экспоненциальная функция	Экспоненциальная функция
14	$x=\xi+at^2$, $y=\eta+bt^2$	$\mathcal{R}=-(a\xi+b\eta)t$	Функция Эйри	Функция Эйри
15	$x=\xi t+a/t$, $y=\eta t+b/t$	$\mathcal{R}=-\frac{1}{4}(\xi^2+\eta^2)t$ $+\frac{1}{2}(a\xi+b\eta)/t$	Функция Эйри	Функция Эйри
16	$x=\frac{1}{2}(\xi^2-\eta^2)t$, $y=\xi\eta t$	$\mathcal{R}=-\frac{1}{16}(\xi^2+\eta^2)^2 t$	Функция параболического цилиндра	Функция параболического цилиндра
17	$x=\xi\sqrt{1+t^2}$, $y=\eta\sqrt{1+t^2}$	$\mathcal{R}=-\frac{1}{4}(\xi^2+\eta^2)t$	Функция параболического цилиндра	Функция параболического цилиндра
18	$x=\xi\sqrt{\lvert 1-t^2\rvert}$, $y=\eta\sqrt{\lvert 1-t^2\rvert}$	$\mathcal{R}=-\frac{1}{4}\varepsilon(\xi^2+\eta^2)t$, $\varepsilon=\operatorname{sign}(1-t^2)$	Функция Эрмита	Функция Эрмита
19	$x=\frac{1}{2}(\xi^2-\eta^2)+at^2$, $y=\xi\eta$	$\mathcal{R}=-\frac{1}{2}a(\xi^2-\eta^2)t$	Функция ангармонического осциллятора	Функция ангармонического осциллятора
20	$x=\frac{1}{2}(\xi^2-\eta^2)t+a/t$, $y=\xi\eta t$	$\mathcal{R}=-\frac{1}{16}(\xi^2+\eta^2)^2 t$ $+\frac{1}{4}a(\xi^2-\eta^2)/t$	Функция ангармонического осциллятора	Функция ангармонического осциллятора
21	$x=\xi t\cos\eta$, $y=\xi t\sin\eta$	$\mathcal{R}=-\frac{1}{4}\xi^2 t$	Функция Бесселя	Экспоненциальная функция
22	$x=t\operatorname{ch}\xi\cos\eta$, $y=t\operatorname{sh}\xi\sin\eta$	$\mathcal{R}=-\frac{1}{4}(\operatorname{sh}^2\xi+\cos^2\eta)t$	Модифицированная функция Матье	Функция Матье
23	$x=\sqrt{1+t^2}\,\xi\cos\eta$, $y=\sqrt{1+t^2}\,\xi\sin\eta$	$\mathcal{R}=-\frac{1}{4}\xi^2 t$	Функция Уиттекера	Экспоненциальная функция
24	$x=\sqrt{\lvert 1-t^2\rvert}\,\xi\cos\eta$, $y=\sqrt{\lvert 1-t^2\rvert}\,\xi\sin\eta$	$\mathcal{R}=-\frac{1}{4}\varepsilon\xi^2 t$, $\varepsilon=\operatorname{sign}(1-t^2)$	Функция Лаггера	Экспоненциальная функция
25	$x=\sqrt{1+t^2}\operatorname{ch}\xi\cos\eta$, $y=\sqrt{1+t^2}\operatorname{sh}\xi\sin\eta$	$\mathcal{R}=-\frac{1}{4}(\operatorname{sh}^2\xi+\cos^2\eta)t$	Многочлен Айнса	Многочлен Айнса
26	$x=\sqrt{\lvert 1-t^2\rvert}\operatorname{ch}\xi\cos\eta$, $y=\sqrt{\lvert 1-t^2\rvert}\operatorname{sh}\xi\sin\eta$	$\mathcal{R}=-\frac{1}{4}\varepsilon(\operatorname{sh}^2\xi+\cos^2\eta)t$, $\varepsilon=\operatorname{sign}(1-t^2)$	Многочлен Айнса	Многочлен Айнса

Функции ангармонического осциллятора являются решениями обыкновенного дифференциального уравнения вида $F''_{zz}+(az^4+bz^2+c)F=0$. Многочлены Айнса являются периодическими (с периодом 2π) решениями полиномиального типа уравнения Уиттекера — Хилла $F''_{zz}+k\sin 2z\,F'_z+(a-bk\cos 2z)F=0$ [см. F. Arscott (1964, 1967)].

⊙ *Литература*: У. Миллер (1981, стр. 188–203).

2.1.1-4. Область: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$. Задача Коши.

Задано начальное условие:

$$w = f(x,y) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Решение:

$$w(x,y,t) = \frac{1}{4\pi a t}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4at}\right] d\xi\, d\eta.$$

Пример 2. Начальная температура в области $|x| < x_0$, $|y| < y_0$ постоянна и равна w_1, а в области $|x| > x_0$, $|y| > y_0$ — соответственно w_2, т. е.

$$f(x,y) = \begin{cases} w_1 & \text{при } |x| < x_0,\ |y| < y_0, \\ w_2 & \text{при } |x| > x_0,\ |y| > y_0. \end{cases}$$

Решение:

$$w = \frac{1}{4}(w_1 - w_2)\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x_0 - x}{2\sqrt{at}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{x_0 + x}{2\sqrt{at}}\right)\right]\left[\operatorname{erf}\left(\frac{y_0 - y}{2\sqrt{at}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{y_0 + y}{2\sqrt{at}}\right)\right] + w_2.$$

Если начальное распределение $f(x,y)$ является бесконечно дифференцируемой по обоим аргументам функцией, то решение можно представить в виде ряда:

$$w(x,y,t) = f(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(at)^n}{n!}\boldsymbol{L}^n\big[f(x,y)\big], \quad \boldsymbol{L} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Такое представление полезно использовать при малых значениях t.

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 62), А. Г. Бутковский (1979, стр. 134).

2.1.1-5. Область: $0 \leqslant x < \infty$, $-\infty < y < \infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается полуплоскость. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x,y) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}, \\ w &= g(y,t) && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(x,y,t) = {} & \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\eta\,d\xi\, + \\ & + a\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} g(\eta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\right]_{\xi=0} d\eta\,d\tau, \end{aligned}$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta,t) = \frac{1}{4\pi a t}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4at}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2}{4at}\right]\right\}.$$

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 271).

2.1.1-6. Область: $0 \leqslant x < \infty$, $-\infty < y < \infty$. Вторая краевая задача.

Рассматривается полуплоскость. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x,y) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}, \\ \partial_x w &= g(y,t) && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,y,t) = \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\eta\,d\xi - a\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} g(\eta,\tau)G(x,y,0,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau,$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta,t) = \frac{1}{4\pi a t}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4at}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2}{4at}\right]\right\}.$$

2.1.1-7. Область: $0 \leqslant x < \infty$, $-\infty < y < \infty$. Третья краевая задача.

Рассматривается полуплоскость. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f(x,y) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_x w - kw &= g(y,t) && \text{при} \quad x=0 && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение $w(x,y,t)$ определяется по формуле из разд. 2.1.1-6, где

$$
G(x,y,\xi,\eta,t) = \frac{1}{4\pi at}\exp\Big[-\frac{(y-\eta)^2}{4at}\Big]\Big\{\exp\Big[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\Big] + \exp\Big[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\Big] - 2k\int_0^\infty \exp\Big[-\frac{(x+\xi+s)^2}{4at} - ks\Big]\,ds\Big\}.
$$

2.1.1-8. Область: $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается четверть плоскости. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f(x,y) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(y,t) && \text{при} \quad x=0 && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(x,t) && \text{при} \quad y=0 && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(x,y,t) &= \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty f(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta\,+\\
&+ a\int_0^t\!\!\int_0^\infty g_1(\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\xi=0}\,d\eta\,d\tau\,+\\
&+ a\int_0^t\!\!\int_0^\infty g_2(\xi,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\eta=0}\,d\xi\,d\tau,
\end{aligned}
$$

где

$$
G(x,y,\xi,\eta,t) = \frac{1}{4\pi at}\Big\{\exp\Big[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\Big] - \exp\Big[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\Big]\Big\}\Big\{\exp\Big[-\frac{(y-\eta)^2}{4at}\Big] - \exp\Big[-\frac{(y+\eta)^2}{4at}\Big]\Big\}.
$$

Пример 3. Начальная температура одинакова, $f(x,y) = w_0$. На границах поддерживается нулевая температура, $g_1(y,t) = g_2(x,t) = 0$.

Решение:

$$
w = w_0 \operatorname{erf}\Big(\frac{x}{2\sqrt{at}}\Big)\operatorname{erf}\Big(\frac{y}{2\sqrt{at}}\Big).
$$

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 172, 350, 355), А. Г. Бутковский (1979, стр. 134).

2.1.1-9. Область: $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$. Вторая краевая задача.

Рассматривается четверть плоскости. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f(x,y) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_x w &= g_1(y,t) && \text{при} \quad x=0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_2(x,t) && \text{при} \quad y=0 && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(x,y,t) &= \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty f(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta\,-\\
&- a\int_0^t\!\!\int_0^\infty g_1(\eta,\tau)G(x,y,0,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau\,-\\
&- a\int_0^t\!\!\int_0^\infty g_2(\xi,\tau)G(x,y,\xi,0,t-\tau)\,d\xi\,d\tau,
\end{aligned}
$$

где

$$
G(x,y,\xi,\eta,t) = \frac{1}{4\pi at}\Big\{\exp\Big[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\Big] + \exp\Big[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\Big]\Big\}\Big\{\exp\Big[-\frac{(y-\eta)^2}{4at}\Big] + \exp\Big[-\frac{(y+\eta)^2}{4at}\Big]\Big\}.
$$

2.1.1-10. Область: $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$. Третья краевая задача.

Рассматривается четверть плоскости. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x,y) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_x w - k_1 w &= g_1(y,t) && \text{при} \quad x=0 && \text{(граничное условие)},\\ \partial_y w - k_2 w &= g_2(x,t) && \text{при} \quad y=0 && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(x,y,t)$ определяется по формуле из разд. 2.1.1-9, где

$$\begin{aligned} G(x,y,\xi,\eta,t) = \frac{1}{4\pi at}\biggl\{&\exp\biggl[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\biggr] + \exp\biggl[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\biggr] - \\ &- 2k_1\sqrt{\pi at}\,\exp\bigl[ak_1^2 t + k_1(x+\xi)\bigr]\operatorname{erfc}\biggl(\frac{x+\xi}{2\sqrt{at}} + k_1\sqrt{at}\biggr)\biggr\}\times \\ &\times\biggl\{\exp\biggl[-\frac{(y-\eta)^2}{4at}\biggr] + \exp\biggl[-\frac{(y+\eta)^2}{4at}\biggr] - \\ &- 2k_2\sqrt{\pi at}\,\exp\bigl[ak_2^2 t + k_2(y+\eta)\bigr]\operatorname{erfc}\biggl(\frac{y+\eta}{2\sqrt{at}} + k_2\sqrt{at}\biggr)\biggr\}. \end{aligned}$$

Пример 4. Начальная температура одинакова, $f(x,y) = w_0$. Температура контактирующих сред равна нулю, $g_1(y,t) = g_2(x,t) = 0$.

Решение:

$$\begin{aligned} w = w_0&\biggl[\operatorname{erf}\biggl(\frac{x}{2\sqrt{at}}\biggr) + \exp(k_1 x + ak_1^2 t)\operatorname{erfc}\biggl(\frac{x}{2\sqrt{at}} + k_1\sqrt{at}\biggr)\biggr]\times \\ \times&\biggl[\operatorname{erf}\biggl(\frac{y}{2\sqrt{at}}\biggr) + \exp(k_2 y + ak_2^2 t)\operatorname{erfc}\biggl(\frac{y}{2\sqrt{at}} + k_2\sqrt{at}\biggr)\biggr]. \end{aligned}$$

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 173, 353).

2.1.1-11. Область: $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$. Смешанные краевые задачи.

1°. Рассматривается четверть плоскости. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x,y) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(y,t) && \text{при} \quad x=0 && \text{(граничное условие)},\\ \partial_y w &= g_2(x,t) && \text{при} \quad y=0 && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(x,y,t) &= \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty f(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta + \\ &+ a\int_0^t\!\!\int_0^\infty g_1(\eta,\tau)\biggl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\biggr]_{\xi=0} d\eta\,d\tau - \\ &- a\int_0^t\!\!\int_0^\infty g_2(\xi,\tau)G(x,y,\xi,0,t-\tau)\,d\xi\,d\tau, \end{aligned}$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta,t) = \frac{1}{4\pi at}\biggl\{\exp\biggl[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\biggr] - \exp\biggl[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\biggr]\biggr\}\biggl\{\exp\biggl[-\frac{(y-\eta)^2}{4at}\biggr] + \exp\biggl[-\frac{(y+\eta)^2}{4at}\biggr]\biggr\}.$$

2°. Рассматривается четверть плоскости. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x,y) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_x w - kw &= g_1(y,t) && \text{при} \quad x=0 && \text{(граничное условие)},\\ w &= g_2(x,t) && \text{при} \quad y=0 && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(x,y,t) &= \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty f(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta - \\ &- a\int_0^t\!\!\int_0^\infty g_1(\eta,\tau)G(x,y,0,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau + \\ &+ a\int_0^t\!\!\int_0^\infty g_2(\xi,\tau)\biggl[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\biggr]_{\eta=0} d\xi\,d\tau, \end{aligned}$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta,t)=\frac{1}{4\pi at}\left\{\exp\left[\frac{(y-\eta)^2}{4at}\right]-\exp\left[-\frac{(y+\eta)^2}{4at}\right]\right\}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right]+\exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right]-\right.$$
$$\left.-2k\sqrt{\pi at}\,\exp\left[ak^2t+k(x+\xi)\right]\operatorname{erfc}\left(\frac{x+\xi}{2\sqrt{at}}+k\sqrt{at}\right)\right\}.$$

Пример 5. Начальная температура одинакова, $f(x,y)=w_0$. На одной границе происходит теплообмен со средой нулевой температуры, а на другой поддерживается нулевая температура, $g_1(y,t)= = g_2(x,t)=0$.

Решение:

$$w=w_0\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)+\exp(kx+ak^2t)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}+k\sqrt{at}\right)\right]\operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{at}}\right).$$

2.1.1-12. Область: $0\leqslant x\leqslant l$, $0\leqslant y<\infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается полубесконечная полоса. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w&=f(x,y) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
w&=g_1(y,t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\
w&=g_2(y,t) &&\text{при}\quad x=l &&\text{(граничное условие)},\\
w&=g_3(x,t) &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(x,y,t)&=\int_0^\infty\int_0^l f(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta+\\
&+a\int_0^t\int_0^\infty g_1(\eta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\right]_{\xi=0}d\eta\,d\tau-\\
&-a\int_0^t\int_0^\infty g_2(\eta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\right]_{\xi=l}d\eta\,d\tau+\\
&+a\int_0^t\int_0^l g_3(\xi,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\right]_{\eta=0}d\xi\,d\tau,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
G(x,y,\xi,\eta,t)&=G_1(x,\xi,t)G_2(y,\eta,t),\\
G_1(x,\xi,t)&=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^\infty\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi\xi}{l}\right)\exp\left(-\frac{an^2\pi^2t}{l^2}\right),\\
G_2(y,\eta,t)&=\frac{1}{2\sqrt{\pi at}}\left\{\exp\left[-\frac{(y-\eta)^2}{4at}\right]-\exp\left[-\frac{(y+\eta)^2}{4at}\right]\right\}.
\end{aligned}$$

Пример 6. Начальная температура одинакова, $f(x,y)=w_0$. На всех границах поддерживается нулевая температура.

Решение:

$$w=\frac{4w_0}{\pi}\operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{at}}\right)\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{2n+1}\sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{l}\right]\exp\left[-\frac{\pi^2(2n+1)^2at}{l^2}\right].$$

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 173).

2.1.1-13. Область: $0\leqslant x\leqslant l$, $0\leqslant y<\infty$. Вторая краевая задача.

Рассматривается полубесконечная полоса. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w&=f(x,y) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_x w&=g_1(y,t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_x w&=g_2(y,t) &&\text{при}\quad x=l &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_y w&=g_3(x,t) &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,y,t) = \int_0^\infty \int_0^l f(\xi,\eta) G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta -$$
$$- a\int_0^t \int_0^\infty g_1(\eta,\tau) G(x,y,0,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau +$$
$$+ a\int_0^t \int_0^\infty g_2(\eta,\tau) G(x,y,l,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau -$$
$$- a\int_0^t \int_0^l g_3(\xi,\tau) G(x,y,\xi,0,t-\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta,t) = G_1(x,\xi,t)G_2(y,\eta,t),$$
$$G_1(x,\xi,t) = \frac{1}{l} + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^\infty \cos\Bigl(\frac{n\pi x}{l}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{n\pi\xi}{l}\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\Bigr),$$
$$G_2(y,\eta,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\Bigl\{\exp\Bigl[-\frac{(y-\eta)^2}{4at}\Bigr] + \exp\Bigl[-\frac{(y+\eta)^2}{4at}\Bigr]\Bigr\}.$$

2.1.1-14. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant y < \infty$. Третья краевая задача.

Рассматривается полубесконечная полоса. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x,y) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_x w - k_1 w &= g_1(y,t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_x w + k_2 w &= g_2(y,t) &&\text{при}\quad x=l &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_y w - k_3 w &= g_3(x,t) &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(x,y,t)$ определяется по формуле из разд. 2.1.1-13, где функция Грина $G(x,y,\xi,\eta,t)$ является произведением функции Грина из разд. 1.1.1-11 и функции Грина из разд. 1.1.1-8 (в последней следует заменить x, ξ и k соответственно на y, η и k_3).

2.1.1-15. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant y < \infty$. Смешанные краевые задачи.

1°. Рассматривается полубесконечная полоса. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x,y) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(y,t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\ w &= g_2(y,t) &&\text{при}\quad x=l &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_y w &= g_3(x,t) &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,y,t) = \int_0^\infty \int_0^l f(\xi,\eta) G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta +$$
$$+ a\int_0^t \int_0^\infty g_1(\eta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi} G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=0} d\eta\,d\tau -$$
$$- a\int_0^t \int_0^\infty g_2(\eta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi} G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=l} d\eta\,d\tau -$$
$$- a\int_0^t \int_0^l g_3(\xi,\tau) G(x,y,\xi,0,t-\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta,t) = G_1(x,\xi,t)G_2(y,\eta,t),$$
$$G_1(x,\xi,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^\infty \sin\Bigl(\frac{n\pi x}{l}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{n\pi\xi}{l}\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\Bigr),$$
$$G_2(y,\eta,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\Bigl\{\exp\Bigl[-\frac{(y-\eta)^2}{4at}\Bigr] + \exp\Bigl[-\frac{(y+\eta)^2}{4at}\Bigr]\Bigr\}.$$

2°. Рассматривается полубесконечная полоса. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x,y) &\text{при}\quad t&=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_x w &= g_1(y,t) &\text{при}\quad x&=0 &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_x w &= g_2(y,t) &\text{при}\quad x&=l &&\text{(граничное условие)},\\ w &= g_3(x,t) &\text{при}\quad y&=0 &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(x,y,t) = &\int_0^\infty\int_0^l f(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta -\\ &- a\int_0^t\int_0^\infty g_1(\eta,\tau)G(x,y,0,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau +\\ &+ a\int_0^t\int_0^\infty g_2(\eta,\tau)G(x,y,l,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau +\\ &+ a\int_0^t\int_0^l g_3(\xi,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\Bigr]_{\eta=0}\,d\xi\,d\tau, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} G(x,y,\xi,\eta,t) &= G_1(x,\xi,t)G_2(y,\eta,t),\\ G_1(x,\xi,t) &= \frac{1}{l}+\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\Bigl(\frac{n\pi x}{l}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{n\pi\xi}{l}\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\Bigr),\\ G_2(y,\eta,t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\Bigl\{\exp\Bigl[-\frac{(y-\eta)^2}{4at}\Bigr]-\exp\Bigl[-\frac{(y+\eta)^2}{4at}\Bigr]\Bigr\}. \end{aligned}$$

2.1.1-16. Область: $0\leqslant x\leqslant l_1$, $0\leqslant y\leqslant l_2$. Первая краевая задача.

Рассматривается прямоугольная область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x,y) &\text{при}\quad t&=0 &&\text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(y,t) &\text{при}\quad x&=0 &&\text{(граничное условие)},\\ w &= g_2(y,t) &\text{при}\quad x&=l_1 &&\text{(граничное условие)},\\ w &= g_3(x,t) &\text{при}\quad y&=0 &&\text{(граничное условие)},\\ w &= g_4(x,t) &\text{при}\quad y&=l_2 &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(x,y,t) = &\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} f(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\eta\,d\xi +\\ &+ a\int_0^t\int_0^{l_2} g_1(\eta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=0}\,d\eta\,d\tau -\\ &- a\int_0^t\int_0^{l_2} g_2(\eta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=l_1}\,d\eta\,d\tau +\\ &+ a\int_0^t\int_0^{l_1} g_3(\xi,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\Bigr]_{\eta=0}\,d\xi\,d\tau -\\ &- a\int_0^t\int_0^{l_1} g_4(\xi,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\Bigr]_{\eta=l_2}\,d\xi\,d\tau, \end{aligned}$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta,t) = \frac{4}{l_1 l_2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{l_1}\sin\frac{n\pi\xi}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2}\sin\frac{m\pi\eta}{l_2}\exp\Bigl[-\pi^2\Bigl(\frac{n^2}{l_1^2}+\frac{m^2}{l_2^2}\Bigr)at\Bigr].$$

Пример 7. Начальная температура одинакова, $f(x,y)=w_0$. На всех границах поддерживается нулевая температура.

Решение:

$$w = \frac{16w_0}{\pi^2}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{l_1}\right]\exp\left[-\frac{\pi^2(2n+1)^2at}{l_1^2}\right]\right\}\times$$
$$\times\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2m+1}\sin\left[\frac{(2m+1)\pi y}{l_2}\right]\exp\left[-\frac{\pi^2(2m+1)^2at}{l_2^2}\right]\right\}.$$

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 355).

2.1.1-17. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$. Вторая краевая задача.

Рассматривается прямоугольная область. Заданы следующие условия:

$$\begin{array}{llll} w = f(x,y) & \text{при} & t=0 & \text{(начальное условие)},\\ \partial_x w = g_1(y,t) & \text{при} & x=0 & \text{(граничное условие)},\\ \partial_x w = g_2(y,t) & \text{при} & x=l_1 & \text{(граничное условие)},\\ \partial_y w = g_3(x,t) & \text{при} & y=0 & \text{(граничное условие)},\\ \partial_y w = g_4(x,t) & \text{при} & y=l_2 & \text{(граничное условие)}.\end{array}$$

Решение:

$$w(x,y,t) = \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} f(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\eta\,d\xi -$$
$$- a\int_0^t\int_0^{l_2} g_1(\eta,\tau)G(x,y,0,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau +$$
$$+ a\int_0^t\int_0^{l_2} g_2(\eta,\tau)G(x,y,l_1,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau -$$
$$- a\int_0^t\int_0^{l_1} g_3(\xi,\tau)G(x,y,\xi,0,t-\tau)\,d\xi\,d\tau +$$
$$+ a\int_0^t\int_0^{l_1} g_4(\xi,\tau)G(x,y,\xi,l_2,t-\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta,t) = \frac{1}{l_1 l_2}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{\pi^2n^2at}{l_1^2}\right)\cos\frac{n\pi x}{l_1}\cos\frac{n\pi\xi}{l_1}\right]\times$$
$$\times\left[1+2\sum_{m=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{\pi^2m^2at}{l_2^2}\right)\cos\frac{m\pi y}{l_2}\cos\frac{m\pi\eta}{l_2}\right].$$

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 355).

2.1.1-18. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$. Третья краевая задача.

Рассматривается прямоугольная область. Заданы следующие условия:

$$\begin{array}{llll} w = f(x,y) & \text{при} & t=0 & \text{(начальное условие)},\\ \partial_x w - k_1 w = g_1(y,t) & \text{при} & x=0 & \text{(граничное условие)},\\ \partial_x w + k_2 w = g_2(y,t) & \text{при} & x=l_1 & \text{(граничное условие)},\\ \partial_y w - k_3 w = g_3(x,t) & \text{при} & y=0 & \text{(граничное условие)},\\ \partial_y w + k_4 w = g_4(x,t) & \text{при} & y=l_2 & \text{(граничное условие)}.\end{array}$$

Решение $w(x,y,t)$ определяется по формуле из разд. 2.1.1-17, где

$$G(x,y,\xi,\eta,t) = \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\|\varphi_n\|^2}\exp(-a\mu_n^2t)\right\}\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\psi_m(y)\psi_m(\eta)}{\|\psi_m\|^2}\exp(-a\lambda_m^2t)\right\},$$

$$\varphi_n(x) = \cos(\mu_n x) + \frac{k_1}{\mu_n}\sin(\mu_n x), \quad \|\varphi_n\|^2 = \frac{k_2}{2\mu_n^2}\,\frac{\mu_n^2+k_1^2}{\mu_n^2+k_2^2} + \frac{k_1}{2\mu_n^2} + \frac{l_1}{2}\left(1+\frac{k_1^2}{\mu_n^2}\right),$$

$$\psi_m(y) = \cos(\lambda_m y) + \frac{k_3}{\lambda_m}\sin(\lambda_m y), \quad \|\psi_m\|^2 = \frac{k_4}{2\lambda_m^2}\,\frac{\lambda_m^2+k_3^2}{\lambda_m^2+k_4^2} + \frac{k_3}{2\lambda_m^2} + \frac{l_2}{2}\left(1+\frac{k_3^2}{\lambda_m^2}\right).$$

Здесь μ_n и λ_m — положительные корни трансцендентных уравнений

$$\frac{\operatorname{tg}(\mu l_1)}{\mu} = \frac{k_1 + k_2}{\mu^2 - k_1 k_2}, \qquad \frac{\operatorname{tg}(\lambda l_2)}{\lambda} = \frac{k_3 + k_4}{\lambda^2 - k_3 k_4}.$$

2.1.1-19. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$. Смешанные краевые задачи.

1°. Рассматривается прямоугольная область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f(x, y) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(y, t) && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(y, t) && \text{при} \quad x = l_1 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_3(x, t) && \text{при} \quad y = 0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_4(x, t) && \text{при} \quad y = l_2 && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(x, y, t) = {} & \int_0^{l_1}\!\!\int_0^{l_2} f(\xi, \eta) G(x, y, \xi, \eta, t)\, d\eta\, d\xi \,+ \\
& + a \int_0^t\!\!\int_0^{l_2} g_1(\eta, \tau) \Big[\frac{\partial}{\partial \xi} G(x, y, \xi, \eta, t - \tau)\Big]_{\xi=0} d\eta\, d\tau \,- \\
& - a \int_0^t\!\!\int_0^{l_2} g_2(\eta, \tau) \Big[\frac{\partial}{\partial \xi} G(x, y, \xi, \eta, t - \tau)\Big]_{\xi=l_1} d\eta\, d\tau \,- \\
& - a \int_0^t\!\!\int_0^{l_1} g_3(\xi, \tau) G(x, y, \xi, 0, t - \tau)\, d\xi\, d\tau \,+ \\
& + a \int_0^t\!\!\int_0^{l_1} g_4(\xi, \tau) G(x, y, \xi, l_2, t - \tau)\, d\xi\, d\tau,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
G(x, y, \xi, \eta, t) = {} & \frac{4}{l_1 l_2} \Bigg[\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{l_1} \sin\frac{n\pi \xi}{l_1} \exp\Big(-\frac{\pi^2 n^2 a t}{l_1^2}\Big)\Bigg] \times \\
& \times \Bigg[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos\frac{m\pi y}{l_2} \cos\frac{m\pi \eta}{l_2} \exp\Big(-\frac{\pi^2 m^2 a t}{l_2^2}\Big)\Bigg].
\end{aligned}$$

2°. Рассматривается прямоугольная область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f(x, y) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(y, t) && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_x w &= g_2(y, t) && \text{при} \quad x = l_1 && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_3(x, t) && \text{при} \quad y = 0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_4(x, t) && \text{при} \quad y = l_2 && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(x, y, t) = {} & \int_0^{l_1}\!\!\int_0^{l_2} f(\xi, \eta) G(x, y, \xi, \eta, t)\, d\eta\, d\xi \,+ \\
& + a \int_0^t\!\!\int_0^{l_2} g_1(\eta, \tau) \Big[\frac{\partial}{\partial \xi} G(x, y, \xi, \eta, t - \tau)\Big]_{\xi=0} d\eta\, d\tau \,+ \\
& + a \int_0^t\!\!\int_0^{l_2} g_2(\eta, \tau) G(x, y, l_1, \eta, t - \tau)\, d\eta\, d\tau \,+ \\
& + a \int_0^t\!\!\int_0^{l_1} g_3(\xi, \tau) \Big[\frac{\partial}{\partial \eta} G(x, y, \xi, \eta, t - \tau)\Big]_{\eta=0} d\xi\, d\tau \,+ \\
& + a \int_0^t\!\!\int_0^{l_1} g_4(\xi, \tau) G(x, y, \xi, l_2, t - \tau)\, d\xi\, d\tau,
\end{aligned}$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta,t) = \frac{4}{l_1 l_2}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left[\frac{\pi(2n+1)x}{2l_1}\right]\sin\left[\frac{\pi(2n+1)\xi}{2l_1}\right]\exp\left[-\frac{a\pi^2(2n+1)^2 t}{4l_1^2}\right]\right\}\times$$
$$\times\left\{\sum_{m=0}^{\infty} \sin\left[\frac{\pi(2m+1)y}{2l_2}\right]\sin\left[\frac{\pi(2m+1)\eta}{2l_2}\right]\exp\left[-\frac{a\pi^2(2m+1)^2 t}{4l_2^2}\right]\right\}.$$

2.1.2. Задачи в полярной системе координат

Уравнение теплопроводности с двумя пространственными переменными в полярной системе координат имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right), \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Одномерные задачи с осевой симметрией, имеющие решения $w = w(r,t)$, рассматриваются в разд. 1.2.1.

2.1.2-1. Область: $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Задача Коши.

Задано начальное условие:

$$w = f(r,\varphi) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Решение:

$$w(r,\varphi,t) = \frac{1}{4\pi a t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \xi \exp\left[-\frac{r^2+\xi^2-2r\xi\cos(\varphi-\eta)}{4at}\right] f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

2.1.2-2. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Первая краевая задача.

Рассматривается круг. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r,\varphi) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad &\text{(начальное условие)},\\ w &= g(\varphi,t) \quad \text{при} \quad r = R \quad &\text{(граничное условие)}.\end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,\varphi,t) = \int_0^{2\pi}\int_0^R f(\xi,\eta) G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta -$$
$$- aR\int_0^t\int_0^{2\pi} g(\eta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\right]_{\xi=R} d\eta\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{1}{\pi R^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_n}{[J_n'(\mu_{nm}R)]^2} J_n(\mu_{nm}r) J_n(\mu_{nm}\xi)\cos[n(\varphi-\eta)]\exp(-\mu_{nm}^2 at),$$
$$A_0 = 1, \quad A_n = 2 \quad (n = 1,\,2,\,\ldots),$$

где $J_n(\xi)$ — функции Бесселя (штрих означает производную по аргументу), μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_n(\mu R) = 0$.

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 207).

2.1.2-3. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Вторая краевая задача.

Рассматривается круг. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r,\varphi) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad &\text{(начальное условие)},\\ \partial_r w &= g(\varphi,t) \quad \text{при} \quad r = R \quad &\text{(граничное условие)}.\end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,\varphi,t) = \int_0^{2\pi}\int_0^R f(\xi,\eta) G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta + aR\int_0^t\int_0^{2\pi} g(\eta,\tau) G(r,\varphi,R,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{1}{\pi R^2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_n \mu_{nm}^2 J_n(\mu_{nm} r) J_n(\mu_{nm}\xi)}{(\mu_{nm}^2 R^2 - n^2)[J_n(\mu_{nm} R)]^2} \cos\bigl[n(\varphi-\eta)\bigr] \exp(-\mu_{nm}^2 at),$$
$$A_0 = 1, \quad A_n = 2 \quad (n = 1,\, 2,\, \ldots),$$

где $J_n(\xi)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_n'(\mu R) = 0$.

2.1.2-4. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Третья краевая задача.

Рассматривается круг. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r,\varphi) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_r w + kw &= g(\varphi,t) &&\text{при}\quad r = R &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(r,\varphi,t)$ определяется по формуле из разд. 2.1.2-3, где

$$G(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_n \mu_{nm}^2 J_n(\mu_{nm} r) J_n(\mu_{nm}\xi)}{(\mu_{nm}^2 R^2 + k^2R^2 - n^2)[J_n(\mu_{nm} R)]^2} \cos\bigl[n(\varphi-\eta)\bigr] \exp(-\mu_{nm}^2 at),$$
$$A_0 = 1, \quad A_n = 2 \quad (n = 1,\, 2,\, \ldots).$$

Здесь $J_n(\xi)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\mu J_n'(\mu R) + kJ_n(\mu R) = 0.$$

⦿ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 208).

2.1.2-5. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Первая краевая задача.

Рассматривается кольцевая область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r,\varphi) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(\varphi,t) &&\text{при}\quad r = R_1 &&\text{(граничное условие)},\\ w &= g_2(\varphi,t) &&\text{при}\quad r = R_2 &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,\varphi,t) = &\int_0^{2\pi}\!\!\int_{R_1}^{R_2} f(\xi,\eta) G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\, d\xi\, d\eta\, + \\ &+ aR_1 \int_0^t\!\!\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi} G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=R_1} d\eta\, d\tau\, - \\ &- aR_2 \int_0^t\!\!\int_0^{2\pi} g_2(\eta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi} G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=R_2} d\eta\, d\tau. \end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_n B_{nm} Z_n(\mu_{nm} r) Z_n(\mu_{nm}\xi) \cos\bigl[n(\varphi-\eta)\bigr] \exp(-\mu_{nm}^2 at),$$
$$A_n = \begin{cases} 1/2 & \text{при}\ \ n = 0,\\ 1 & \text{при}\ \ n \neq 0, \end{cases} \qquad B_{nm} = \frac{\mu_{nm}^2 J_n^2(\mu_{nm} R_2)}{J_n^2(\mu_{nm} R_1) - J_n^2(\mu_{nm} R_2)},$$
$$Z_n(\mu_{nm} r) = J_n(\mu_{nm} R_1) Y_n(\mu_{nm} r) - Y_n(\mu_{nm} R_1) J_n(\mu_{nm} r),$$

где $J_n(r)$ и $Y_n(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_n(\mu R_1) Y_n(\mu R_2) - Y_n(\mu R_1) J_n(\mu R_2) = 0.$$

⦿ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 95, 474–475).

2.1.2-6. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Вторая краевая задача.

Рассматривается кольцевая область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r,\varphi) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_r w &= g_1(\varphi,t) && \text{при} \quad r = R_1 && \text{(граничное условие)},\\ \partial_r w &= g_2(\varphi,t) && \text{при} \quad r = R_2 && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,\varphi,t) = \int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} f(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\, -\\ - aR_1\int_0^t\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\tau)G(r,\varphi,R_1,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau\, +\\ + aR_2\int_0^t\int_0^{2\pi} g_2(\eta,\tau)G(r,\varphi,R_2,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau. \end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{1}{\pi(R_2^2-R_1^2)} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_n\mu_{nm}^2 Z_n(\mu_{nm}r)Z_n(\mu_{nm}\xi)\cos[n(\varphi-\eta)]\exp(-\mu_{nm}^2 at)}{(\mu_{nm}^2R_2^2-n^2)Z_n^2(\mu_{nm}R_2)-(\mu_{nm}^2R_1^2-n^2)Z_n^2(\mu_{nm}R_1)},$$

$$Z_n(\mu_{nm}r) = J_n'(\mu_{nm}R_1)Y_n(\mu_{nm}r) - Y_n'(\mu_{nm}R_1)J_n(\mu_{nm}r),$$

где $A_0 = 1$, $A_n = 2$ при $n = 1,\ 2,\ \ldots$; $J_n(r)$ и $Y_n(r)$ — функции Бесселя; μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_n'(\mu R_1)Y_n'(\mu R_2) - Y_n'(\mu R_1)J_n'(\mu R_2) = 0.$$

2.1.2-7. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Третья краевая задача.

Рассматривается кольцевая область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r,\varphi) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_r w - k_1 w &= g_1(\varphi,t) && \text{при} \quad r = R_1 && \text{(граничное условие)},\\ \partial_r w + k_2 w &= g_2(\varphi,t) && \text{при} \quad r = R_2 && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,\varphi,t) = \int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} f(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\, -\\ - aR_1\int_0^t\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\tau)G(r,\varphi,R_1,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau\, +\\ + aR_2\int_0^t\int_0^{2\pi} g_2(\eta,\tau)G(r,\varphi,R_2,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau. \end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_n\mu_{nm}^2 Z_n(\mu_{nm}r)Z_n(\mu_{nm}\xi)\cos[n(\varphi-\eta)]\exp(-\mu_{nm}^2 at)}{(k_2^2R_2^2+\mu_{nm}^2R_2^2-n^2)Z_n^2(\mu_{nm}R_2)-(k_1^2R_1^2+\mu_{nm}^2R_1^2-n^2)Z_n^2(\mu_{nm}R_1)},$$

$$\begin{aligned} Z_n(\mu_{nm}r) = \bigl[\mu_{nm}J_n'(\mu_{nm}R_1) - k_1J_n(\mu_{nm}R_1)\bigr]Y_n(\mu_{nm}r)\, -\\ - \bigl[\mu_{nm}Y_n'(\mu_{nm}R_1) - k_1Y_n(\mu_{nm}R_1)\bigr]J_n(\mu_{nm}r), \end{aligned}$$

где $A_0 = 1$, $A_n = 2$ при $n = 1,\ 2,\ \ldots$; $J_n(r)$ и $Y_n(r)$ — функции Бесселя; μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\begin{aligned} \bigl[\mu J_n'(\mu R_1) - k_1J_n(\mu R_1)\bigr]\bigl[\mu Y_n'(\mu R_2) + k_2Y_n(\mu R_2)\bigr] =\\ = \bigl[\mu Y_n'(\mu R_1) - k_1Y_n(\mu R_1)\bigr]\bigl[\mu J_n'(\mu R_2) + k_2J_n(\mu R_2)\bigr]. \end{aligned}$$

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 95, 474–476).

2.1.2-8. Область: $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$. Первая краевая задача.

Рассматривается клиновидная область. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f(r,\varphi) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(r,t) && \text{при} \quad \varphi=0 && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(r,t) && \text{при} \quad \varphi=\varphi_0 && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(r,\varphi,t) = {}& \int_0^{\varphi_0}\int_0^\infty f(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta + \\
&+ a\int_0^t\int_0^\infty g_1(\xi,\tau)\frac{1}{\xi}\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\eta=0}d\xi\,d\tau - \\
&- a\int_0^t\int_0^\infty g_2(\xi,\tau)\frac{1}{\xi}\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\eta=\varphi_0}d\xi\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
G(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{1}{a\varphi_0 t}\exp\Big(-\frac{r^2+\xi^2}{4at}\Big)\sum_{n=1}^\infty I_{n\pi/\varphi_0}\Big(\frac{r\xi}{2at}\Big)\sin\Big(\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\Big)\sin\Big(\frac{n\pi\eta}{\varphi_0}\Big),
$$

где $I_\nu(r)$ — модифицированные функции Бесселя.

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 100, 498).

2.1.2-9. Область: $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$. Вторая краевая задача.

Рассматривается клиновидная область. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f(r,\varphi) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
r^{-1}\partial_\varphi w &= g_1(r,t) && \text{при} \quad \varphi=0 && \text{(граничное условие)},\\
r^{-1}\partial_\varphi w &= g_2(r,t) && \text{при} \quad \varphi=\varphi_0 && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(r,\varphi,t) = {}& \int_0^{\varphi_0}\int_0^\infty f(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta - \\
&- a\int_0^t\int_0^\infty g_1(\xi,\tau)G(r,\varphi,\xi,0,t-\tau)\,d\xi\,d\tau + \\
&+ a\int_0^t\int_0^\infty g_2(\xi,\tau)G(r,\varphi,\xi,\varphi_0,t-\tau)\,d\xi\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
G(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{1}{a\varphi_0 t}\exp\Big(-\frac{r^2+\xi^2}{4at}\Big)\Big[\frac{1}{2}I_0\Big(\frac{r\xi}{2at}\Big)+\sum_{n=1}^\infty I_{n\pi/\varphi_0}\Big(\frac{r\xi}{2at}\Big)\cos\Big(\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\Big)\cos\Big(\frac{n\pi\eta}{\varphi_0}\Big)\Big],
$$

где $I_\nu(r)$ — модифицированные функции Бесселя.

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 100, 498).

2.1.2-10. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$. Первая краевая задача.

Рассматривается сектор круга. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f(r,\varphi) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(\varphi,t) && \text{при} \quad r=R && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(r,t) && \text{при} \quad \varphi=0 && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_3(r,t) && \text{при} \quad \varphi=\varphi_0 && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$w(r,\varphi,t) = \int_0^{\varphi_0}\int_0^R f(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta -$$
$$- aR\int_0^t\int_0^{\varphi_0} g_1(\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\xi=R}\,d\eta\,d\tau +$$
$$+ a\int_0^t\int_0^R g_2(\xi,\tau)\frac{1}{\xi}\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\eta=0}\,d\xi\,d\tau -$$
$$- a\int_0^t\int_0^R g_3(\xi,\tau)\frac{1}{\xi}\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\eta=\varphi_0}\,d\xi\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{4}{R^2\varphi_0}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}r)J_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}\xi)}{[J'_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}R)]^2}\sin\Big(\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\Big)\sin\Big(\frac{n\pi\eta}{\varphi_0}\Big)\exp(-\mu_{nm}^2 at),$$

где $J_{n\pi/\varphi_0}(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_{n\pi/\varphi_0}(\mu R) = 0$.

Пример. Начальная температура одинакова, $f(r,\varphi) = w_0$. На границах поддерживается нулевая температура, $g_1(\varphi,t) = g_2(r,t) = g_3(r,t) = 0$.

Решение:

$$w = \frac{8w_0}{\pi R^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin(s_n\varphi)\sum_{m=1}^{\infty}\exp(-\mu_{nm}^2 at)\frac{J_{s_n}(\mu_{nm}r)}{[J'_{s_n}(\mu_{nm}R)]^2}\int_0^R J_{s_n}(\mu_{nm}\xi)\xi\,d\xi,\quad s_n = \frac{(2n+1)\pi}{\varphi_0},$$

где μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_{s_n}(\mu R) = 0$.

⦿ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 209), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 95, 475–476).

2.1.2-11. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$. Вторая краевая задача.

Рассматривается сектор круга. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f(r,\varphi) && \text{при}\quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_r w &= g_1(\varphi,t) && \text{при}\quad r = R && \text{(граничное условие)},\\
r^{-1}\partial_\varphi w &= g_2(r,t) && \text{при}\quad \varphi = 0 && \text{(граничное условие)},\\
r^{-1}\partial_\varphi w &= g_3(r,t) && \text{при}\quad \varphi = \varphi_0 && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,\varphi,t) = \int_0^{\varphi_0}\int_0^R f(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta +$$
$$+ aR\int_0^t\int_0^{\varphi_0} g_1(\eta,\tau)G(r,\varphi,R,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau -$$
$$- a\int_0^t\int_0^R g_2(\xi,\tau)G(r,\varphi,\xi,0,t-\tau)\,d\xi\,d\tau +$$
$$+ a\int_0^t\int_0^R g_3(\xi,\tau)G(r,\varphi,\xi,\varphi_0,t-\tau)\,d\xi\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{2}{R^2\varphi_0} + 4\varphi_0\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu_{nm}^2 J_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}r)J_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}\xi)}{(R^2\varphi_0^2\mu_{nm}^2 - n^2\pi^2)[J_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}R)]^2}\times$$
$$\times\cos\Big(\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\Big)\cos\Big(\frac{n\pi\eta}{\varphi_0}\Big)\exp(-\mu_{nm}^2 at),$$

где $J_{n\pi/\varphi_0}(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J'_{n\pi/\varphi_0}(\mu R) = 0$.

⦿ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 95, 476).

2.1.2-12. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$. Смешанная краевая задача.

Рассматривается сектор круга. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r,\varphi) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_r w - kw &= g(\varphi,t) && \text{при} \quad r=R && \text{(граничное условие)},\\ \partial_\varphi w &= 0 && \text{при} \quad \varphi=0 && \text{(граничное условие)},\\ \partial_\varphi w &= 0 && \text{при} \quad \varphi=\varphi_0 && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,\varphi,t) = \int_0^{\varphi_0}\int_0^R f(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta + {}$$
$$+ aR\int_0^t\int_0^{\varphi_0} g(\eta,\tau)G(r,\varphi,R,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}J_{s_n}(\mu_{nm}r)J_{s_n}(\mu_{nm}\xi)\cos(s_n\varphi)\cos(s_n\eta)\exp(-\mu_{nm}^2 at),$$
$$s_n = \frac{n\pi}{\varphi_0}, \qquad A_{nm} = \frac{4\mu_{nm}^2}{\varphi_0(\mu_{nm}^2R^2 + k^2R^2 - s_n^2)\bigl[J_{s_n}(\mu_{nm}R)\bigr]^2},$$

где $J_{s_n}(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\mu J'_{s_n}(\mu R) + kJ_{s_n}(\mu R) = 0.$$

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 95, 476).

2.1.2-13. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$. Разные краевые задачи.

Некоторые задачи для данной области рассматривались в книге Б. М. Будака, А. А. Самарского, А. Н. Тихонова (1972, стр. 95, 476–477).

2.1.3. Осесимметричные задачи

В осесимметричном случае уравнение теплопроводности в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right), \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Оно описывает развитие двумерных нестационарных тепловых процессов в неподвижных средах или твердых телах (ограниченных координатными поверхностями цилиндрической системы), когда начальные и граничные условия не зависят от угловой координаты. Аналогичное уравнение используется для анализа соответствующих двумерных массообменных процессов.

Одномерные задачи с осевой симметрией, имеющие решения $w = w(r,t)$, рассматриваются в разд. 1.2.1.

2.1.3-1. Частные решения. Замечание о функциях Грина.

1°. Помимо обычных решений с разделяющимися переменными $w(r,z,t) = f_1(r)f_2(z)f_3(t)$ данное уравнение имеет также более сложные решения в виде произведения

$$w(r,z,t) = u(r,t)v(z,t),$$

где функции $u = u(r,t)$ и $v = v(z,t)$ являются решениями более простых одномерных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) \quad \text{(частные решения этого уравнения см. в разд. 1.2.1-1)},$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = a\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad \text{(частные решения этого уравнения см. в разд. 1.1.1-1)}.$$

2°. Для всех двумерных краевых задач, которые рассматриваются в разд. 2.1.3, функцию Грина можно представить в виде произведения

$$G(r,z,\xi,\eta,t) = G_1(r,\xi,t)G_2(z,\eta,t),$$

где $G_1(r,\xi,t)$ и $G_2(z,\eta,t)$ — функции Грина соответствующих одномерных краевых задач.

2.1.3-2. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant z < \infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается полубесконечный круговой цилиндр. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r,z) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(z,t) && \text{при} \quad r = R && \text{(граничное условие)},\\ w &= g_2(r,t) && \text{при} \quad z = 0 && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,z,t) = 2\pi &\int_0^\infty\!\!\int_0^R \xi f(\xi,\eta) G(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta\, -\\ &- 2\pi a R \int_0^t\!\!\int_0^\infty g_1(\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi} G(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\xi=R} d\eta\,d\tau\, +\\ &+ 2\pi a \int_0^t\!\!\int_0^R \xi g_2(\xi,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta} G(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\eta=0} d\xi\,d\tau. \end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,z,\xi,\eta,t) = G_1(r,\xi,t)G_2(z,\eta,t),$$

$$G_1(r,\xi,t) = \frac{1}{\pi R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{J_1^2(\mu_n)} J_0\Big(\frac{\mu_n r}{R}\Big) J_0\Big(\frac{\mu_n \xi}{R}\Big)\exp\Big(-\frac{a\mu_n^2 t}{R^2}\Big),$$

$$G_2(z,\eta,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\Big\{\exp\Big[-\frac{(z-\eta)^2}{4at}\Big] - \exp\Big[-\frac{(z+\eta)^2}{4at}\Big]\Big\},$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Пример 1. Начальная температура одинакова во всех точках цилиндра, $f(r,z) = w_0$. На границах поддерживается нулевая температура, $g_1(r,t) = g_2(z,t) = 0$.

Решение:

$$w(r,z,t) = \frac{2w_0}{R}\operatorname{erf}\Big(\frac{z}{2\sqrt{at}}\Big)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n J_1(\lambda_n R)}\exp(-\lambda_n^2 a t), \qquad \lambda_n = \frac{\mu_n}{R}.$$

Пример 2. Начальная температура цилиндра равна нулю, $f(r,z) = 0$. На боковой поверхности $r = R$ поддерживается постоянная температура w_0, а на торце $z = 0$ — нулевая температура.

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,z,t) = w_0 - \frac{w_0}{R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n J_1(\lambda_n R)}\Big[&2\exp(-\lambda_n^2 a t)\operatorname{erf}\Big(\frac{z}{2\sqrt{at}}\Big) +\\ &+ \exp(\lambda_n z)\operatorname{erfc}\Big(\frac{z}{2\sqrt{at}} + \lambda_n\sqrt{at}\Big) + \exp(-\lambda_n z)\operatorname{erfc}\Big(\frac{z}{2\sqrt{at}} - \lambda_n\sqrt{at}\Big)\Big], \end{aligned}$$

где λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $J_0(\lambda R) = 0$.

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 224, 412), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 99, 496).

2.1.3-3. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant z < \infty$. Вторая краевая задача.

Рассматривается полубесконечный круговой цилиндр. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r,z) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_r w &= g_1(z,t) && \text{при} \quad r = R && \text{(граничное условие)},\\ \partial_z w &= g_2(r,t) && \text{при} \quad z = 0 && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,z,t) = 2\pi &\int_0^\infty\!\!\int_0^R \xi f(\xi,\eta) G(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta\, +\\ &+ 2\pi a R \int_0^t\!\!\int_0^\infty g_1(\eta,\tau) G(r,z,R,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau\, -\\ &- 2\pi a \int_0^t\!\!\int_0^R \xi g_2(\xi,\tau) G(r,z,\xi,0,t-\tau)\,d\xi\,d\tau. \end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,z,\xi,\eta,t) = G_1(r,\xi,t)G_2(z,\eta,t),$$

$$G_1(r,\xi,t) = \frac{1}{\pi R^2} + \frac{1}{\pi R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{J_0^2(\mu_n)}J_0\Big(\frac{\mu_n r}{R}\Big)J_0\Big(\frac{\mu_n\xi}{R}\Big)\exp\Big(-\frac{a\mu_n^2 t}{R^2}\Big),$$

$$G_2(z,\eta,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\Big\{\exp\Big[-\frac{(z-\eta)^2}{4at}\Big] + \exp\Big[-\frac{(z+\eta)^2}{4at}\Big]\Big\},$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $J_1(\mu)=0$.

2.1.3-4. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant z < \infty$. Третья краевая задача.

Рассматривается полубесконечный круговой цилиндр. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_r w + k_1 w &= g_1(z,t) &&\text{при}\quad r=R &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_z w - k_2 w &= g_2(r,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(r,z,t)$ определяется по формуле из разд. 2.1.3-3, где

$$G(r,z,\xi,\eta,t) = G_1(r,\xi,t)G_2(z,\eta,t),$$

$$G_1(r,\xi,t) = \frac{1}{\pi R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2}{(k_1^2R^2+\mu_n^2)J_0^2(\mu_n)}J_0\Big(\frac{\mu_n r}{R}\Big)J_0\Big(\frac{\mu_n\xi}{R}\Big)\exp\Big(-\frac{a\mu_n^2 t}{R^2}\Big),$$

$$G_2(z,\eta,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\Big\{\exp\Big[-\frac{(z-\eta)^2}{4at}\Big] + \exp\Big[-\frac{(z+\eta)^2}{4at}\Big] - 2k_2\int_0^\infty \exp\Big[-\frac{(z+\eta+s)^2}{4at} - k_2 s\Big]\,ds\Big\}.$$

Здесь $J_0(\mu)$ — функция Бесселя, μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\mu J_1(\mu) - k_1 R J_0(\mu) = 0.$$

Пример 3. Начальная температура одинакова во всех точках цилиндра, $f(r,z)=w_0$. На его границах происходит теплообмен со средой, имеющей нулевую температуру, $g_1(z,t)=g_2(r,t)=0$.

Решение:

$$w(r,z,t) = \frac{2w_0k_1}{R}\Big[\operatorname{erf}\Big(\frac{z}{2\sqrt{at}}\Big) + \exp(k_2 z + k_2^2 at)\operatorname{erfc}\Big(\frac{z}{2\sqrt{at}} + k_2\sqrt{at}\Big)\Big]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\nu_n r)\exp(-\nu_n^2 at)}{(k_1^2+\nu_n^2)J_0(\nu_n R)},$$

где ν_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\nu J_1(\nu R) - k_1 J_0(\nu R) = 0$.

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 224).

2.1.3-5. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant z < \infty$. Смешанные краевые задачи.

1°. Рассматривается полубесконечный круговой цилиндр. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(z,t) &&\text{при}\quad r=R &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_z w &= g_2(r,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,z,t) = 2\pi\int_0^\infty\!\!\int_0^R \xi f(\xi,\eta)G(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta\,-\\ -2\pi aR\int_0^t\!\!\int_0^\infty g_1(\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\xi=R}d\eta\,d\tau\,-\\ -2\pi a\int_0^t\!\!\int_0^R \xi g_2(\xi,\tau)G(r,z,\xi,0,t-\tau)\,d\xi\,d\tau. \end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,z,\xi,\eta,t) = G_1(r,\xi,t)G_2(z,\eta,t),$$

$$G_1(r,\xi,t) = \frac{1}{\pi R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{J_1^2(\mu_n)}J_0\Big(\frac{\mu_n r}{R}\Big)J_0\Big(\frac{\mu_n\xi}{R}\Big)\exp\Big(-\frac{a\mu_n^2 t}{R^2}\Big),$$

$$G_2(z,\eta,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\Big\{\exp\Big[-\frac{(z-\eta)^2}{4at}\Big] + \exp\Big[-\frac{(z+\eta)^2}{4at}\Big]\Big\},$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $J_0(\mu)=0$.

2°. Рассматривается полубесконечный круговой цилиндр. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r,z) &&\text{при} \quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_r w &= g_1(z,t) &&\text{при} \quad r=R &&\text{(граничное условие)},\\ w &= g_2(r,t) &&\text{при} \quad z=0 &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,z,t) = 2\pi &\int_0^\infty \int_0^R \xi f(\xi,\eta) G(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta\,+\\ &+ 2\pi a R \int_0^t \int_0^\infty g_1(\eta,\tau) G(r,z,R,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau\,+\\ &+ 2\pi a \int_0^t \int_0^R \xi g_2(\xi,\tau) \Bigl[\frac{\partial}{\partial \eta} G(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\Bigr]_{\eta=0} d\xi\,d\tau. \end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,z,\xi,\eta,t) = G_1(r,\xi,t) G_2(z,\eta,t),$$

$$G_1(r,\xi,t) = \frac{1}{\pi R^2} + \frac{1}{\pi R^2} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{J_0^2(\mu_n)} J_0\Bigl(\frac{\mu_n r}{R}\Bigr) J_0\Bigl(\frac{\mu_n \xi}{R}\Bigr) \exp\Bigl(-\frac{a\mu_n^2 t}{R^2}\Bigr),$$

$$G_2(z,\eta,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \Bigl\{\exp\Bigl[-\frac{(z-\eta)^2}{4at}\Bigr] - \exp\Bigl[-\frac{(z+\eta)^2}{4at}\Bigr]\Bigr\},$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $J_1(\mu) = 0$.

3°. Рассматривается полубесконечный круговой цилиндр. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r,z) &&\text{при} \quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_r w + kw &= g_1(z,t) &&\text{при} \quad r=R &&\text{(граничное условие)},\\ w &= g_2(r,t) &&\text{при} \quad z=0 &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(r,z,t)$ определяется по формуле из разд. 2.1.3-5, п. 2°, где

$$G(r,z,\xi,\eta,t) = G_1(r,\xi,t) G_2(z,\eta,t),$$

$$G_1(r,\xi,t) = \frac{1}{\pi R^2} \sum_{n=1}^\infty \frac{\mu_n^2}{(k^2R^2+\mu_n^2) J_0^2(\mu_n)} J_0\Bigl(\frac{\mu_n r}{R}\Bigr) J_0\Bigl(\frac{\mu_n \xi}{R}\Bigr) \exp\Bigl(-\frac{a\mu_n^2 t}{R^2}\Bigr),$$

$$G_2(z,\eta,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \Bigl\{\exp\Bigl[-\frac{(z-\eta)^2}{4at}\Bigr] - \exp\Bigl[-\frac{(z+\eta)^2}{4at}\Bigr]\Bigr\}.$$

Здесь μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\mu J_1(\mu) - kRJ_0(\mu) = 0.$$

Пример 4. Начальная температура одинакова во всех точках цилиндра, $f(r,z) = w_0$. На его боковой поверхности происходит теплообмен со средой, имеющей нулевую температуру, $g_1(z,t) = 0$. На торце поддерживается нулевая температура, $g_2(r,t) = 0$.

Решение:

$$w(r,z,t) = \frac{2w_0 k}{R} \operatorname{erf}\Bigl(\frac{z}{2\sqrt{at}}\Bigr) \sum_{n=1}^\infty \frac{J_0(\lambda_n r)}{(k^2+\lambda_n^2) J_0(\lambda_n R)} \exp(-\lambda_n^2 at), \qquad \lambda_n = \frac{\mu_n}{R}.$$

Пример 5. Начальная температура цилиндра равна нулю, $f(r,z) = 0$. На его боковой поверхности происходит теплообмен со средой, имеющей нулевую температуру, $g_1(z,t) = 0$. На торце поддерживается постоянная температура, $g_2(r,t) = w_0$.

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,z,t) = \frac{kw_0}{R} \sum_{n=1}^\infty \frac{J_0(\lambda_n r)}{(\lambda_n^2+k^2) J_0(\lambda_n R)} \Bigl[2\exp(-\lambda_n z)\,+\\ + \exp(\lambda_n z) \operatorname{erfc}\Bigl(\lambda_n\sqrt{at} + \frac{z}{2\sqrt{at}}\Bigr) - \exp(-\lambda_n z) \operatorname{erfc}\Bigl(\lambda_n\sqrt{at} - \frac{z}{2\sqrt{at}}\Bigr)\Bigr], \qquad \lambda_n = \frac{\mu_n}{R}. \end{aligned}$$

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 224, 411).

2.1.3-6. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Первая краевая задача.

Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f(r,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(z,t) && \text{при} \quad r=R && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(r,t) && \text{при} \quad z=0 && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_3(r,t) && \text{при} \quad z=l && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(r,z,t) = 2\pi \int_0^l \int_0^R \xi f(\xi,\eta) G(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta\,-\\
- 2\pi a R \int_0^t \int_0^l g_1(\eta,\tau) \Big[\frac{\partial}{\partial\xi} G(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\xi=R} d\eta\,d\tau\,+\\
+ 2\pi a \int_0^t \int_0^R \xi g_2(\xi,\tau) \Big[\frac{\partial}{\partial\eta} G(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\eta=0} d\xi\,d\tau\,-\\
- 2\pi a \int_0^t \int_0^R \xi g_3(\xi,\tau) \Big[\frac{\partial}{\partial\eta} G(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\eta=l} d\xi\,d\tau.
\end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,z,\xi,\eta,t) = G_1(r,\xi,t) G_2(z,\eta,t),$$

$$G_1(r,\xi,t) = \frac{1}{\pi R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_1^2(\mu_n)} J_0\Big(\frac{\mu_n r}{R}\Big) J_0\Big(\frac{\mu_n \xi}{R}\Big) \exp\Big(-\frac{a\mu_n^2 t}{R^2}\Big),$$

$$G_2(z,\eta,t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\Big(\frac{n\pi z}{l}\Big) \sin\Big(\frac{n\pi\eta}{l}\Big) \exp\Big(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\Big),$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Пример 6. Начальная температура одинакова во всех точках цилиндра, $f(r,z) = w_0$. На всех границах поддерживается нулевая температура, $g_1(z,t) = g_2(r,t) = g_3(r,t) = 0$.

Решение:

$$\begin{aligned}
w = \frac{8w_0}{\pi} \bigg\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin\Big[\frac{(2n+1)\pi z}{l}\Big] \exp\Big[-\frac{a(2n+1)^2\pi^2 t}{l^2}\Big] \bigg\} \times\\
\times \bigg\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n J_1(\mu_n)} \exp\Big(-\frac{\mu_n^2 a t}{R^2}\Big) J_0\Big(\frac{\mu_n r}{R}\Big) \bigg\},
\end{aligned}$$

где μ_m — положительные корни трансцендентного уравнения $J_0(\mu) = 0$.

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 222).

2.1.3-7. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Вторая краевая задача.

Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f(r,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_r w &= g_1(z,t) && \text{при} \quad r=R && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_2(r,t) && \text{при} \quad z=0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_3(r,t) && \text{при} \quad z=l && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(r,z,t) = 2\pi \int_0^l \int_0^R \xi f(\xi,\eta) G(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta\,+\\
+ 2\pi a R \int_0^t \int_0^l g_1(\eta,\tau) G(r,z,R,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau\,-\\
- 2\pi a \int_0^t \int_0^R \xi g_2(\xi,\tau) G(r,z,\xi,0,t-\tau)\,d\xi\,d\tau\,+\\
+ 2\pi a \int_0^t \int_0^R \xi g_3(\xi,\tau) G(r,z,\xi,l,t-\tau)\,d\xi\,d\tau.
\end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,z,\xi,\eta,t) = G_1(r,\xi,t)G_2(z,\eta,t),$$

$$G_1(r,\xi,t) = \frac{1}{\pi R^2} + \frac{1}{\pi R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{J_0^2(\mu_n)}J_0\Bigl(\frac{\mu_n r}{R}\Bigr)J_0\Bigl(\frac{\mu_n\xi}{R}\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{a\mu_n^2 t}{R^2}\Bigr),$$

$$G_2(z,\eta,t) = \frac{1}{l} + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\Bigl(\frac{n\pi z}{l}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{n\pi\eta}{l}\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\Bigr),$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $J_1(\mu) = 0$.

2.1.3-8. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Третья краевая задача.

Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_r w - k_1 w &= g_1(z,t) && \text{при} \quad r=R && \text{(граничное условие)},\\ \partial_z w - k_2 w &= g_2(r,t) && \text{при} \quad z=0 && \text{(граничное условие)},\\ \partial_z w + k_3 w &= g_3(r,t) && \text{при} \quad z=l && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(r,z,t)$ определяется по формуле из разд. 2.1.3-7, где

$$G(r,z,\xi,\eta,t) = G_1(r,\xi,t)G_2(z,\eta,t),$$

$$G_1(r,\xi,t) = \frac{1}{\pi R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2}{(k_1^2R^2+\mu_n^2)J_0^2(\mu_n)}J_0\Bigl(\frac{\mu_n r}{R}\Bigr)J_0\Bigl(\frac{\mu_n\xi}{R}\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{a\mu_n^2 t}{R^2}\Bigr),$$

$$G_2(z,\eta,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\varphi_m(z)\varphi_m(\eta)}{\|\varphi_m\|^2}\exp(-a\lambda_m^2 t), \qquad \varphi_m(z) = \cos(\lambda_m z) + \frac{k_2}{\lambda_m}\sin(\lambda_m z),$$

$$\|\varphi_m\|^2 = \frac{k_3}{2\lambda_m^2}\,\frac{\lambda_m^2+k_2^2}{\lambda_m^2+k_3^2} + \frac{k_2}{2\lambda_m^2} + \frac{l}{2}\Bigl(1+\frac{k_2^2}{\lambda_m^2}\Bigr).$$

Здесь μ_n и λ_m — положительные корни трансцендентных уравнений

$$\mu J_1(\mu) - k_1 R J_0(\mu) = 0, \qquad \frac{\operatorname{tg}(\lambda l)}{\lambda} = \frac{k_2+k_3}{\lambda^2 - k_2k_3}.$$

2.1.3-9. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Смешанные краевые задачи.

1°. Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(z,t) && \text{при} \quad r=R && \text{(граничное условие)},\\ \partial_z w &= g_2(r,t) && \text{при} \quad z=0 && \text{(граничное условие)},\\ \partial_z w &= g_3(r,t) && \text{при} \quad z=l && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,z,t) = 2\pi &\int_0^l\int_0^R \xi f(\xi,\eta)G(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta\,-\\ &- 2\pi aR\int_0^t\int_0^l g_1(\eta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=R}d\eta\,d\tau\,-\\ &- 2\pi a\int_0^t\int_0^R \xi g_2(\xi,\tau)G(r,z,\xi,0,t-\tau)\,d\xi\,d\tau\,+\\ &+ 2\pi a\int_0^t\int_0^R \xi g_3(\xi,\tau)G(r,z,\xi,l,t-\tau)\,d\xi\,d\tau. \end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,z,\xi,\eta,t) = G_1(r,\xi,t)G_2(z,\eta,t),$$

$$G_1(r,\xi,t) = \frac{1}{\pi R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{J_1^2(\mu_n)}J_0\Big(\frac{\mu_n r}{R}\Big)J_0\Big(\frac{\mu_n \xi}{R}\Big)\exp\Big(-\frac{a\mu_n^2 t}{R^2}\Big),$$

$$G_2(z,\eta,t) = \frac{1}{l} + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\Big(\frac{n\pi z}{l}\Big)\cos\Big(\frac{n\pi\eta}{l}\Big)\exp\Big(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\Big),$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $J_0(\mu) = 0$.

2°. Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r,z) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_r w &= g_1(z,t) && \text{при} \quad r = R && \text{(граничное условие)},\\ w &= g_2(r,t) && \text{при} \quad z = 0 && \text{(граничное условие)},\\ w &= g_3(r,t) && \text{при} \quad z = l && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,z,t) = 2\pi &\int_0^l\int_0^R \xi f(\xi,\eta)G(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta\, + \\ &+ 2\pi aR\int_0^t\int_0^l g_1(\eta,\tau)G(r,z,R,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau\, + \\ &+ 2\pi a\int_0^t\int_0^R \xi g_2(\xi,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\eta=0}d\xi\,d\tau\, - \\ &- 2\pi a\int_0^t\int_0^R \xi g_3(\xi,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\eta=l}d\xi\,d\tau. \end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,z,\xi,\eta,t) = G_1(r,\xi,t)G_2(z,\eta,t),$$

$$G_1(r,\xi,t) = \frac{1}{\pi R^2} + \frac{1}{\pi R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{J_0^2(\mu_n)}J_0\Big(\frac{\mu_n r}{R}\Big)J_0\Big(\frac{\mu_n \xi}{R}\Big)\exp\Big(-\frac{a\mu_n^2 t}{R^2}\Big),$$

$$G_2(z,\eta,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\Big(\frac{n\pi z}{l}\Big)\sin\Big(\frac{n\pi\eta}{l}\Big)\exp\Big(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\Big),$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $J_1(\mu) = 0$.

2.1.3-10. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Первая краевая задача.

Рассматривается полый круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r,z) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(z,t) && \text{при} \quad r = R_1 && \text{(граничное условие)},\\ w &= g_2(z,t) && \text{при} \quad r = R_2 && \text{(граничное условие)},\\ w &= g_3(r,t) && \text{при} \quad z = 0 && \text{(граничное условие)},\\ w &= g_4(r,t) && \text{при} \quad z = l && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,z,t) = 2\pi &\int_0^l\int_{R_1}^{R_2} \xi f(\xi,\eta)G(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta\, + \\ &+ 2\pi aR_1\int_0^t\int_0^l g_1(\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\xi=R_1}d\eta\,d\tau\, - \\ &- 2\pi aR_2\int_0^t\int_0^l g_2(\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\xi=R_2}d\eta\,d\tau\, + \\ &+ 2\pi a\int_0^t\int_{R_1}^{R_2} \xi g_3(\xi,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\eta=0}d\xi\,d\tau\, - \\ &- 2\pi a\int_0^t\int_{R_1}^{R_2} \xi g_4(\xi,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\eta=l}d\xi\,d\tau. \end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,z,\xi,\eta,t) = G_1(z,\eta,t)G_2(r,\xi,t),$$

$$G_1(z,\eta,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\Bigl(\frac{n\pi z}{l}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{n\pi\eta}{l}\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\Bigr),$$

$$G_2(r,\xi,t) = \frac{\pi}{4R_1^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2 J_0^2(s\mu_n)}{J_0^2(\mu_n)-J_0^2(s\mu_n)}\Psi_n(r)\Psi_n(\xi)\exp\Bigl(-\frac{a\mu_n^2 t}{R_1^2}\Bigr),$$

$$\Psi_n(r) = Y_0(\mu_n)J_0\Bigl(\frac{\mu_n r}{R_1}\Bigr) - J_0(\mu_n)Y_0\Bigl(\frac{\mu_n r}{R_1}\Bigr), \qquad s = \frac{R_2}{R_1},$$

где $J_0(\mu)$ и $Y_0(\mu)$ — функции Бесселя, μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_0(\mu)Y_0(s\mu) - J_0(s\mu)Y_0(\mu) = 0.$$

Численные значения первых пяти корней $\mu_n = \mu_n(s)$ в диапазоне $1{,}4 \leqslant s \leqslant 4{,}0$ приведены в книге Г. Карслоу, Д. Егера (1964, стр. 482). См. также М. Абрамовиц, И. Стиган (1979, стр. 233).

2.1.3-11. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Вторая краевая задача.

Рассматривается полый круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f(r,z) && \text{при}\quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_r w &= g_1(z,t) && \text{при}\quad r=R_1 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_r w &= g_2(z,t) && \text{при}\quad r=R_2 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_3(r,t) && \text{при}\quad z=0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_4(r,t) && \text{при}\quad z=l && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(r,z,t) = 2\pi &\int_0^l\int_{R_1}^{R_2}\xi f(\xi,\eta)G(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta -\\
&- 2\pi a R_1\int_0^t\int_0^l g_1(\eta,\tau)G(r,z,R_1,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau +\\
&+ 2\pi a R_2\int_0^t\int_0^l g_2(\eta,\tau)G(r,z,R_2,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau -\\
&- 2\pi a\int_0^t\int_{R_1}^{R_2}\xi g_3(\xi,\tau)G(r,z,\xi,0,t-\tau)\,d\xi\,d\tau +\\
&+ 2\pi a\int_0^t\int_{R_1}^{R_2}\xi g_4(\xi,\tau)G(r,z,\xi,l,t-\tau)\,d\xi\,d\tau.
\end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,z,\xi,\eta,t) = G_1(z,\eta,t)G_2(r,\xi,t),$$

$$G_1(z,\eta,t) = \frac{1}{l} + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\Bigl(\frac{n\pi z}{l}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{n\pi\eta}{l}\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\Bigr),$$

$$G_2(r,\xi,t) = \frac{1}{\pi(R_2^2-R_1^2)} + \frac{\pi}{4R_1^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2 J_1^2(s\mu_n)}{J_1^2(\mu_n)-J_1^2(s\mu_n)}\Psi_n(r)\Psi_n(\xi)\exp\Bigl(-\frac{a\mu_n^2 t}{R_1^2}\Bigr),$$

$$\Psi_n(r) = Y_1(\mu_n)J_0\Bigl(\frac{\mu_n r}{R_1}\Bigr) - J_1(\mu_n)Y_0\Bigl(\frac{\mu_n r}{R_1}\Bigr), \qquad s = \frac{R_2}{R_1},$$

где $J_k(\mu)$ и $Y_k(\mu)$ — функции Бесселя ($k = 0,\ 1$); μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_1(\mu)Y_1(s\mu) - J_1(s\mu)Y_1(\mu) = 0.$$

Численные значения первых пяти корней $\mu_n = \mu_n(s)$ приведены в книге М. Абрамовица, И. Стиган (1979, стр. 233).

2.1.3-12. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Третья краевая задача.

Рассматривается полый круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f(r,z) \quad &&\text{при} \quad t=0 \quad &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_r w - k_1 w &= g_1(z,t) \quad &&\text{при} \quad r=R_1 \quad &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_r w + k_2 w &= g_2(z,t) \quad &&\text{при} \quad r=R_2 \quad &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w - k_3 w &= g_3(r,t) \quad &&\text{при} \quad z=0 \quad &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w + k_4 w &= g_4(r,t) \quad &&\text{при} \quad z=l \quad &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

О решении этой задачи см. разд. 2.2.3-4 при $\Phi \equiv 0$.

2.2. Уравнение теплопроводности с источником $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\Delta_2 w + \Phi(x,y,t)$

2.2.1. Задачи в декартовой системе координат

В прямоугольной декартовой системе координат неоднородное уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big) + \Phi(x,y,t).$$

Оно описывает развитие двумерных нестационарных процессов в неподвижных средах или твердых телах с постоянным коэффициентом температуропроводности при наличии объемных источников или стоков тепла.

2.2.1-1. Область: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$. Задача Коши.

Задано начальное условие:

$$w = f(x,y) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(x,y,t) = &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta) G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta \,+\\
&+ \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi,\eta,\tau) G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau,
\end{aligned}$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta,t) = \frac{1}{4\pi at}\exp\Big[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4at}\Big].$$

⊙ *Литература*: А. Г. Бутковский (1979, стр. 134).

2.2.1-2. Область: $0 \leqslant x < \infty$, $-\infty < y < \infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается полуплоскость. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f(x,y) \quad &&\text{при} \quad t=0 \quad &&\text{(начальное условие)},\\
w &= g(y,t) \quad &&\text{при} \quad x=0 \quad &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(x,y,t) = &\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta) G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\eta\,d\xi \,+\\
&+ a\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} g(\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\xi=0}\,d\eta\,d\tau \,+\\
&+ \int_0^t\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi,\eta,\tau) G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\xi\,d\tau,
\end{aligned}$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta,t) = \frac{1}{4\pi at}\Big\{\exp\Big[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4at}\Big] - \exp\Big[-\frac{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2}{4at}\Big]\Big\}.$$

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 271).

2.2.1-3. Область: $0 \leqslant x < \infty$, $-\infty < y < \infty$. Вторая краевая задача.

Рассматривается полуплоскость. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x,y) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_x w &= g(y,t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,y,t) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\eta\,d\xi - a\int_0^t \int_{-\infty}^\infty g(\eta,\tau)G(x,y,0,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau + {}$$
$$+ \int_0^t \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \Phi(\xi,\eta,\tau)G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\xi\,d\tau,$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta,t) = \frac{1}{4\pi at}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4at}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2}{4at}\right]\right\}.$$

2.2.1-4. Область: $0 \leqslant x < \infty$, $-\infty < y < \infty$. Третья краевая задача.

Рассматривается полуплоскость. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x,y) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_x w - kw &= g(y,t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(x,y,t)$ определяется по формуле из разд. 2.2.1-3, где

$$G(x,y,\xi,\eta,t) = \frac{1}{4\pi at}\exp\left[-\frac{(y-\eta)^2}{4at}\right]\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right] - {}\right.$$
$$\left. - 2k\int_0^\infty \exp\left[-\frac{(x+\xi+s)^2}{4at} - ks\right] ds\right\}.$$

2.2.1-5. Область: $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается четверть плоскости. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x,y) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(y,t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\ w &= g_2(x,t) &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(x,y,t) = {}& \int_0^\infty \int_0^\infty f(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta + {}\\ &+ a\int_0^t \int_0^\infty g_1(\eta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\right]_{\xi=0} d\eta\,d\tau + {}\\ &+ a\int_0^t \int_0^\infty g_2(\xi,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\right]_{\eta=0} d\xi\,d\tau + {}\\ &+ \int_0^t \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(\xi,\eta,\tau)G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau, \end{aligned}$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta,t) = \frac{1}{4\pi at}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right]\right\}\left\{\exp\left[-\frac{(y-\eta)^2}{4at}\right] - \exp\left[-\frac{(y+\eta)^2}{4at}\right]\right\}.$$

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 172, 350, 355), А. Г. Бутковский (1979, стр. 134).

2.2.1-6. Область: $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$. Вторая краевая задача.

Рассматривается четверть плоскости. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x,y) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_x w &= g_1(y,t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_y w &= g_2(x,t) &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,y,t) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(\xi,\eta) G(x,y,\xi,\eta,t)\, d\xi\, d\eta -$$
$$- a \int_0^t \int_0^\infty g_1(\eta,\tau) G(x,y,0,\eta,t-\tau)\, d\eta\, d\tau -$$
$$- a \int_0^t \int_0^\infty g_2(\xi,\tau) G(x,y,\xi,0,t-\tau)\, d\xi\, d\tau +$$
$$+ \int_0^t \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(\xi,\eta,\tau) G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\, d\xi\, d\eta\, d\tau,$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta,t) = \frac{1}{4\pi a t} \Big\{ \exp\Big[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\Big] + \exp\Big[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\Big] \Big\} \Big\{ \exp\Big[-\frac{(y-\eta)^2}{4at}\Big] + \exp\Big[-\frac{(y+\eta)^2}{4at}\Big] \Big\}.$$

2.2.1-7. Область: $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$. Третья краевая задача.

Рассматривается четверть плоскости. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x,y) &&\text{при} \quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_x w - k_1 w &= g_1(y,t) &&\text{при} \quad x = 0 &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_y w - k_2 w &= g_2(x,t) &&\text{при} \quad y = 0 &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(x,y,t)$ определяется по формуле из разд. 2.2.1-6, где

$$\begin{aligned} G(x,y,\xi,\eta,t) = \frac{1}{4\pi a t} \Big\{ &\exp\Big[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\Big] + \exp\Big[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\Big] \\ &- 2k_1\sqrt{\pi a t}\, \exp\big[a k_1^2 t + k_1(x+\xi)\big] \operatorname{erfc}\Big(\frac{x+\xi}{2\sqrt{at}} + k_1\sqrt{at}\Big) \Big\} \times \\ \times \Big\{ &\exp\Big[-\frac{(y-\eta)^2}{4at}\Big] + \exp\Big[-\frac{(y+\eta)^2}{4at}\Big] \\ &- 2k_2\sqrt{\pi a t}\, \exp\big[a k_2^2 t + k_2(y+\eta)\big] \operatorname{erfc}\Big(\frac{y+\eta}{2\sqrt{at}} + k_2\sqrt{at}\Big) \Big\}. \end{aligned}$$

2.2.1-8. Область: $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$. Смешанная краевая задача.

Рассматривается четверть плоскости. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x,y) &&\text{при} \quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(y,t) &&\text{при} \quad x = 0 &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_y w &= g_2(x,t) &&\text{при} \quad y = 0 &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,y,t) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(\xi,\eta) G(x,y,\xi,\eta,t)\, d\xi\, d\eta +$$
$$+ a \int_0^t \int_0^\infty g_1(\eta,\tau) \Big[\frac{\partial}{\partial \xi} G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\xi=0} d\eta\, d\tau -$$
$$- a \int_0^t \int_0^\infty g_2(\xi,\tau) G(x,y,\xi,0,t-\tau)\, d\xi\, d\tau +$$
$$+ \int_0^t \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(\xi,\eta,\tau) G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\, d\xi\, d\eta\, d\tau,$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta,t) = \frac{1}{4\pi a t} \Big\{ \exp\Big[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\Big] - \exp\Big[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\Big] \Big\} \Big\{ \exp\Big[-\frac{(y-\eta)^2}{4at}\Big] + \exp\Big[-\frac{(y+\eta)^2}{4at}\Big] \Big\}.$$

2.2.1-9. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant y < \infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается полубесконечная полоса. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x,y) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(y,t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\ w &= g_2(y,t) &&\text{при}\quad x=l &&\text{(граничное условие)},\\ w &= g_3(x,t) &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение дается формулой из разд. 2.1.1-12 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t\int_0^l\int_0^\infty \Phi(\xi,\eta,\tau)G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\xi\,d\tau,$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

2.2.1-10. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant y < \infty$. Вторая краевая задача.

Рассматривается полубесконечная полоса. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x,y) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_x w &= g_1(y,t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_x w &= g_2(y,t) &&\text{при}\quad x=l &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_y w &= g_3(x,t) &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(x,y,t) = {}&\int_0^\infty\int_0^l f(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta + \int_0^t\int_0^\infty\int_0^l \Phi(\xi,\eta,\tau)G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau -\\ &- a\int_0^t\int_0^\infty g_1(\eta,\tau)G(x,y,0,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau + a\int_0^t\int_0^\infty g_2(\eta,\tau)G(x,y,l,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau -\\ &- a\int_0^t\int_0^l g_3(\xi,\tau)G(x,y,\xi,0,t-\tau)\,d\xi\,d\tau, \end{aligned}$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta,t) = G_1(x,\xi,t)G_2(y,\eta,t),$$

$$G_1(x,\xi,t) = \frac{1}{l} + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\Bigl(\frac{n\pi x}{l}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{n\pi\xi}{l}\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\Bigr),$$

$$G_2(y,\eta,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\biggl\{\exp\biggl[-\frac{(y-\eta)^2}{4at}\biggr] + \exp\biggl[-\frac{(y+\eta)^2}{4at}\biggr]\biggr\}.$$

2.2.1-11. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant y < \infty$. Третья краевая задача.

Рассматривается полубесконечная полоса. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x,y) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_x w - k_1 w &= g_1(y,t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_x w + k_2 w &= g_2(y,t) &&\text{при}\quad x=l &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_y w - k_3 w &= g_3(x,t) &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(x,y,t)$ определяется по формуле из разд. 2.2.1-10, где функция Грина $G(x,y,\xi,\eta,t)$ является произведением функции Грина из разд. 1.1.1-11 и функции Грина из разд. 1.1.1-8 (в последней следует заменить x, ξ и k соответственно на y, η и k_3).

2.2.1-12. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant y < \infty$. Смешанная краевая задача.

Рассматривается полубесконечная полоса. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x,y) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(y,t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\ w &= g_2(y,t) &&\text{при}\quad x=l &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_y w &= g_3(x,t) &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение дается формулой из разд. 2.1.1-15 (п. 1°) с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t \int_0^l \int_0^\infty \Phi(\xi,\eta,\tau) G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\, d\eta\, d\xi\, d\tau,$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

2.2.1-13. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$. Первая краевая задача.

Рассматривается прямоугольная область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f(x,y) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(y,t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(y,t) &&\text{при}\quad x=l_1 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_3(x,t) &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_4(x,t) &&\text{при}\quad y=l_2 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение дается формулой из разд. 2.1.1-16 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \Phi(\xi,\eta,\tau) G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\, d\eta\, d\xi\, d\tau,$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 355).

2.2.1-14. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$. Вторая краевая задача.

Рассматривается прямоугольная область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f(x,y) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_x w &= g_1(y,t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_x w &= g_2(y,t) &&\text{при}\quad x=l_1 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_3(x,t) &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_4(x,t) &&\text{при}\quad y=l_2 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(x,y,t) = {} & \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} f(\xi,\eta) G(x,y,\xi,\eta,t)\, d\eta\, d\xi + \int_0^t \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \Phi(\xi,\eta,\tau) G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\, d\eta\, d\xi\, d\tau - \\
& - a\int_0^t\int_0^{l_2} g_1(\eta,\tau) G(x,y,0,\eta,t-\tau)\, d\eta\, d\tau + a\int_0^t\int_0^{l_2} g_2(\eta,\tau) G(x,y,l_1,\eta,t-\tau)\, d\eta\, d\tau - \\
& - a\int_0^t\int_0^{l_1} g_3(\xi,\tau) G(x,y,\xi,0,t-\tau)\, d\xi\, d\tau + a\int_0^t\int_0^{l_1} g_4(\xi,\tau) G(x,y,\xi,l_2,t-\tau)\, d\xi\, d\tau,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
G(x,y,\xi,\eta,t) = {} & \frac{1}{l_1 l_2}\left[1 + 2\sum_{n=1}^\infty \exp\Bigl(-\frac{\pi^2 n^2 a t}{l_1^2}\Bigr) \cos\frac{n\pi x}{l_1} \cos\frac{n\pi \xi}{l_1}\right] \times \\
& \times \left[1 + 2\sum_{m=1}^\infty \exp\Bigl(-\frac{\pi^2 m^2 a t}{l_2^2}\Bigr) \cos\frac{m\pi y}{l_2} \cos\frac{m\pi \eta}{l_2}\right].
\end{aligned}$$

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 355).

2.2.1-15. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$. Третья краевая задача.

Рассматривается прямоугольная область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f(x,y) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_x w - k_1 w &= g_1(y,t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_x w + k_2 w &= g_2(y,t) &&\text{при}\quad x=l_1 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_y w - k_3 w &= g_3(x,t) &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_y w + k_4 w &= g_4(x,t) &&\text{при}\quad y=l_2 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение $w(x,y,t)$ определяется по формуле из разд. 2.2.1-14, где

$$G(x,y,\xi,\eta,t) = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\|\varphi_n\|^2} \exp(-a\mu_n^2 t)\right\}\left\{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\psi_m(y)\psi_m(\eta)}{\|\psi_m\|^2} \exp(-a\lambda_m^2 t)\right\},$$

$$\varphi_n(x) = \cos(\mu_n x) + \frac{k_1}{\mu_n}\sin(\mu_n x), \qquad \|\varphi_n\|^2 = \frac{k_2}{2\mu_n^2}\,\frac{\mu_n^2 + k_1^2}{\mu_n^2 + k_2^2} + \frac{k_1}{2\mu_n^2} + \frac{l_1}{2}\left(1 + \frac{k_1^2}{\mu_n^2}\right),$$

$$\psi_m(y) = \cos(\lambda_m y) + \frac{k_3}{\lambda_m}\sin(\lambda_m y), \quad \|\psi_m\|^2 = \frac{k_4}{2\lambda_m^2}\,\frac{\lambda_m^2 + k_3^2}{\lambda_m^2 + k_4^2} + \frac{k_3}{2\lambda_m^2} + \frac{l_2}{2}\left(1 + \frac{k_3^2}{\lambda_m^2}\right).$$

Здесь μ_n и λ_m — положительные корни трансцендентных уравнений

$$\frac{\operatorname{tg}(\mu l_1)}{\mu} = \frac{k_1 + k_2}{\mu^2 - k_1 k_2}, \qquad \frac{\operatorname{tg}(\lambda l_2)}{\lambda} = \frac{k_3 + k_4}{\lambda^2 - k_3 k_4}.$$

2.2.1-16. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$. Смешанная краевая задача.

Рассматривается прямоугольная область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f(x,y) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(y,t) && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(y,t) && \text{при} \quad x = l_1 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_3(x,t) && \text{при} \quad y = 0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_4(x,t) && \text{при} \quad y = l_2 && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение дается формулой из разд. 2.1.1-19 (п. 1°) с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \Phi(\xi,\eta,\tau) G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\, d\eta\, d\xi\, d\tau,$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

2.2.2. Задачи в полярной системе координат

Уравнение теплопроводности с объемным источником в полярной системе координат имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right) + \Phi(r,\varphi,t).$$

Одномерные задачи, имеющие решения $w = w(r,t)$, рассматриваются в разд. 1.2.2.

2.2.2-1. Область: $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Задача Коши.

Задано начальное условие:

$$w = f(r,\varphi) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Решение:

$$w(r,\varphi,t) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f(\xi,\eta) G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\,\xi\, d\xi\, d\eta + \\ + \int_0^t \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \Phi(\xi,\eta,\tau) G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\,\xi\, d\xi\, d\eta\, d\tau,$$

где

$$G(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{1}{4\pi a t}\exp\left[-\frac{r^2 + \xi^2 - 2r\xi\cos(\varphi - \eta)}{4at}\right].$$

2.2.2-2. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Различные краевые задачи.

1°. Решение первой краевой задачи для круга радиуса R дается формулой из разд. 2.1.2-2 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t \int_0^{2\pi}\int_0^{R} \Phi(\xi,\eta,\tau) G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\xi\, d\xi\, d\eta\, d\tau, \qquad (1)$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

2°. Решение второй краевой задачи для круга дается формулой из разд. 2.1.2-3 с дополнительным слагаемым (1).

3°. Решение третьей краевой задачи для круга дается формулой из разд. 2.1.2-4 с дополнительным слагаемым (1).

2.2.2-3. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Различные краевые задачи.

1°. Решение первой краевой задачи для кольцевой области дается формулой из разд. 2.1.2-5 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \Phi(\xi, \eta, \tau) G(r, \varphi, \xi, \eta, t - \tau) \xi \, d\xi \, d\eta \, d\tau, \tag{2}$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

2°. Решение третьей краевой задачи для кольцевой области дается формулой из разд. 2.1.2-7 с дополнительным слагаемым (2).

2.2.2-4. Область: $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$. Различные краевые задачи.

1°. Решение первой краевой задачи для клина дается формулой из разд. 2.1.2-8 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t \int_0^{\varphi_0} \int_0^{\infty} \Phi(\xi, \eta, \tau) G(r, \varphi, \xi, \eta, t - \tau) \xi \, d\xi \, d\eta \, d\tau, \tag{3}$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

2°. Решение второй краевой задачи для клина дается формулой из разд. 2.1.2-9 с дополнительным слагаемым (3).

2.2.2-5. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$. Различные краевые задачи.

1°. Решение первой краевой задачи для сектора круга дается формулой из разд. 2.1.2-10 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t \int_0^{\varphi_0} \int_0^{R} \Phi(\xi, \eta, \tau) G(r, \varphi, \xi, \eta, t - \tau) \xi \, d\xi \, d\eta \, d\tau, \tag{4}$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

2°. Решение смешанной краевой задачи для сектора круга дается формулой из разд. 2.1.2-11 с дополнительным слагаемым (4).

2.2.3. Осесимметричные задачи

В осесимметричном случае уравнение теплопроводности при наличии объемных источников выделения или поглощения тепла в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \Phi(r, z, t).$$

Одномерные задачи с осевой симметрией, имеющие решения $w = w(r, t)$, рассматриваются в разд. 1.2.2.

2.2.3-1. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant z < \infty$. Различные краевые задачи.

1°. Решение первой краевой задачи для полубесконечного кругового цилиндра радиуса R дается формулой из разд. 2.1.3-2 с дополнительным слагаемым

$$2\pi \int_0^t \int_0^{\infty} \int_0^{R} \xi \Phi(\xi, \eta, \tau) G(r, z, \xi, \eta, t - \tau) \, d\xi \, d\eta \, d\tau, \tag{1}$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

2°. Решение второй краевой задачи для полубесконечного кругового цилиндра дается формулой из разд. 2.1.3-3 с дополнительным слагаемым (1).

3°. Решение третьей краевой задачи для полубесконечного кругового цилиндра дается формулой из разд. 2.1.3-4 с дополнительным слагаемым (1).

4°. Решения различных смешанных краевых задач для полубесконечного кругового цилиндра описываются формулами из разд. 2.1.3-5 с дополнительными слагаемыми вида (1).

2.2.3-2. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Различные краевые задачи.

1°. Решение первой краевой задачи для кругового цилиндра конечных размеров дается формулой из разд. 2.1.3-6 с дополнительным слагаемым
$$2\pi \int_0^t \int_0^l \int_0^R \xi\Phi(\xi,\eta,\tau)G(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau, \qquad (2)$$
которое учитывает неоднородность уравнения.

2°. Решение второй краевой задачи для кругового цилиндра конечных размеров дается формулой из разд. 2.1.3-7 с дополнительным слагаемым (2).

3°. Решение третьей краевой задачи для кругового цилиндра конечных размеров дается формулой из разд. 2.1.3-8 с дополнительным слагаемым (2).

4°. Решения различных смешанных краевых задач для кругового цилиндра конечных размеров описываются формулами из разд. 2.1.3-9 с дополнительными слагаемыми вида (2).

2.2.3-3. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Первая и вторая краевые задачи.

1°. Решение первой краевой задачи для полого кругового цилиндра конечных размеров дается формулой из разд. 2.1.3-10 с дополнительным слагаемым
$$2\pi \int_0^t \int_0^l \int_{R_1}^{R_2} \xi\Phi(\xi,\eta,\tau)G(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau, \qquad (3)$$
которое учитывает неоднородность уравнения.

2°. Решение второй краевой задачи для полого кругового цилиндра конечных размеров дается формулой из разд. 2.1.3-11 с дополнительным слагаемым (3).

2.2.3-4. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Третья краевая задача.

Рассматривается полый круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:
$$\begin{aligned}
w &= f(r,z) && \text{при}\quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_r w - k_1 w &= g_1(z,t) && \text{при}\quad r=R_1 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_r w + k_2 w &= g_2(z,t) && \text{при}\quad r=R_2 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w - k_3 w &= g_3(r,t) && \text{при}\quad z=0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w + k_4 w &= g_4(r,t) && \text{при}\quad z=l && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:
$$\begin{aligned}
w(r,z,t) = 2\pi &\int_0^l \int_{R_1}^{R_2} \xi f(\xi,\eta)G(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta\,-\\
&- 2\pi a R_1 \int_0^t \int_0^l g_1(\eta,\tau)G(r,z,R_1,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau\,+\\
&+ 2\pi a R_2 \int_0^t \int_0^l g_2(\eta,\tau)G(r,z,R_2,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau\,-\\
&- 2\pi a \int_0^t \int_{R_1}^{R_2} \xi g_3(\xi,\tau)G(r,z,\xi,0,t-\tau)\,d\xi\,d\tau\,+\\
&+ 2\pi a \int_0^t \int_{R_1}^{R_2} \xi g_4(\xi,\tau)G(r,z,\xi,l,t-\tau)\,d\xi\,d\tau\,+\\
&+ 2\pi \int_0^t \int_0^l \int_{R_1}^{R_2} \xi\Phi(\xi,\eta,\tau)G(r,\xi,z,\eta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau.
\end{aligned}$$

Здесь функция Грина описывается формулами
$$G(r,z,\xi,\eta,t) = G_1(r,\xi,t)G_2(z,\eta,t),$$
$$G_1(r,\xi,t) = \frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2}{B_n}\bigl[k_2 J_0(\lambda_n R_2) - \lambda_n J_1(\lambda_n R_2)\bigr]^2 H_n(r)H_n(\xi)\exp(-\lambda_n^2 at),$$
$$G_2(z,\eta,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_m(z)\varphi_m(\eta)}{\|\varphi_m\|^2}\exp(-\mu_m^2 at),$$

где

$$B_n = (\lambda_n^2 + k_2^2)\bigl[k_1 J_0(\lambda_n R_1) + \lambda_n J_1(\lambda_n R_1)\bigr]^2 - (\lambda_n^2 + k_1^2)\bigl[k_2 J_0(\lambda_n R_2) - \lambda_n J_1(\lambda_n R_2)\bigr]^2,$$
$$H_n(r) = \bigl[k_1 Y_0(\lambda_n R_1) + \lambda_n Y_1(\lambda_n R_1)\bigr] J_0(\lambda_n r) - \bigl[k_1 J_0(\lambda_n R_1) + \lambda_n J_1(\lambda_n R_1)\bigr] Y_0(\lambda_n r),$$
$$\varphi_m(z) = \mu_m \cos(\mu_m z) + k_3 \sin(\mu_m z), \quad \|\varphi_m\|^2 = \frac{k_4}{2}\,\frac{\mu_m^2 + k_3^2}{\mu_m^2 + k_4^2} + \frac{k_3}{2} + \frac{l}{2}(\mu_m^2 + k_3^2);$$

$J_0(\lambda)$, $J_1(\lambda)$, $Y_0(\lambda)$, $Y_1(\lambda)$ — функции Бесселя; λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\bigl[k_1 J_0(\lambda R_1) + \lambda J_1(\lambda R_1)\bigr]\bigl[k_2 Y_0(\lambda R_2) - \lambda Y_1(\lambda R_2)\bigr] - \\ - \bigl[k_2 J_0(\lambda R_2) - \lambda J_1(\lambda R_2)\bigr]\bigl[k_1 Y_0(\lambda R_1) + \lambda Y_1(\lambda R_1)\bigr] = 0;$$

μ_m — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\frac{\operatorname{tg}\mu l}{\mu} = \frac{k_3 + k_4}{\mu^2 - k_3 k_4}.$$

⊙ *Литература*: А. Г. Бутковский (1979, стр. 137).

2.2.3-5. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Смешанная краевая задача.

Рассматривается полый круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r,z) && \text{при}\quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_r w - k_1 w &= g_1(z,t) && \text{при}\quad r = R_1 && \text{(граничное условие)},\\ \partial_r w + k_2 w &= g_2(z,t) && \text{при}\quad r = R_2 && \text{(граничное условие)},\\ w &= g_3(r,t) && \text{при}\quad z = 0 && \text{(граничное условие)},\\ w &= g_4(r,t) && \text{при}\quad z = l && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,z,t) &= 2\pi \int_0^l \int_{R_1}^{R_2} \xi f(\xi,\eta) G(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta \,-\\ &- 2\pi a R_1 \int_0^t \int_0^l g_1(\eta,\tau) G(r,z,R_1,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau \,+\\ &+ 2\pi a R_2 \int_0^t \int_0^l g_2(\eta,\tau) G(r,z,R_2,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau \,+\\ &+ 2\pi a \int_0^t \int_{R_1}^{R_2} \xi g_3(\xi,\tau) \Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta} G(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\Bigr]_{\eta=0} d\xi\,d\tau \,-\\ &- 2\pi a \int_0^t \int_{R_1}^{R_2} \xi g_4(\xi,\tau) \Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta} G(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\Bigr]_{\eta=l} d\xi\,d\tau \,+\\ &+ 2\pi \int_0^t \int_0^l \int_{R_1}^{R_2} \xi \Phi(\xi,\eta,\tau) G(r,\xi,z,\eta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau. \end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,\xi,z,\eta,t) = G_1(r,\xi,t)\,\frac{2}{l}\sum_{m=1}^{\infty} \sin\Bigl(\frac{\pi m z}{l}\Bigr) \sin\Bigl(\frac{\pi m \eta}{l}\Bigr) \exp\Bigl(-\frac{\pi^2 m^2 a t}{l^2}\Bigr),$$

где выражение для функции $G_1(r,\xi,t)$ приведено в разд. 2.2.3-4.

► *Решения других краевых задач приведены в разд. 3.2.2, где рассматривается более общее трехмерное уравнение.*

2.3. Другие уравнения

2.3.1. Уравнения, содержащие произвольные параметры

1. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\Bigl(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Bigr) + (bx + cy + k)w.$

Преобразование

$$w(x,y,t) = u(\xi,\eta,t)\exp\bigl[(bx + cy + k)t + \tfrac{1}{3}a(b^2 + c^2)t^3\bigr], \quad \xi = x + abt^2, \quad \eta = y + act^2$$

приводит к двумерному уравнению теплопроводности $\partial_t u = a(\partial_{\xi\xi} u + \partial_{\eta\eta} u)$.

См. также работы U. Niederer (1973), C. Boyer (1974).

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big) - (bx^2 + by^2 + k)w, \qquad b > 0.$

Преобразование (C — любое)

$$w(x,y,t) = u(\xi,\eta,\tau)\exp\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}\,(x^2+y^2) + \big(2\sqrt{ab} - k\big)\,t\right],$$

$$\xi = x\exp\big(2\sqrt{ab}\,t\big), \quad \eta = y\exp\big(2\sqrt{ab}\,t\big), \quad \tau = \frac{1}{4\sqrt{ab}}\exp\big(4\sqrt{ab}\,t\big) + C$$

приводит к двумерному уравнению теплопроводности $\partial_\tau u = a(\partial_{\xi\xi} u + \partial_{\eta\eta} u)$.

См. также работы U. Niederer (1973), C. Boyer (1974).

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big) + (bx^2 + by^2 - k)w, \qquad b > 0.$

Преобразование

$$w(x,y,t) = \frac{1}{\cos\big(2\sqrt{ab}\,t\big)}\exp\left[\frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}\operatorname{tg}\big(2\sqrt{ab}\,t\big)(x^2+y^2) - kt\right]u(\xi,\eta,\tau),$$

$$\xi = \frac{x}{\cos\big(2\sqrt{ab}\,t\big)}, \quad \eta = \frac{y}{\cos\big(2\sqrt{ab}\,t\big)}, \quad \tau = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{b}}\operatorname{tg}\big(2\sqrt{ab}\,t\big)$$

приводит к двумерному уравнению теплопроводности $\partial_\tau u = \partial_{\xi\xi} u + \partial_{\eta\eta} u$.

См. также работы U. Niederer (1973), C. Boyer (1974).

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (ax^{-2} + by^{-2})w.$

Частный случай уравнения 2.3.2.7. В работе C. Boyer (1976) показано, что это уравнение допускает разделение переменных в 25 системах координат при $ab = 0$ и в 15 системах координат при $ab \neq 0$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big) + (bt^n x + ct^m y + st^k)w.$

Частный случай уравнения 2.3.2.2 при $f(t) = bt^n$, $g(t) = ct^m$, $h(t) = st^k$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big) + \big[-b(x^2+y^2) + c_1 t^{n_1} x + c_2 t^{n_2} y + st^k\big]w.$

Частный случай уравнения 2.3.2.3 при $f(t) = c_1 t^{n_1}$, $g(t) = c_2 t^{n_2}$, $h(t) = st^k$.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big) + b_1\dfrac{\partial w}{\partial x} + b_2\dfrac{\partial w}{\partial y} + cw.$

Это уравнение описывает нестационарное поле температуры (концентрации) в движущейся с постоянной скоростью среде при наличии объемного выделения (поглощения) тепла, которое пропорционально температуре.

Замена

$$w(x,y,t) = \exp\big(A_1 x + A_2 y + Bt\big)U(x,y,t),$$

$$A_1 = -\frac{b_1}{2a}, \quad A_2 = -\frac{b_2}{2a}, \quad B = c - \frac{b_1^2 + b_2^2}{4a}$$

приводит к двумерному уравнению теплопроводности $\partial_t U = a\Delta_2 U$, которое рассматривается в разд. 2.1.1.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big) + b_1\dfrac{\partial w}{\partial x} + b_2\dfrac{\partial w}{\partial y} + (c_1 x + c_2 y + k)w.$

Преобразование

$$w(x,y,t) = \exp\big[(c_1 x + c_2 y)t + \tfrac{1}{3}a(c_1^2 + c_2^2)t^3 + \tfrac{1}{2}(b_1 c_1 + b_2 c_2)t^2 + kt\big]U(\xi,\eta,t),$$

$$\xi = x + ac_1 t^2 + b_1 t, \quad \eta = y + ac_2 t^2 + b_2 t$$

приводит к двумерному уравнению теплопроводности $\partial_t U = a(\partial_{\xi\xi} U + \partial_{\eta\eta} U)$, которое рассматривается в разд. 2.1.1.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + b_1 t^{n_1}\dfrac{\partial w}{\partial x} + b_2 t^{n_2}\dfrac{\partial w}{\partial y} + (c_1 t^{m_1} x + c_2 t^{m_2} y + s t^k)w.$

Частный случай уравнения 2.3.2.5. Это уравнение может быть сведено к двумерному уравнению теплопроводности, которое рассматривается в разд. 2.1.1.

10. $i\hbar\dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\hbar^2}{2m}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0.$

Двумерное уравнение Шредингера, $i^2 = -1$.

Фундаментальное решение:

$$\mathscr{E}(x,y,t) = -\frac{im}{2\pi\hbar^2 t}\exp\left[\frac{im}{2\hbar t}(x^2+y^2) - i\frac{\pi}{2}\right].$$

⊙ *Литература*: В. С. Владимиров, В. П. Михайлов, А. А. Вашарин и др. (1974, стр. 120).

2.3.2. Уравнения, содержащие произвольные функции

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + f(t)w.$

Это уравнение описывает развитие двумерных тепловых процессов в неподвижных средах или твердых телах с постоянным коэффициентом температуропроводности при наличии нестационарного объемного тепловыделения, которое пропорционально температуре.

Замена $w(x,y,t) = \exp\left[\int f(t)\,dt\right]U(x,y,t)$ приводит к двумерному уравнению теплопроводности $\partial_t U = a(\partial_{xx}U + \partial_{yy}U)$, которое рассматривалось в разд. 2.1.1.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \big[xf(t) + yg(t) + h(t)\big]w.$

Преобразование

$$w(x,y,t) = u(\xi,\eta,t)\exp\left[xF(t) + yG(t) + H(t) + a\int F^2(t)\,dt + a\int G^2(t)\,dt\right],$$

$$\xi = x + 2a\int F(t)\,dt, \quad \eta = y + 2a\int G(t)\,dt,$$

где

$$F(t) = \int f(t)\,dt, \quad G(t) = \int g(t)\,dt, \quad H(t) = \int h(t)\,dt,$$

приводит к двумерному уравнению теплопроводности $\partial_t u = a\big(\partial_{\xi\xi}u + \partial_{\eta\eta}u\big)$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \big[-b(x^2+y^2) + f(t)x + g(t)y + h(t)\big]w.$

1°. Случай $b > 0$. Преобразование

$$w(x,y,t) = u(\xi,\eta,\tau)\exp\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}\,(x^2+y^2)\right],$$

$$\xi = x\exp\big(2\sqrt{ab}\,t\big), \quad \eta = y\exp\big(2\sqrt{ab}\,t\big), \quad \tau = \frac{1}{4\sqrt{ab}}\exp\big(4\sqrt{ab}\,t\big)$$

приводит к уравнению вида 2.3.2.2:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) + \big[F(\tau)\xi + G(\tau)\eta + H(\tau)\big]u,$$

$$F(\tau) = \frac{1}{(c\tau)^{3/2}}f\left(\frac{\ln(c\tau)}{c}\right), \quad G(\tau) = \frac{1}{(c\tau)^{3/2}}g\left(\frac{\ln(c\tau)}{c}\right), \quad H(\tau) = \frac{1}{c\tau}h\left(\frac{\ln(c\tau)}{c}\right) + \frac{1}{2\tau}, \quad c = 4\sqrt{ab}.$$

2°. Случай $b < 0$. Преобразование

$$w(x,y,t) = v(\bar\xi,\bar\eta,\bar\tau)\exp\left[\frac{\sqrt{-b}}{2\sqrt{a}}\,\mathrm{tg}\big(2\sqrt{-ab}\,t\big)\,(x^2+y^2)\right],$$

$$\bar\xi = \frac{x}{\cos\big(2\sqrt{-ab}\,t\big)}, \quad \bar\eta = \frac{y}{\cos\big(2\sqrt{-ab}\,t\big)}, \quad \bar\tau = \frac{1}{2\sqrt{-ab}}\,\mathrm{tg}\big(2\sqrt{-ab}\,t\big)$$

также приводит к уравнению вида 2.3.2.2 (преобразованное уравнение не выписывается).

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a_1(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_2(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \Phi(x, y, t).$

Частный случай уравнения 2.3.2.8. Пусть $0 < a_1(t) < \infty$ и $0 < a_2(t) < \infty$.

Для первой, второй, третьей и смешанных краевых задач, которые рассматриваются в ограниченных и бесконечных областях с прямолинейными границами ($x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$), функцию Грина можно представить в виде произведения

$$G(x, y, \xi, \eta, t, \tau) = G_1(x, \xi, T_1)G_2(y, \eta, T_2),$$
$$T_1 = \int_\tau^t a_1(\eta)\,d\eta, \quad T_2 = \int_\tau^t a_2(\eta)\,d\eta.$$

Здесь $G_1 = G_1(x, \xi, t)$ — вспомогательная функция Грина, соответствующая одномерному уравнению теплопроводности при $a_1(t) = 1$, $a_2(t) = 0$, $\Phi(x, y, t) = 0$ с однородными граничными условиями при $x = x_1$ и $x = x_2$ (для различных краевых задач функции G_1 указаны в разд. 1.1.1 и 1.1.2). Аналогично, $G_2 = G_2(y, \eta, t)$ — вспомогательная функция Грина, соответствующая одномерному уравнению теплопроводности при $a_1(t) = 0$, $a_2(t) = 1$, $\Phi(x, y, t) = 0$ с однородными граничными условиями при $y = y_1$ и $y = y_2$. Отметим, что вспомогательные функции Грина G_1 и G_2 вводятся для $\tau = 0$.

О решении различных краевых задач с помощью функции Грина см. в разд. 0.8.1.

Пример 1. Область: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$. Задача Коши.
Задано начальное условие:

$$w = f(x, y) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Решение:

$$w(x, y, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi, \eta, \tau)G(x, y, \xi, \eta, t, \tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta)G(x, y, \xi, \eta, t, 0)\,d\xi\,d\eta,$$

где

$$G(x, y, \xi, \eta, t, \tau) = \frac{1}{4\pi\sqrt{T_1 T_2}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4T_1} - \frac{(y-\eta)^2}{4T_2}\right], \quad T_1 = \int_\tau^t a_1(\eta)\,d\eta, \quad T_2 = \int_\tau^t a_2(\eta)\,d\eta.$$

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин (2000*b*).

Пример 2. Область: $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$. Вторая краевая задача.
Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f(x, y) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_x w &= g_1(y, t) && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_2(x, t) && \text{при} \quad y = 0 && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(x, y, t) = \int_0^t \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(\xi, \eta, \tau)G(x, y, \xi, \eta, t, \tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau + \int_0^\infty \int_0^\infty f(\xi, \eta)G(x, y, \xi, \eta, t, 0)\,d\xi\,d\eta\, -\\
- \int_0^t \int_0^\infty a_1(\tau)g_1(\eta, \tau)G(x, y, 0, \eta, t, \tau)\,d\eta\,d\tau - \int_0^t \int_0^\infty a_2(\tau)g_2(\xi, \tau)G(x, y, \xi, 0, t, \tau)\,d\xi\,d\tau,
\end{aligned}$$

где

$$G(x, y, \xi, \eta, t, \tau) = G_1(x, \xi, T_1)G_2(y, \eta, T_2),$$
$$G_1(x, \xi, T_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi T_1}}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4T_1}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4T_1}\right]\right\}, \quad T_1 = \int_\tau^t a_1(\eta)\,d\eta,$$
$$G_2(y, \eta, T_2) = \frac{1}{2\sqrt{\pi T_2}}\left\{\exp\left[-\frac{(y-\eta)^2}{4T_2}\right] + \exp\left[-\frac{(y+\eta)^2}{4T_2}\right]\right\}, \quad T_2 = \int_\tau^t a_2(\eta)\,d\eta.$$

Пример 3. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$. Первая краевая задача.
Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f(x, y) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(y, t) && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(y, t) && \text{при} \quad x = l_1 && \text{(граничное условие)},\\
w &= h_1(x, t) && \text{при} \quad y = 0 && \text{(граничное условие)},\\
w &= h_2(x, t) && \text{при} \quad y = l_2 && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}w(x,y,t) = &\int_0^t\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\Phi(\xi,\eta,\tau)G(x,y,\xi,\eta,t,\tau)\,d\eta\,d\xi\,d\tau +\\ &+\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} f(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta,t,0)\,d\eta\,d\xi +\\ &+\int_0^t\int_0^{l_2} a_1(\tau)g_1(\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,\xi,\eta,t,\tau)\Big]_{\xi=0}d\eta\,d\tau -\\ &-\int_0^t\int_0^{l_2} a_1(\tau)g_2(\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,\xi,\eta,t,\tau)\Big]_{\xi=l_1}d\eta\,d\tau +\\ &+\int_0^t\int_0^{l_1} a_2(\tau)h_1(\xi,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,\xi,\eta,t,\tau)\Big]_{\eta=0}d\xi\,d\tau -\\ &-\int_0^t\int_0^{l_1} a_2(\tau)h_2(\xi,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,\xi,\eta,t,\tau)\Big]_{\eta=l_2}d\xi\,d\tau,\end{aligned}$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta,t,\tau) = G_1(x,\xi,T_1)G_2(y,\eta,T_2),$$

$$G_1(x,\xi,T_1) = \frac{2}{l_1}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\Big(\frac{n\pi x}{l_1}\Big)\sin\Big(\frac{n\pi\xi}{l_1}\Big)\exp\Big(-\frac{n^2\pi^2T_1}{l_1{}^2}\Big),\qquad T_1 = \int_\tau^t a_1(\eta)\,d\eta,$$

$$G_2(y,\eta,T_2) = \frac{2}{l_2}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\Big(\frac{n\pi y}{l_2}\Big)\sin\Big(\frac{n\pi\eta}{l_2}\Big)\exp\Big(-\frac{n^2\pi^2T_2}{l_2{}^2}\Big),\qquad T_2 = \int_\tau^t a_2(\eta)\,d\eta.$$

5. $$\frac{\partial w}{\partial t} = a_1(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_2(t)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \big[b_1(t)x + c_1(t)\big]\frac{\partial w}{\partial x} + \big[b_2(t)y + c_2(t)\big]\frac{\partial w}{\partial y} + \big[s_1(t)x + s_2(t)y + p(t)\big]w.$$

Преобразование

$$w(x,y,t) = \exp\big[f_1(t)x + f_2(t)y + g(t)\big]u(\xi,\eta,t),\quad \xi = h_1(t)x + r_1(t),\quad \eta = h_2(t)y + r_2(t),$$

где

$$\begin{aligned}h_k(t) &= A_k\exp\Big[\int b_k(t)\,dt\Big],\\ f_k(t) &= h_k(t)\int\frac{s_k(t)}{h_k(t)}\,dt + B_kh_k(t),\\ r_k(t) &= \int\big[2a_k(t)f_k(t) + c_k(t)\big]h_k(t)\,dt + C_k,\\ g(t) &= \int\big[a_1(t)f_1^2(t) + a_2(t)f_2^2(t) + c_1(t)f_1(t) + c_2(t)f_2(t) + p(t)\big]\,dt + D,\end{aligned}$$

(A_k, B_k, C_k, D — произвольные постоянные; $k = 1$, 2) приводит к уравнению вида 2.3.2.4:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a_1(t)h_1^2(t)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + a_2(t)h_2^2(t)\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}.$$

6. $$\frac{\partial w}{\partial t} = a_1(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_2(t)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \big[b_1(t)x + c_1(t)\big]\frac{\partial w}{\partial x} + \big[b_2(t)y + c_2(t)\big]\frac{\partial w}{\partial y} + \big[s_1(t)x^2 + s_2(t)y^2 + p_1(t)x + p_2(t)y + q(t)\big]w.$$

Замена

$$w(x,y,t) = \exp\big[f_1(t)x^2 + f_2(t)y^2\big]u(x,y,t),$$

где функции $f_{1,2} = f_{1,2}(t)$ удовлетворяют уравнениям Риккати

$$\begin{aligned}f_1' &= 4a_1(t)f_1^2 + 2b_1(t)f_1 + s_1(t),\\ f_2' &= 4a_2(t)f_2^2 + 2b_2(t)f_2 + s_2(t),\end{aligned}$$

приводит к уравнению вида 2.3.2.5 для $u = u(x,y,t)$.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a_1(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_2(y)\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + b_1(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + b_2(y)\dfrac{\partial w}{\partial y} + \big[c_1(x) + c_2(y)\big]w + \Phi(x, y, t).$

Область: $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$. Различные краевые задачи:

$$\begin{aligned}
w &= f(x,y) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\
s_1\partial_x w - k_1 w &= g_1(y,t) && \text{при} \quad x = x_1 && \text{(граничное условие)},\\
s_2\partial_x w + k_2 w &= g_2(y,t) && \text{при} \quad x = x_2 && \text{(граничное условие)},\\
s_3\partial_y w - k_3 w &= g_3(x,t) && \text{при} \quad y = y_1 && \text{(граничное условие)},\\
s_4\partial_y w + k_4 w &= g_4(x,t) && \text{при} \quad y = y_2 && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Выбирая подходящим образом параметры s_n, k_n (n = 1, 2, 3, 4) можно получить первую, вторую, третью и смешанные краевые задачи. Для неограниченной области при $x_2 = \infty$ соответствующее граничное условие опускается (сказанное справедливо и для $x_1 = -\infty$, $y_1 = -\infty$ или $y_2 = \infty$).

Функция Грина допускает неполное разделение переменных, т. е. может быть представлена в виде произведения

$$G(x,y,\xi,\eta,t) = G_1(x,\xi,t)G_2(y,\eta,t).$$

Здесь $G_1 = G_1(x,\xi,t)$ и $G_2 = G_2(y,\eta,t)$ — вспомогательные функции Грина, которые определяются путем решения более простых одномерных задач с однородными граничными условиями:

$$\frac{\partial G_1}{\partial t} = a_1(x)\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} + b_1(x)\frac{\partial G_1}{\partial x} + c_1(x)G_1, \qquad \frac{\partial G_2}{\partial t} = a_2(y)\frac{\partial^2 G_2}{\partial y^2} + b_2(y)\frac{\partial G_2}{\partial y} + c_2(y)G_2,$$

$$\begin{aligned}
G_1 &= \delta(x-\xi) && \text{при} \quad t = 0, && G_2 = \delta(y-\eta) && \text{при} \quad t = 0,\\
s_1\partial_x G_1 - k_1 G_1 &= 0 && \text{при} \quad x = x_1, && s_3\partial_y G_2 - k_3 G_2 = 0 && \text{при} \quad y = y_1,\\
s_2\partial_x G_1 + k_2 G_1 &= 0 && \text{при} \quad x = x_2, && s_4\partial_y G_2 + k_4 G_2 = 0 && \text{при} \quad y = y_2,
\end{aligned}$$

где ξ и η — свободные параметры, $\delta(x)$ — дельта-функция.

Уравнение для G_1 совпадает с уравнением 1.8.6.5, которое приводится к уравнению из разд. 1.8.9 (там дана формула для функции Грина). В общем случае уравнение для G_2 только обозначениями отличается от уравнения для G_1.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2000 *b*).

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a_1(x,t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_2(y,t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + b_1(x,t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + b_2(y,t)\dfrac{\partial w}{\partial y} + \big[c_1(x,t) + c_2(y,t)\big]w + \Phi(x, y, t).$

Рассмотрим данное уравнение с начальным и граничными условиями, которые указаны для уравнения 2.3.2.7. Функция Грина этой задачи может быть представлена в виде произведения

$$G(x,y,\xi,\eta,t,\tau) = G_1(x,\xi,t,\tau)G_2(y,\eta,t,\tau).$$

Здесь $G_1 = G_1(x,\xi,t,\tau)$ и $G_2 = G_2(y,\eta,t,\tau)$ — вспомогательные функции Грина, которые определяются путем решения более простых одномерных задач с однородными граничными условиями:

$$\frac{\partial G_1}{\partial t} = a_1(x,t)\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} + b_1(x,t)\frac{\partial G_1}{\partial x} + c_1(x,t)G_1, \qquad \frac{\partial G_2}{\partial t} = a_2(y,t)\frac{\partial^2 G_2}{\partial y^2} + b_2(y,t)\frac{\partial G_2}{\partial y} + c_2(y,t)G_2,$$

$$\begin{aligned}
G_1 &= \delta(x-\xi) && \text{при} \quad t = \tau, && G_2 = \delta(y-\eta) && \text{при} \quad t = \tau,\\
s_1\partial_x G_1 - k_1 G_1 &= 0 && \text{при} \quad x = x_1, && s_3\partial_y G_2 - k_3 G_2 = 0 && \text{при} \quad y = y_1,\\
s_2\partial_x G_1 + k_2 G_1 &= 0 && \text{при} \quad x = x_2, && s_4\partial_y G_2 + k_4 G_2 = 0 && \text{при} \quad y = y_2,
\end{aligned}$$

где ξ, η, τ — свободные параметры, $\delta(x)$ — дельта-функция, $t \geqslant \tau$.

О решении различных краевых задач с помощью функции Грина см. в разд. 0.8.1.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2000 *b*).

3. Уравнения параболического типа с тремя и более пространственными переменными

3.1. Уравнение теплопроводности $\frac{\partial w}{\partial t} = a\Delta_3 w$

3.1.1. Задачи в декартовой системе координат

В прямоугольной декартовой системе координат уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right).$$

Оно описывает развитие трехмерных нестационарных процессов в неподвижных средах или твердых телах с постоянным коэффициентом температуропроводности. Аналогичное уравнение используется для анализа соответствующих трехмерных нестационарных массообменных процессов при постоянном коэффициенте диффузии.

3.1.1-1. Частные решения:

$$w(x,y,z,t) = A\exp\bigl[k_1x + k_2y + k_3z + (k_1^2+k_2^2+k_3^2)at\bigr],$$
$$w(x,y,z,t) = A\cos(k_1x + C_1)\cos(k_2y + C_2)\cos(k_3z + C_3)\exp\bigl[-(k_1^2+k_2^2+k_3^2)at\bigr],$$
$$w(x,y,z,t) = A\cos(k_1x + C_1)\cos(k_2y + C_2)\,\mathrm{sh}(k_3z + C_3)\exp\bigl[-(k_1^2+k_2^2-k_3^2)at\bigr],$$
$$w(x,y,z,t) = A\cos(k_1x + C_1)\cos(k_2y + C_2)\,\mathrm{ch}(k_3z + C_3)\exp\bigl[-(k_1^2+k_2^2-k_3^2)at\bigr],$$
$$w(x,y,z,t) = A\exp(-k_1x - k_2y - k_3z)\cos(k_1x - 2ak_1^2t)\cos(k_2y - 2ak_2^2t)\cos(k_3z - 2ak_3^2t),$$
$$w(x,y,z,t) = \frac{A}{(t-t_0)^{3/2}}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}{4a(t-t_0)}\right],$$
$$w(x,y,z,t) = A\,\mathrm{erf}\left(\frac{x-x_0}{2\sqrt{at}}\right)\mathrm{erf}\left(\frac{y-y_0}{2\sqrt{at}}\right)\mathrm{erf}\left(\frac{z-z_0}{2\sqrt{at}}\right),$$

где A, k_1, k_2, k_3, C_1, C_2, C_3, x_0, y_0, z_0, t_0 — произвольные постоянные.

Фундаментальное решение:

$$\mathscr{E}(x,y,z,t) = \frac{1}{8(\pi at)^{3/2}}\exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4at}\right).$$

3.1.1-2. Формулы для построения частных решений. Замечание о функциях Грина.

1°. Помимо обычных решений с разделяющимися переменными

$$w(x,y,z,t) = f_1(x)f_2(y)f_3(z)f_4(t)$$

данное уравнение имеет также более сложные решения в виде произведения

$$w(x,y,z,t) = u_1(x,t)u_2(y,t)u_3(z,t),$$

где функции $u_1 = u_1(x,t)$, $u_2 = u_2(y,t)$, $u_3 = u_3(y,t)$ являются решениями одномерных уравнений теплопроводности

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial u_2}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial u_3}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2},$$

которые рассматриваются в разд. 1.1.1.

2°. Пусть $w = w(x,y,z,t)$ — некоторое решение этого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = Aw(\pm\lambda x + C_1,\ \pm\lambda y + C_2,\ \pm\lambda z + C_3,\ \lambda^2 t + C_4),$$

$$w_2 = A\exp\bigl[\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)at\bigr]w(x + 2a\lambda_1 t,\ y + 2a\lambda_2 t,\ z + 2a\lambda_3 t,\ t);$$

$$w_3 = \frac{A}{|\delta + \beta t|^{3/2}}\exp\left[-\frac{\beta(x^2+y^2+z^2)}{4a(\delta+\beta t)}\right]w\left(\frac{x}{\delta+\beta t},\ \frac{y}{\delta+\beta t},\ \frac{z}{\delta+\beta t},\ \frac{\gamma+\lambda t}{\delta+\beta t}\right),\quad \lambda\delta - \beta\gamma = 1,$$

где A, C_1, C_2, C_3, C_4, λ, λ_1, λ_2, λ_3, β, δ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения. Знаки при λ в формуле для w_1 выбираются произвольно независимо друг от друга.

3°. Для трехмерных краевых задач, которые рассматриваются в разд. 3.1.1, функцию Грина можно представить в виде произведения

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) = G_1(x,\xi,t)G_2(y,\eta,t)G_3(z,\zeta,t),$$

где $G_1(x,\xi,t)$, $G_2(y,\eta,t)$, $G_3(z,\zeta,t)$ — функции Грина соответствующих одномерных краевых задач (эти функции приводятся в разд. 2.1.1 и 2.2.1).

Пример 1. Функция Грина смешанной краевой задачи для полубесконечного слоя ($-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$, $0 \leqslant z < l$), которая приведена в разд. 3.1.1-14, является произведением трех одномерных функций Грина из разд. 1.1.2-1 (задача Коши для $-\infty < x < \infty$), из разд. 1.1.2-2 (первая краевая задача для $0 \leqslant y < \infty$), из разд. 1.1.2-6 (вторая краевая задача для $0 \leqslant z < l$), в которых надо сделать очевидные переобозначения.

3.1.1-3. Область: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$. Задача Коши.

Задано начальное условие:

$$w = f(x,y,z) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Решение:

$$w(x,y,z,t) = \frac{1}{8(\pi a t)^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta,\zeta)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4at}\right]d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Пример 2. Начальная температура в области $|x| < x_0$, $|y| < y_0$, $|z| < z_0$ постоянна и равна w_1, а в области $|x| > x_0$, $|y| > y_0$, $|z| > z_0$ — соответственно w_2, т. е.

$$f(x,y,z) = \begin{cases} w_1 & \text{при } |x| < x_0,\ |y| < y_0,\ |z| < z_0, \\ w_2 & \text{при } |x| > x_0,\ |y| > y_0,\ |z| > z_0. \end{cases}$$

Решение:

$$w = \frac{1}{8}(w_1 - w_2)\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x_0 - x}{2\sqrt{at}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{x_0 + x}{2\sqrt{at}}\right)\right]\times$$
$$\times\left[\operatorname{erf}\left(\frac{y_0 - y}{2\sqrt{at}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{y_0 + y}{2\sqrt{at}}\right)\right]\left[\operatorname{erf}\left(\frac{z_0 - z}{2\sqrt{at}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{z_0 + z}{2\sqrt{at}}\right)\right] + w_2.$$

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 62).

3.1.1-4. Область: $0 \leqslant x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается полупространство. Заданы следующие условия:

$$w = f(x,y,z) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},$$
$$w = g(y,z,t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}.$$

Решение:

$$w(x,y,z,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} f(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta +$$
$$+ a\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(\eta,\zeta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\right]_{\xi=0} d\eta\,d\zeta\,d\tau,$$

где

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{8(\pi a t)^{3/2}}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right]\right\}\exp\left[-\frac{(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4at}\right].$$

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 364), А. Г. Бутковский (1979, стр. 155–156).

3.1.1-5. Область: $0 \leqslant x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$. Вторая краевая задача.

Рассматривается полупространство. Заданы следующие условия:

$$w = f(x,y,z) \quad \text{при} \quad t=0 \quad \text{(начальное условие)},$$
$$\partial_x w = g(y,z,t) \quad \text{при} \quad x=0 \quad \text{(граничное условие)}.$$

Решение:

$$w(x,y,z,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} f(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta -$$
$$- a\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(\eta,\zeta,\tau)G(x,y,z,0,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau,$$

где

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{8(\pi at)^{3/2}}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right]\right\}\exp\left[-\frac{(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4at}\right].$$

⊙ *Литература*: А. Г. Бутковский (1979, стр. 155).

3.1.1-6. Область: $0 \leqslant x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$. Третья краевая задача.

Рассматривается полупространство. Заданы следующие условия:

$$w = f(x,y,z) \quad \text{при} \quad t=0 \quad \text{(начальное условие)},$$
$$\partial_x w - kw = g(y,z,t) \quad \text{при} \quad x=0 \quad \text{(граничное условие)}.$$

Решение $w(x,y,z,t)$ определяется по формуле из разд. 3.1.1-5, где

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{8(\pi at)^{3/2}}\exp\left[-\frac{(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4at}\right]\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right] -\right.$$
$$\left. -2k\sqrt{\pi at}\,\exp\left[k^2at + k(x+\xi)\right]\operatorname{erfc}\left(\frac{x+\xi}{2\sqrt{at}} + k\sqrt{at}\right)\right\}.$$

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 364).

3.1.1-7. Область: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Первая краевая задача.

Рассматривается бесконечный слой. Заданы следующие условия:

$$w = f(x,y,z) \quad \text{при} \quad t=0 \quad \text{(начальное условие)},$$
$$w = g_1(x,y,t) \quad \text{при} \quad z=0 \quad \text{(граничное условие)},$$
$$w = g_2(x,y,t) \quad \text{при} \quad z=l \quad \text{(граничное условие)}.$$

Решение:

$$w(x,y,z,t) = \int_0^l\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta +$$
$$+ a\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_1(\xi,\eta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\right]_{\zeta=0} d\xi\,d\eta\,d\tau -$$
$$- a\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_2(\xi,\eta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\right]_{\zeta=l} d\xi\,d\eta\,d\tau,$$

где

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{2\pi alt}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4at}\right]\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi z}{l}\sin\frac{n\pi\zeta}{l}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2 at}{l^2}\right),$$

или

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{8(\pi at)^{3/2}}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4at}\right]\times$$
$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(2nl+z-\zeta)^2}{4at}\right] - \exp\left[-\frac{(2nl+z+\zeta)^2}{4at}\right]\right\}.$$

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 366), А. Г. Бутковский (1979, стр. 156).

3.1.1-8. Область: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Вторая краевая задача.

Рассматривается бесконечный слой. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x,y,z) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_z w &= g_1(x,y,t) && \text{при} \quad z = 0 && \text{(граничное условие)},\\ \partial_z w &= g_2(x,y,t) && \text{при} \quad z = l && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(x,y,z,t) = \int_0^l \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} & f(\xi,\eta,\zeta) G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta - \\ & - a \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\xi,\eta,\tau) G(x,y,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\, d\xi\, d\eta\, d\tau + \\ & + a \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_2(\xi,\eta,\tau) G(x,y,z,\xi,\eta,l,t-\tau)\, d\xi\, d\eta\, d\tau, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{4\pi a l t} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4at}\right] \times \\ \times \left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{n\pi z}{l} \cos\frac{n\pi\zeta}{l} \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 at}{l^2}\right)\right], \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi a t}\,)^3} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4at}\right] \times \\ \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{\exp\left[-\frac{(z-\zeta+2nl)^2}{4at}\right] + \exp\left[-\frac{(z+\zeta+2nl)^2}{4at}\right]\right\}. \end{aligned}$$

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 367), А. Г. Бутковский (1979, стр. 159).

3.1.1-9. Область: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Третья краевая задача.

Рассматривается бесконечный слой. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x,y,z) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_z w - k_1 w &= g_1(x,y,t) && \text{при} \quad z = 0 && \text{(граничное условие)},\\ \partial_z w + k_2 w &= g_2(x,y,t) && \text{при} \quad z = l && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(x,y,z,t)$ определяется по формуле из разд. 3.1.1-8, где

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{4\pi a t} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4at}\right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(z)\varphi_n(\zeta)}{\|\varphi_n\|^2} \exp(-a\mu_n^2 t),$$

$$\varphi_n(z) = \cos(\mu_n z) + \frac{k_1}{\mu_n}\sin(\mu_n z), \qquad \|\varphi_n\|^2 = \frac{k_2}{2\mu_n^2}\,\frac{\mu_n^2+k_1^2}{\mu_n^2+k_2^2} + \frac{k_1}{2\mu_n^2} + \frac{l}{2}\left(1 + \frac{k_1^2}{\mu_n^2}\right).$$

Здесь μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\dfrac{\operatorname{tg}(\mu l)}{\mu} = \dfrac{k_1+k_2}{\mu^2 - k_1 k_2}$.

3.1.1-10. Область: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Смешанная краевая задача.

Рассматривается бесконечный слой. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x,y,z) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(x,y,t) && \text{при} \quad z = 0 && \text{(граничное условие)},\\ \partial_z w &= g_2(x,y,t) && \text{при} \quad z = l && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,y,z,t) = \int_0^l \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta,\zeta) G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta +$$
$$+ a \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\xi,\eta,\tau) \Big[\frac{\partial}{\partial \zeta} G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\zeta=0} d\xi\, d\eta\, d\tau +$$
$$+ a \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_2(\xi,\eta,\tau) G(x,y,z,\xi,\eta,l,t-\tau)\, d\xi\, d\eta\, d\tau,$$

где

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{2\pi a l t} \exp\Big[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4at}\Big] \times$$
$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \sin\Big[\frac{(2n+1)\pi z}{2l}\Big] \sin\Big[\frac{(2n+1)\pi \zeta}{2l}\Big] \exp\Big[-\frac{(2n+1)^2\pi^2 a t}{4l^2}\Big],$$

или

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi a t}\,)^3} \exp\Big[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4at}\Big] \times$$
$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \Big\{\exp\Big[-\frac{(z-\zeta+2nl)^2}{4at}\Big] - \exp\Big[-\frac{(z+\zeta+2nl)^2}{4at}\Big]\Big\}.$$

⊙ *Литература*: А. Г. Бутковский (1979, стр. 158).

3.1.1-11. Область: $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Первая краевая задача.

Рассматривается полубесконечный слой. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x,y,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(x,z,t) &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)},\\ w &= g_2(x,y,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\ w &= g_3(x,y,t) &&\text{при}\quad z=l &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,y,z,t) = \int_0^l \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta,\zeta) G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta +$$
$$+ a \int_0^t \int_0^l \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\xi,\zeta,\tau) \Big[\frac{\partial}{\partial \eta} G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\eta=0} d\xi\, d\zeta\, d\tau +$$
$$+ a \int_0^t \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_2(\xi,\eta,\tau) \Big[\frac{\partial}{\partial \zeta} G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\zeta=0} d\xi\, d\eta\, d\tau -$$
$$- a \int_0^t \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_3(\xi,\eta,\tau) \Big[\frac{\partial}{\partial \zeta} G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\zeta=l} d\xi\, d\eta\, d\tau,$$

где

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{2\pi a l t} \exp\Big[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\Big] \Big\{\exp\Big[-\frac{(y-\eta)^2}{4at}\Big] - \exp\Big[-\frac{(y+\eta)^2}{4at}\Big]\Big\} \times$$
$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi z}{l} \sin\frac{n\pi \zeta}{l} \exp\Big(-\frac{n^2\pi^2 a t}{l^2}\Big).$$

3.1.1-12. Область: $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Вторая краевая задача.

Рассматривается полубесконечный слой. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x,y,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_y w &= g_1(x,z,t) &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_z w &= g_2(x,y,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_z w &= g_3(x,y,t) &&\text{при}\quad z=l &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,y,z,t) = \int_0^l \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\xi,\eta,\zeta) G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta -$$
$$- a\int_0^t \int_0^l \int_{-\infty}^\infty g_1(\xi,\zeta,\tau) G(x,y,z,\xi,0,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\tau -$$
$$- a\int_0^t \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty g_2(\xi,\eta,\tau) G(x,y,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau +$$
$$+ a\int_0^t \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty g_3(\xi,\eta,\tau) G(x,y,z,\xi,\eta,l,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau,$$

где

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{4\pi a l t} \exp\Bigl[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\Bigr] \Bigl\{\exp\Bigl[-\frac{(y-\eta)^2}{4at}\Bigr] + \exp\Bigl[-\frac{(y+\eta)^2}{4at}\Bigr]\Bigr\} \times$$
$$\times \biggl[1 + 2\sum_{n=1}^\infty \cos\frac{n\pi z}{l} \cos\frac{n\pi\zeta}{l} \exp\Bigl(-\frac{n^2\pi^2 a t}{l^2}\Bigr)\biggr].$$

3.1.1-13. Область: $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Третья краевая задача.

Рассматривается полубесконечный слой. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x,y,z) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_y w - k_1 w &= g_1(x,z,t) && \text{при} \quad y = 0 && \text{(граничное условие)},\\ \partial_z w - k_2 w &= g_2(x,y,t) && \text{при} \quad z = 0 && \text{(граничное условие)},\\ \partial_z w + k_3 w &= g_3(x,y,t) && \text{при} \quad z = l && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(x,y,z,t)$ определяется по формуле из разд. 3.1.1-12, где

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{4\pi a t} \exp\Bigl[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\Bigr] H(y,\eta,t) \sum_{n=1}^\infty \frac{\varphi_n(z)\varphi_n(\zeta)}{\|\varphi_n\|^2} \exp(-a\mu_n^2 t),$$

$$H(y,\eta,t) = \exp\Bigl[-\frac{(y-\eta)^2}{4at}\Bigr] + \exp\Bigl[-\frac{(y+\eta)^2}{4at}\Bigr] - 2k_1 \int_0^\infty \exp\Bigl[-\frac{(y+\eta+s)^2}{4at} - k_1 s\Bigr]\,ds.$$

Здесь

$$\varphi_n(z) = \cos(\mu_n z) + \frac{k_2}{\mu_n}\sin(\mu_n z), \qquad \|\varphi_n\|^2 = \frac{k_3}{2\mu_n^2}\,\frac{\mu_n^2 + k_2^2}{\mu_n^2 + k_3^2} + \frac{k_2}{2\mu_n^2} + \frac{l}{2}\Bigl(1 + \frac{k_2^2}{\mu_n^2}\Bigr);$$

μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\dfrac{\operatorname{tg}(\mu l)}{\mu} = \dfrac{k_2 + k_3}{\mu^2 - k_2 k_3}$.

3.1.1-14. Область: $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Смешанные краевые задачи.

1°. Рассматривается полубесконечный слой. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x,y,z) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(x,z,t) && \text{при} \quad y = 0 && \text{(граничное условие)},\\ \partial_z w &= g_2(x,y,t) && \text{при} \quad z = 0 && \text{(граничное условие)},\\ \partial_z w &= g_3(x,y,t) && \text{при} \quad z = l && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,y,z,t) = \int_0^l \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\xi,\eta,\zeta) G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta +$$
$$+ a\int_0^t \int_0^l \int_{-\infty}^\infty g_1(\xi,\zeta,\tau) \Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta} G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\eta=0} d\xi\,d\zeta\,d\tau -$$
$$- a\int_0^t \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty g_2(\xi,\eta,\tau) G(x,y,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau +$$
$$+ a\int_0^t \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty g_3(\xi,\eta,\tau) G(x,y,z,\xi,\eta,l,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau,$$

где

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)=\frac{1}{4\pi alt}\exp\Big[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\Big]\Big\{\exp\Big[-\frac{(y-\eta)^2}{4at}\Big]-\exp\Big[-\frac{(y+\eta)^2}{4at}\Big]\Big\}\times$$
$$\times\Big[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi z}{l}\cos\frac{n\pi\zeta}{l}\exp\Big(-\frac{n^2\pi^2at}{l^2}\Big)\Big].$$

2°. Рассматривается полубесконечный слой. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w&=f(x,y,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_y w&=g_1(x,z,t) &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)},\\ w&=g_2(x,y,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\ w&=g_3(x,y,t) &&\text{при}\quad z=l &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(x,y,z,t)&=\int_0^l\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta-\\ &-a\int_0^t\int_0^l\int_{-\infty}^{\infty}g_1(\xi,\zeta,\tau)G(x,y,z,\xi,0,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\tau+\\ &+a\int_0^t\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g_2(\xi,\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\zeta=0}d\xi\,d\eta\,d\tau-\\ &-a\int_0^t\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g_3(\xi,\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\zeta=l}d\xi\,d\eta\,d\tau, \end{aligned}$$

где

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)=\frac{1}{2\pi alt}\exp\Big[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\Big]\Big\{\exp\Big[-\frac{(y-\eta)^2}{4at}\Big]+\exp\Big[-\frac{(y+\eta)^2}{4at}\Big]\Big\}\times$$
$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi z}{l}\sin\frac{n\pi\zeta}{l}\exp\Big(-\frac{n^2\pi^2at}{l^2}\Big).$$

3.1.1-15. Область: $0\leqslant x<\infty$, $0\leqslant y<\infty$, $0\leqslant z<\infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается восьмая часть пространства. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w&=f(x,y,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ w&=g_1(y,z,t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\ w&=g_2(x,z,t) &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)},\\ w&=g_3(x,y,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(x,y,z,t)&=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)f(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta+\\ &+a\int_0^t\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}g_1(\eta,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\xi=0}d\eta\,d\zeta\,d\tau+\\ &+a\int_0^t\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}g_2(\xi,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\eta=0}d\xi\,d\zeta\,d\tau+\\ &+a\int_0^t\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}g_3(\xi,\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\zeta=0}d\xi\,d\eta\,d\tau, \end{aligned}$$

где

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)=\frac{1}{(2\sqrt{\pi at}\,)^3}H(x,\xi,t)H(y,\eta,t)H(z,\zeta,t),$$
$$H(x,\xi,t)=\exp\Big[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\Big]-\exp\Big[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\Big].$$

Пример 3. Начальная температура одинакова, $f(x,y,z) = w_0$. На гранях поддерживается нулевая температура, $g_1 = g_2 = g_3 = 0$.

Решение:

$$w = w_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{at}}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right).$$

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 183, 355).

3.1.1-16. Область: $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$, $0 \leqslant z < \infty$. Вторая краевая задача.

Рассматривается восьмая часть пространства. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x,y,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_x w &= g_1(y,z,t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_y w &= g_2(x,z,t) &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_z w &= g_3(x,y,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(x,y,z,t) = {}&\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) f(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta - \\ &- a\int_0^t\int_0^\infty\int_0^\infty g_1(\eta,\zeta,\tau) G(x,y,z,0,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau - \\ &- a\int_0^t\int_0^\infty\int_0^\infty g_2(\xi,\zeta,\tau) G(x,y,z,\xi,0,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\tau - \\ &- a\int_0^t\int_0^\infty\int_0^\infty g_3(\xi,\eta,\tau) G(x,y,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau, \end{aligned}$$

где

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi a t}\right)^3} H(x,\xi,t) H(y,\eta,t) H(z,\zeta,t),$$

$$H(x,\xi,t) = \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right].$$

3.1.1-17. Область: $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$, $0 \leqslant z < \infty$. Третья краевая задача.

Рассматривается восьмая часть пространства. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x,y,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_x w - k_1 w &= g_1(y,z,t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_y w - k_2 w &= g_2(x,z,t) &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_z w - k_3 w &= g_3(x,y,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(x,y,z,t)$ определяется по формуле из разд. 3.1.1-16, где

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi a t}\right)^3} H(x,\xi,t;k_1) H(y,\eta,t;k_2) H(z,\zeta,t;k_3),$$

$$\begin{aligned} H(x,\xi,t;k) = {}&\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right] - \\ &- 2k\sqrt{\pi a t}\,\exp\left[ak^2 t + k_1(x+\xi)\right] \operatorname{erfc}\left(\frac{x+\xi}{2\sqrt{at}} + k\sqrt{at}\right). \end{aligned}$$

Пример 4. Начальная температура одинакова, $f(x,y,z) = w_0$. Температура контактирующих сред равна нулю, $g_1 = g_2 = g_3 = 0$.

Решение:

$$\begin{aligned} w = w_0 &\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) + \exp(k_1 x + k_1^2 at) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}} + k_1\sqrt{at}\right)\right] \times \\ \times &\left[\operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{at}}\right) + \exp(k_2 y + k_2^2 at) \operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{at}} + k_2\sqrt{at}\right)\right] \times \\ \times &\left[\operatorname{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right) + \exp(k_3 z + k_3^2 at) \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{at}} + k_3\sqrt{at}\right)\right]. \end{aligned}$$

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 183).

3.1.1-18. Область: $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$, $0 \leqslant z < \infty$. Смешанные краевые задачи.

1°. Рассматривается восьмая часть пространства. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x,y,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(y,z,t) && \text{при} \quad x=0 && \text{(граничное условие)},\\ \partial_y w &= g_2(x,z,t) && \text{при} \quad y=0 && \text{(граничное условие)},\\ \partial_z w &= g_3(x,y,t) && \text{при} \quad z=0 && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(x,y,z,t) &= \int_0^\infty\!\int_0^\infty\!\int_0^\infty G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) f(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,+\\ &+a\int_0^t\!\int_0^\infty\!\int_0^\infty g_1(\eta,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\xi=0} d\eta\,d\zeta\,d\tau\,-\\ &-a\int_0^t\!\int_0^\infty\!\int_0^\infty g_2(\xi,\zeta,\tau)G(x,y,z,\xi,0,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\tau\,-\\ &-a\int_0^t\!\int_0^\infty\!\int_0^\infty g_3(\xi,\eta,\tau)G(x,y,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau, \end{aligned}$$

где

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi a t}\,)^3}\left\{\exp\Big[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\Big] - \exp\Big[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\Big]\right\}H(y,\eta,t)H(z,\zeta,t),$$

$$H(y,\eta,t) = \exp\Big[-\frac{(y-\eta)^2}{4at}\Big] + \exp\Big[-\frac{(y+\eta)^2}{4at}\Big].$$

2°. Рассматривается восьмая часть пространства. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x,y,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(y,z,t) && \text{при} \quad x=0 && \text{(граничное условие)},\\ w &= g_2(x,z,t) && \text{при} \quad y=0 && \text{(граничное условие)},\\ \partial_z w &= g_3(x,y,t) && \text{при} \quad z=0 && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(x,y,z,t) &= \int_0^\infty\!\int_0^\infty\!\int_0^\infty G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) f(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,+\\ &+a\int_0^t\!\int_0^\infty\!\int_0^\infty g_1(\eta,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\xi=0} d\eta\,d\zeta\,d\tau\,+\\ &+a\int_0^t\!\int_0^\infty\!\int_0^\infty g_2(\xi,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\eta=0} d\xi\,d\zeta\,d\tau\,-\\ &-a\int_0^t\!\int_0^\infty\!\int_0^\infty g_3(\xi,\eta,\tau)G(x,y,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau, \end{aligned}$$

где

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi a t}\,)^3}H(x,\xi,t)H(y,\eta,t)\left\{\exp\Big[-\frac{(z-\zeta)^2}{4at}\Big] + \exp\Big[-\frac{(z+\zeta)^2}{4at}\Big]\right\},$$

$$H(x,\xi,t) = \exp\Big[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\Big] - \exp\Big[-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\Big].$$

3.1.1-19. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, $-\infty < z < \infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается бесконечная цилиндрическая область прямоугольного сечения. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x,y,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(y,z,t) && \text{при} \quad x=0 && \text{(граничное условие)},\\ w &= g_2(y,z,t) && \text{при} \quad x=l_1 && \text{(граничное условие)},\\ w &= g_3(x,z,t) && \text{при} \quad y=0 && \text{(граничное условие)},\\ w &= g_4(x,z,t) && \text{при} \quad y=l_2 && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,y,z,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{l_2}\int_0^{l_1} f(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta +$$
$$+ a\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{l_2} g_1(\eta,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\xi=0} d\eta\,d\zeta\,d\tau -$$
$$- a\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{l_2} g_2(\eta,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\xi=l_1} d\eta\,d\zeta\,d\tau +$$
$$+ a\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{l_1} g_3(\xi,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\eta=0} d\xi\,d\zeta\,d\tau -$$
$$- a\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{l_1} g_4(\xi,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\eta=l_2} d\xi\,d\zeta\,d\tau,$$

где

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\exp\Big[-\frac{(z-\zeta)^2}{4at}\Big]H_1(x,\xi,t)H_2(y,\eta,t),$$
$$H_1(x,\xi,t) = \frac{2}{l_1}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\Big(\frac{\pi n x}{l_1}\Big)\sin\Big(\frac{\pi n\xi}{l_1}\Big)\exp\Big(-\frac{\pi^2 n^2 at}{l_1^2}\Big),$$
$$H_2(y,\eta,t) = \frac{2}{l_2}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\Big(\frac{\pi n y}{l_2}\Big)\sin\Big(\frac{\pi n\eta}{l_2}\Big)\exp\Big(-\frac{\pi^2 n^2 at}{l_2^2}\Big).$$

3.1.1-20. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1,\ 0 \leqslant y \leqslant l_2,\ -\infty < z < \infty$. Вторая краевая задача.

Рассматривается бесконечная цилиндрическая область прямоугольного сечения. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f(x,y,z) && \text{при}\quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_x w &= g_1(y,z,t) && \text{при}\quad x=0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_x w &= g_2(y,z,t) && \text{при}\quad x=l_1 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_3(x,z,t) && \text{при}\quad y=0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_4(x,z,t) && \text{при}\quad y=l_2 && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,y,z,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{l_2}\int_0^{l_1} f(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta -$$
$$- a\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{l_2} g_1(\eta,\zeta,\tau)G(x,y,z,0,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau +$$
$$+ a\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{l_2} g_2(\eta,\zeta,\tau)G(x,y,z,l_1,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau -$$
$$- a\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{l_1} g_3(\xi,\zeta,\tau)G(x,y,z,\xi,0,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\tau +$$
$$+ a\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{l_1} g_4(\xi,\zeta,\tau)G(x,y,z,\xi,l_2,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\tau,$$

где

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\exp\Big[-\frac{(z-\zeta)^2}{4at}\Big]H_1(x,\xi,t)H_2(y,\eta,t),$$
$$H_1(x,\xi,t) = \frac{1}{l_1}\Big[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\cos\Big(\frac{\pi n x}{l_1}\Big)\cos\Big(\frac{\pi n\xi}{l_1}\Big)\exp\Big(-\frac{\pi^2 n^2 at}{l_1^2}\Big)\Big],$$
$$H_2(y,\eta,t) = \frac{1}{l_2}\Big[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\cos\Big(\frac{\pi n y}{l_2}\Big)\cos\Big(\frac{\pi n\eta}{l_2}\Big)\exp\Big(-\frac{\pi^2 n^2 at}{l_2^2}\Big)\Big].$$

3.1.1-21. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, $-\infty < z < \infty$. Третья краевая задача.

Рассматривается бесконечная цилиндрическая область прямоугольного сечения. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f(x,y,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_x w - k_1 w &= g_1(y,z,t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_x w + k_2 w &= g_2(y,z,t) &&\text{при}\quad x=l_1 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_y w - k_3 w &= g_3(x,z,t) &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_y w + k_4 w &= g_4(x,z,t) &&\text{при}\quad y=l_2 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение $w(x,y,z,t)$ определяется по формуле из разд. 3.1.1-20, где

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \exp\biggl[-\frac{(z-\zeta)^2}{4at}\biggr] H_1(x,\xi,t) H_2(y,\eta,t),$$

$$H_1(x,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\|\varphi_n\|^2} \exp(-a\mu_n^2 t), \quad H_2(y,\eta,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\psi_m(y)\psi_m(\eta)}{\|\psi_m\|^2} \exp(-a\lambda_m^2 t).$$

Здесь

$$\varphi_n(x) = \cos(\mu_n x) + \frac{k_1}{\mu_n}\sin(\mu_n x), \qquad \|\varphi_n\|^2 = \frac{k_2}{2\mu_n^2}\,\frac{\mu_n^2+k_1^2}{\mu_n^2+k_2^2} + \frac{k_1}{2\mu_n^2} + \frac{l_1}{2}\Bigl(1+\frac{k_1^2}{\mu_n^2}\Bigr),$$

$$\psi_m(y) = \cos(\lambda_m y) + \frac{k_3}{\lambda_m}\sin(\lambda_m y), \qquad \|\psi_m\|^2 = \frac{k_4}{2\lambda_m^2}\,\frac{\lambda_m^2+k_3^2}{\lambda_m^2+k_4^2} + \frac{k_3}{2\lambda_m^2} + \frac{l_2}{2}\Bigl(1+\frac{k_3^2}{\lambda_m^2}\Bigr);$$

μ_n и λ_m — положительные корни трансцендентных уравнений

$$\frac{\operatorname{tg}(\mu l_1)}{\mu} = \frac{k_1+k_2}{\mu^2 - k_1 k_2}, \qquad \frac{\operatorname{tg}(\lambda l_2)}{\lambda} = \frac{k_3+k_4}{\lambda^2 - k_3 k_4}.$$

3.1.1-22. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, $-\infty < z < \infty$. Смешанная краевая задача.

Рассматривается бесконечная цилиндрическая область прямоугольного сечения. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f(x,y,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(y,z,t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(y,z,t) &&\text{при}\quad x=l_1 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_3(x,z,t) &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_4(x,z,t) &&\text{при}\quad y=l_2 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(x,y,z,t) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{l_2}\int_0^{l_1} f(\xi,\eta,\zeta) G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,+\\
&+ a\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{l_2} g_1(\eta,\zeta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=0} d\eta\,d\zeta\,d\tau\,-\\
&- a\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{l_2} g_2(\eta,\zeta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=l_1} d\eta\,d\zeta\,d\tau\,-\\
&- a\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{l_1} g_3(\xi,\zeta,\tau) G(x,y,z,\xi,0,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\tau\,+\\
&+ a\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{l_1} g_4(\xi,\zeta,\tau) G(x,y,z,\xi,l_2,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\tau,
\end{aligned}$$

где

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{2}{l_1 l_2\sqrt{\pi a t}} \exp\biggl[-\frac{(z-\zeta)^2}{4at}\biggr] \biggl[\sum_{n=1}^{\infty} \sin\Bigl(\frac{\pi n x}{l_1}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{\pi n \xi}{l_1}\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{\pi^2 n^2 a t}{l_1^2}\Bigr)\biggr] \times$$

$$\times \biggl[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos\Bigl(\frac{\pi m x}{l_2}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{\pi m \xi}{l_2}\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{\pi^2 m^2 a t}{l_2^2}\Bigr)\biggr].$$

3.1.1-23. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1,\ 0 \leqslant y \leqslant l_2,\ 0 \leqslant z < \infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается полубесконечная цилиндрическая область прямоугольного сечения. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
&w = f(x,y,z) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\
&w = g_1(y,z,t) && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)},\\
&w = g_2(y,z,t) && \text{при} \quad x = l_1 && \text{(граничное условие)},\\
&w = g_3(x,z,t) && \text{при} \quad y = 0 && \text{(граничное условие)},\\
&w = g_4(x,z,t) && \text{при} \quad y = l_2 && \text{(граничное условие)},\\
&w = g_5(x,y,t) && \text{при} \quad z = 0 && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(x,y,z,t) = {} & \int_0^\infty\!\int_0^{l_2}\!\int_0^{l_1} f(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\ + \\
& + a\int_0^t\!\int_0^\infty\!\int_0^{l_2} g_1(\eta,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\xi=0} d\eta\,d\zeta\,d\tau\ - \\
& - a\int_0^t\!\int_0^\infty\!\int_0^{l_2} g_2(\eta,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\xi=l_1} d\eta\,d\zeta\,d\tau\ + \\
& + a\int_0^t\!\int_0^\infty\!\int_0^{l_1} g_3(\xi,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\eta=0} d\xi\,d\zeta\,d\tau\ - \\
& - a\int_0^t\!\int_0^\infty\!\int_0^{l_1} g_4(\xi,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\eta=l_2} d\xi\,d\zeta\,d\tau\ + \\
& + a\int_0^t\!\int_0^{l_2}\!\int_0^{l_1} g_5(\xi,\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\zeta=0} d\xi\,d\eta\,d\tau,
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) &= G_1(x,\xi,t)G_2(y,\eta,t)G_3(z,\zeta,t),\\
G_1(x,\xi,t) &= \frac{2}{l_1}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\Big(\frac{\pi n x}{l_1}\Big)\sin\Big(\frac{\pi n\xi}{l_1}\Big)\exp\Big(-\frac{\pi^2 n^2 at}{l_1^2}\Big),\\
G_2(y,\eta,t) &= \frac{2}{l_2}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\Big(\frac{\pi n y}{l_2}\Big)\sin\Big(\frac{\pi n\eta}{l_2}\Big)\exp\Big(-\frac{\pi^2 n^2 at}{l_2^2}\Big),\\
G_3(z,\zeta,t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi at}}\left\{\exp\Big[-\frac{(z-\zeta)^2}{4at}\Big] - \exp\Big[-\frac{(z+\zeta)^2}{4at}\Big]\right\}.
\end{aligned}
$$

3.1.1-24. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1,\ 0 \leqslant y \leqslant l_2,\ 0 \leqslant z < \infty$. Вторая краевая задача.

Рассматривается полубесконечная цилиндрическая область прямоугольного сечения. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
&w = f(x,y,z) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\
&\partial_x w = g_1(y,z,t) && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)},\\
&\partial_x w = g_2(y,z,t) && \text{при} \quad x = l_1 && \text{(граничное условие)},\\
&\partial_y w = g_3(x,z,t) && \text{при} \quad y = 0 && \text{(граничное условие)},\\
&\partial_y w = g_4(x,z,t) && \text{при} \quad y = l_2 && \text{(граничное условие)},\\
&\partial_z w = g_5(x,y,t) && \text{при} \quad z = 0 && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$w(x,y,z,t)=\int_0^\infty\int_0^{l_2}\int_0^{l_1} f(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta-$$
$$-a\int_0^t\int_0^\infty\int_0^{l_2} g_1(\eta,\zeta,\tau)G(x,y,z,0,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau+$$
$$+a\int_0^t\int_0^\infty\int_0^{l_2} g_2(\eta,\zeta,\tau)G(x,y,z,l_1,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau-$$
$$-a\int_0^t\int_0^\infty\int_0^{l_1} g_3(\xi,\zeta,\tau)G(x,y,z,\xi,0,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\tau+$$
$$+a\int_0^t\int_0^\infty\int_0^{l_1} g_4(\xi,\zeta,\tau)G(x,y,z,\xi,l_2,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\tau-$$
$$-a\int_0^t\int_0^{l_2}\int_0^{l_1} g_5(\xi,\eta,\tau)G(x,y,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau,$$

где

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi at}}\left\{\exp\left[-\frac{(z-\zeta)^2}{4at}\right]+\exp\left[-\frac{(z+\zeta)^2}{4at}\right]\right\}H(x,\xi,t;l_1)H(y,\eta,t;l_2),$$
$$H(x,\xi,t;l)=\frac{1}{l}\left[1+2\sum_{n=1}^\infty\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right)\cos\left(\frac{\pi n\xi}{l}\right)\exp\left(-\frac{\pi^2n^2at}{l^2}\right)\right].$$

3.1.1-25. Область: $0\leqslant x\leqslant l_1,\ 0\leqslant y\leqslant l_2,\ 0\leqslant z<\infty$. Третья краевая задача.

Рассматривается полубесконечная цилиндрическая область прямоугольного сечения. Заданы следующие условия:

$$\begin{array}{rlll}
w=f(x,y,z) & \text{при} & t=0 & \text{(начальное условие)},\\
\partial_x w-k_1w=g_1(y,z,t) & \text{при} & x=0 & \text{(граничное условие)},\\
\partial_x w+k_2w=g_2(y,z,t) & \text{при} & x=l_1 & \text{(граничное условие)},\\
\partial_y w-k_3w=g_3(x,z,t) & \text{при} & y=0 & \text{(граничное условие)},\\
\partial_y w+k_4w=g_4(x,z,t) & \text{при} & y=l_2 & \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w-k_5w=g_5(x,y,t) & \text{при} & z=0 & \text{(граничное условие)}.
\end{array}$$

Решение $w(x,y,z,t)$ определяется по формуле из разд. 3.1.1-24, где

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)=H_1(x,\xi,t)H_2(y,\eta,t)H_3(z,\zeta,t),$$
$$H_3(z,\zeta,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi at}}\left\{\exp\left[-\frac{(z-\zeta)^2}{4at}\right]+\exp\left[-\frac{(z+\zeta)^2}{4at}\right]\right\}-$$
$$-k_5\exp\left[k_5^2at+k_5(z+\zeta)\right]\operatorname{erfc}\left(\frac{z+\zeta}{2\sqrt{at}}+k_5\sqrt{at}\right),$$

а функции $H_1(x,\xi,t)$ и $H_2(y,\eta,t)$ приведены в разд. 3.1.1-21.

3.1.1-26. Область: $0\leqslant x\leqslant l_1,\ 0\leqslant y\leqslant l_2,\ 0\leqslant z<\infty$. Смешанные краевые задачи.

1°. Рассматривается полубесконечная цилиндрическая область прямоугольного сечения. Заданы следующие условия:

$$\begin{array}{rlll}
w=f(x,y,z) & \text{при} & t=0 & \text{(начальное условие)},\\
w=g_1(y,z,t) & \text{при} & x=0 & \text{(граничное условие)},\\
w=g_2(y,z,t) & \text{при} & x=l_1 & \text{(граничное условие)},\\
w=g_3(x,z,t) & \text{при} & y=0 & \text{(граничное условие)},\\
w=g_4(x,z,t) & \text{при} & y=l_2 & \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w=g_5(x,y,t) & \text{при} & z=0 & \text{(граничное условие)}.
\end{array}$$

Решение:

$$w(x,y,z,t) = \int_0^\infty\int_0^{l_2}\int_0^{l_1} f(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta +$$
$$+ a\int_0^t\int_0^\infty\int_0^{l_2} g_1(\eta,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\xi=0}d\eta\,d\zeta\,d\tau -$$
$$- a\int_0^t\int_0^\infty\int_0^{l_2} g_2(\eta,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\xi=l_1}d\eta\,d\zeta\,d\tau +$$
$$+ a\int_0^t\int_0^\infty\int_0^{l_1} g_3(\xi,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\eta=0}d\xi\,d\zeta\,d\tau -$$
$$- a\int_0^t\int_0^\infty\int_0^{l_1} g_4(\xi,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\eta=l_2}d\xi\,d\zeta\,d\tau -$$
$$- a\int_0^t\int_0^{l_2}\int_0^{l_1} g_5(\xi,\eta,\tau)G(x,y,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau,$$

где

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}}\left\{\exp\Big[-\frac{(z-\zeta)^2}{4at}\Big] + \exp\Big[-\frac{(z+\zeta)^2}{4at}\Big]\right\}H(x,\xi,t;l_1)H(y,\eta,t;l_2),$$
$$H(x,\xi,t;l) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^\infty \sin\Big(\frac{\pi nx}{l}\Big)\sin\Big(\frac{\pi n\xi}{l}\Big)\exp\Big(-\frac{\pi^2n^2at}{l^2}\Big).$$

2°. Рассматривается полубесконечная цилиндрическая область прямоугольного сечения. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f(x,y,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_x w &= g_1(y,z,t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_x w &= g_2(y,z,t) &&\text{при}\quad x=l_1 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_3(x,z,t) &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_4(x,z,t) &&\text{при}\quad y=l_2 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_5(x,y,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,y,z,t) = \int_0^\infty\int_0^{l_2}\int_0^{l_1} f(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta -$$
$$- a\int_0^t\int_0^\infty\int_0^{l_2} g_1(\eta,\zeta,\tau)G(x,y,z,0,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau +$$
$$+ a\int_0^t\int_0^\infty\int_0^{l_2} g_2(\eta,\zeta,\tau)G(x,y,z,l_1,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau -$$
$$- a\int_0^t\int_0^\infty\int_0^{l_1} g_3(\xi,\zeta,\tau)G(x,y,z,\xi,0,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\tau +$$
$$+ a\int_0^t\int_0^\infty\int_0^{l_1} g_4(\xi,\zeta,\tau)G(x,y,z,\xi,l_2,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\tau +$$
$$+ a\int_0^t\int_0^{l_2}\int_0^{l_1} g_5(\xi,\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\zeta=0}d\xi\,d\eta\,d\tau,$$

где

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}}\left\{\exp\Big[-\frac{(z-\zeta)^2}{4at}\Big] - \exp\Big[-\frac{(z+\zeta)^2}{4at}\Big]\right\}H(x,\xi,t;l_1)H(y,\eta,t;l_2),$$
$$H(x,\xi,t;l) = \frac{1}{l}\Big[1 + 2\sum_{n=1}^\infty \cos\Big(\frac{\pi nx}{l}\Big)\cos\Big(\frac{\pi n\xi}{l}\Big)\exp\Big(-\frac{\pi^2n^2at}{l^2}\Big)\Big].$$

3.1.1-27. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, $0 \leqslant z \leqslant l_3$. Первая краевая задача.

Рассматривается прямоугольный параллелепипед. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f(x,y,z) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(y,z,t) && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(y,z,t) && \text{при} \quad x = l_1 && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_3(x,z,t) && \text{при} \quad y = 0 && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_4(x,z,t) && \text{при} \quad y = l_2 && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_5(x,y,t) && \text{при} \quad z = 0 && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_6(x,y,t) && \text{при} \quad z = l_3 && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(x,y,z,t) = {} & \int_0^{l_3}\!\int_0^{l_2}\!\int_0^{l_1} f(\xi,\eta,\zeta) G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta \,+ \\
& + a\int_0^t\!\int_0^{l_3}\!\int_0^{l_2} g_1(\eta,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi} G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\xi=0} d\eta\,d\zeta\,d\tau \,- \\
& - a\int_0^t\!\int_0^{l_3}\!\int_0^{l_2} g_2(\eta,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi} G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\xi=l_1} d\eta\,d\zeta\,d\tau \,+ \\
& + a\int_0^t\!\int_0^{l_3}\!\int_0^{l_1} g_3(\xi,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta} G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\eta=0} d\xi\,d\zeta\,d\tau \,- \\
& - a\int_0^t\!\int_0^{l_3}\!\int_0^{l_1} g_4(\xi,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta} G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\eta=l_2} d\xi\,d\zeta\,d\tau \,+ \\
& + a\int_0^t\!\int_0^{l_2}\!\int_0^{l_1} g_5(\xi,\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta} G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\zeta=0} d\xi\,d\eta\,d\tau \,- \\
& - a\int_0^t\!\int_0^{l_2}\!\int_0^{l_1} g_6(\xi,\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta} G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\zeta=l_3} d\xi\,d\eta\,d\tau,
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) &= G_1(x,\xi,t)G_2(y,\eta,t)G_3(z,\zeta,t),\\
G_1(x,\xi,t) &= \frac{2}{l_1}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\Big(\frac{\pi n x}{l_1}\Big)\sin\Big(\frac{\pi n \xi}{l_1}\Big)\exp\Big(-\frac{\pi^2 n^2 a t}{l_1^2}\Big),\\
G_2(y,\eta,t) &= \frac{2}{l_2}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\Big(\frac{\pi n y}{l_2}\Big)\sin\Big(\frac{\pi n \eta}{l_2}\Big)\exp\Big(-\frac{\pi^2 n^2 a t}{l_2^2}\Big),\\
G_3(z,\zeta,t) &= \frac{2}{l_3}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\Big(\frac{\pi n z}{l_3}\Big)\sin\Big(\frac{\pi n \zeta}{l_3}\Big)\exp\Big(-\frac{\pi^2 n^2 a t}{l_3^2}\Big).
\end{aligned}
$$

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 355), А. Г. Бутковский (1979, стр. 157).

3.1.1-28. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, $0 \leqslant z \leqslant l_3$. Вторая краевая задача.

Рассматривается прямоугольный параллелепипед. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f(x,y,z) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_x w &= g_1(y,z,t) && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_x w &= g_2(y,z,t) && \text{при} \quad x = l_1 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_3(x,z,t) && \text{при} \quad y = 0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_4(x,z,t) && \text{при} \quad y = l_2 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_5(x,y,t) && \text{при} \quad z = 0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_6(x,y,t) && \text{при} \quad z = l_3 && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(x,y,z,t) = &\int_0^{l_3}\int_0^{l_2}\int_0^{l_1} f(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta - \\
&- a\int_0^t\int_0^{l_3}\int_0^{l_2} g_1(\eta,\zeta,\tau)G(x,y,z,0,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau + \\
&+ a\int_0^t\int_0^{l_3}\int_0^{l_2} g_2(\eta,\zeta,\tau)G(x,y,z,l_1,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau - \\
&- a\int_0^t\int_0^{l_3}\int_0^{l_1} g_3(\xi,\zeta,\tau)G(x,y,z,\xi,0,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\tau + \\
&+ a\int_0^t\int_0^{l_3}\int_0^{l_1} g_4(\xi,\zeta,\tau)G(x,y,z,\xi,l_2,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\tau - \\
&- a\int_0^t\int_0^{l_2}\int_0^{l_1} g_5(\xi,\eta,\tau)G(x,y,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau + \\
&+ a\int_0^t\int_0^{l_2}\int_0^{l_1} g_6(\xi,\eta,\tau)G(x,y,z,\xi,\eta,l_3,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau,
\end{aligned}$$

где

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) = G_1(x,\xi,t)G_2(y,\eta,t)G_3(z,\zeta,t),$$

$$G_1(x,\xi,t) = \frac{1}{l_1}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi n x}{l_1}\right)\cos\left(\frac{\pi n \xi}{l_1}\right)\exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 a t}{l_1^2}\right)\right],$$

$$G_2(y,\eta,t) = \frac{1}{l_2}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi n y}{l_2}\right)\cos\left(\frac{\pi n \eta}{l_2}\right)\exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 a t}{l_2^2}\right)\right],$$

$$G_3(z,\zeta,t) = \frac{1}{l_3}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi n z}{l_3}\right)\cos\left(\frac{\pi n \zeta}{l_3}\right)\exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 a t}{l_3^2}\right)\right].$$

3.1.1-29. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, $0 \leqslant z \leqslant l_3$. Третья краевая задача.

Рассматривается прямоугольный параллелепипед. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f(x,y,z) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_x w - k_1 w &= g_1(y,z,t) && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_x w + k_2 w &= g_2(y,z,t) && \text{при} \quad x = l_1 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_y w - k_3 w &= g_3(x,z,t) && \text{при} \quad y = 0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_y w + k_4 w &= g_4(x,z,t) && \text{при} \quad y = l_2 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w - k_5 w &= g_5(x,y,t) && \text{при} \quad z = 0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w + k_6 w &= g_5(x,y,t) && \text{при} \quad z = 0 && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение $w(x,y,z,t)$ определяется по формуле из разд. 3.1.1-28, где

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) = H_1(x,\xi,t)H_2(y,\eta,t)H_3(z,\zeta,t).$$

Здесь функции $H_1(x,\xi,t)$ и $H_2(y,\eta,t)$ приведены в разд. 3.1.1-21, а функция $H_3(z,\zeta,t)$ описывается формулами

$$H_3(z,\zeta,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho_n(z)\rho_n(\zeta)}{\|\rho_n\|^2}\exp(-a\nu_n^2 t),$$

$$\rho_n(x) = \cos(\nu_n x) + \frac{k_5}{\nu_n}\sin(\nu_n x), \qquad \|\rho_n\|^2 = \frac{k_6}{2\nu_n^2}\,\frac{\nu_n^2 + k_5^2}{\nu_n^2 + k_6^2} + \frac{k_5}{2\nu_n^2} + \frac{l_3}{2}\left(1 + \frac{k_5^2}{\nu_n^2}\right),$$

где ν_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\dfrac{\operatorname{tg}(\nu l_3)}{\nu} = \dfrac{k_5 + k_6}{\nu^2 - k_5 k_6}$.

3.1.1-30. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, $0 \leqslant z \leqslant l_3$. Смешанные краевые задачи.

1°. Рассматривается прямоугольный параллелепипед. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f(x,y,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(y,z,t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(y,z,t) &&\text{при}\quad x=l_1 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_3(x,z,t) &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_4(x,z,t) &&\text{при}\quad y=l_2 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_5(x,y,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_6(x,y,t) &&\text{при}\quad z=l_3 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(x,y,z,t) = {}&\int_0^{l_3}\int_0^{l_2}\int_0^{l_1} f(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\, +\\
&+ a\int_0^t\int_0^{l_3}\int_0^{l_2} g_1(\eta,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\xi=0}d\eta\,d\zeta\,d\tau\, -\\
&- a\int_0^t\int_0^{l_3}\int_0^{l_2} g_2(\eta,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\xi=l_1}d\eta\,d\zeta\,d\tau\, +\\
&+ a\int_0^t\int_0^{l_3}\int_0^{l_1} g_3(\xi,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\eta=0}d\xi\,d\zeta\,d\tau\, -\\
&- a\int_0^t\int_0^{l_3}\int_0^{l_1} g_4(\xi,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\eta=l_2}d\xi\,d\zeta\,d\tau\, -\\
&- a\int_0^t\int_0^{l_2}\int_0^{l_1} g_5(\xi,\eta,\tau)G(x,y,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau\, +\\
&+ a\int_0^t\int_0^{l_2}\int_0^{l_1} g_6(\xi,\eta,\tau)G(x,y,z,\xi,\eta,l_3,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau,
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) = G_1(x,\xi,t)G_2(y,\eta,t)G_3(z,\zeta,t),\\
&G_1(x,\xi,t) = \frac{2}{l_1}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\Big(\frac{\pi n x}{l_1}\Big)\sin\Big(\frac{\pi n\xi}{l_1}\Big)\exp\Big(-\frac{\pi^2n^2at}{l_1^2}\Big),\\
&G_2(y,\eta,t) = \frac{2}{l_2}\sum_{k=1}^{\infty}\sin\Big(\frac{\pi k y}{l_2}\Big)\sin\Big(\frac{\pi k\eta}{l_2}\Big)\exp\Big(-\frac{\pi^2k^2at}{l_2^2}\Big),\\
&G_3(z,\zeta,t) = \frac{1}{l_3} + \frac{2}{l_3}\sum_{m=1}^{\infty}\cos\Big(\frac{\pi m z}{l_3}\Big)\cos\Big(\frac{\pi m\zeta}{l_3}\Big)\exp\Big(-\frac{\pi^2m^2at}{l_3^2}\Big).
\end{aligned}
$$

2°. Рассматривается прямоугольный параллелепипед. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f(x,y,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(y,z,t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(y,z,t) &&\text{при}\quad x=l_1 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_3(x,z,t) &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_4(x,z,t) &&\text{при}\quad y=l_2 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_5(x,y,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_6(x,y,t) &&\text{при}\quad z=l_3 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$w(x,y,z,t) = \int_0^{l_3}\int_0^{l_2}\int_0^{l_1} f(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta +$$
$$+ a\int_0^t\int_0^{l_3}\int_0^{l_2} g_1(\eta,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\xi=0} d\eta\,d\zeta\,d\tau -$$
$$- a\int_0^t\int_0^{l_3}\int_0^{l_2} g_2(\eta,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\xi=l_1} d\eta\,d\zeta\,d\tau -$$
$$- a\int_0^t\int_0^{l_3}\int_0^{l_2} g_3(\xi,\zeta,\tau)G(x,y,z,\xi,0,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\tau +$$
$$+ a\int_0^t\int_0^{l_3}\int_0^{l_1} g_4(\xi,\zeta,\tau)G(x,y,z,\xi,l_2,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\tau -$$
$$- a\int_0^t\int_0^{l_2}\int_0^{l_1} g_5(\xi,\eta,\tau)G(x,y,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau +$$
$$+ a\int_0^t\int_0^{l_2}\int_0^{l_1} g_6(\xi,\eta,\tau)G(x,y,z,\xi,\eta,l_3,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau,$$

где

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) = G_1(x,\xi,t)G_2(y,\eta,t)G_3(z,\zeta,t),$$
$$G_1(x,\xi,t) = \frac{2}{l_1}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\Big(\frac{\pi n x}{l_1}\Big)\sin\Big(\frac{\pi n\xi}{l_1}\Big)\exp\Big(-\frac{\pi^2 n^2 at}{l_1^2}\Big),$$
$$G_2(y,\eta,t) = \frac{1}{l_2} + \frac{2}{l_2}\sum_{k=1}^{\infty}\cos\Big(\frac{\pi k y}{l_2}\Big)\cos\Big(\frac{\pi k\eta}{l_2}\Big)\exp\Big(-\frac{\pi^2 k^2 at}{l_2^2}\Big),$$
$$G_3(z,\zeta,t) = \frac{1}{l_3} + \frac{2}{l_3}\sum_{m=1}^{\infty}\cos\Big(\frac{\pi m z}{l_3}\Big)\cos\Big(\frac{\pi m\zeta}{l_3}\Big)\exp\Big(-\frac{\pi^2 m^2 at}{l_3^2}\Big).$$

3.1.2. Задачи в цилиндрической системе координат

Уравнение теплопроводности в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\Big[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial w}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\Big], \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Оно используется для описания несимметричных нестационарных процессов в неподвижных средах или твердых телах с цилиндрическими и плоскими границами. Аналогичное уравнение используется для анализа соответствующих трехмерных нестационарных массообменных процессов при постоянном коэффициенте диффузии.

Одномерные задачи с осевой симметрией, имеющие решения $w = w(r,t)$, рассматриваются в разд. 1.2.1. Двумерные задачи, решение которых имеет вид $w = w(r,\varphi,t)$ и $w = w(r,z,t)$, исследуются в разд. 2.1.2 и 2.1.3.

3.1.2-1. Замечание о функциях Грина.

Для трехмерных краевых задач, которые рассматриваются в разд. 3.1.2, функцию Грина можно представить в виде произведения

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) = G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t)G_2(z,\zeta,t),$$

где $G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t)$ — функция Грина двумерной краевой задачи (эти функции приводятся в разд. 2.1.2), а $G_2(z,\zeta,t)$ — функция Грина соответствующей одномерной краевой задачи (эти функции приводятся в разд. 1.1.1 и 1.1.2).

Пример. Функция Грина первой краевой задачи для полубесконечного кругового цилиндра ($0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z < \infty$), которая приведена в разд. 3.1.2-5, является произведением двумерной функции Грина первой краевой задачи из разд. 2.1.2-2 ($0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$) и одномерной функции Грина первой краевой задачи из разд. 1.1.2-2 ($0 \leqslant z < \infty$), в которой надо сделать очевидные переобозначения.

Общие формулы, позволяющие получать решения основных краевых задач с помощью функции Грина, приведены в разд. 0.8.1.

3.1.2-2. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $-\infty < z < \infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается бесконечный круговой цилиндр. Заданы следующие условия:

$$w = f(r, \varphi, z) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},$$
$$w = g(\varphi, z, t) \quad \text{при} \quad r = R \quad \text{(граничное условие)}.$$

Решение:

$$w(r, \varphi, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi f(\xi, \eta, \zeta) G(r, \varphi, z, \xi, \eta, \zeta, t)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta -$$
$$- aR\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi} g(\eta, \zeta, \tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi} G(r, \varphi, z, \xi, \eta, \zeta, t - \tau)\Big]_{\xi=R} d\eta\, d\zeta\, d\tau.$$

Здесь

$$G(r, \varphi, z, \xi, \eta, \zeta, t) = G_1(r, \varphi, \xi, \eta, t) G_2(z, \zeta, t),$$
$$G_1(r, \varphi, \xi, \eta, t) = \frac{1}{\pi R^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_n}{[J_n'(\mu_{nm}R)]^2} J_n(\mu_{nm}r) J_n(\mu_{nm}\xi)\cos[n(\varphi - \eta)]\exp(-\mu_{nm}^2 at),$$
$$G_2(z, \zeta, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}}\exp\Big[-\frac{(z-\zeta)^2}{4at}\Big], \qquad A_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 2 & \text{при } n = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

где $J_n(\xi)$ — функции Бесселя (штрих означает производную по аргументу), μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_n(\mu R) = 0$.

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 99, 496).

3.1.2-3. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $-\infty < z < \infty$. Вторая краевая задача.

Рассматривается бесконечный круговой цилиндр. Заданы следующие условия:

$$w = f(r, \varphi, z) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},$$
$$\partial_r w = g(\varphi, z, t) \quad \text{при} \quad r = R \quad \text{(граничное условие)}.$$

Решение:

$$w(r, \varphi, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi f(\xi, \eta, \zeta) G(r, \varphi, z, \xi, \eta, \zeta, t)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta +$$
$$+ aR\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi} g(\eta, \zeta, \tau) G(r, \varphi, z, R, \eta, \zeta, t - \tau)\, d\eta\, d\zeta\, d\tau.$$

Здесь

$$G(r, \varphi, z, \xi, \eta, \zeta, t) = G_1(r, \varphi, \xi, \eta, t) G_2(z, \zeta, t),$$
$$G_1(r, \varphi, \xi, \eta, t) = \frac{1}{\pi R^2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_n\mu_{nm}^2 J_n(\mu_{nm}r) J_n(\mu_{nm}\xi)}{(\mu_{nm}^2 R^2 - n^2)[J_n(\mu_{nm}R)]^2}\cos[n(\varphi - \eta)]\exp(-\mu_{nm}^2 at),$$
$$G_2(z, \zeta, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}}\exp\Big[-\frac{(z-\zeta)^2}{4at}\Big], \qquad A_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 2 & \text{при } n = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

где $J_n(\xi)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_n'(\mu R) = 0$.

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 99, 496).

3.1.2-4. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $-\infty < z < \infty$. Третья краевая задача.

Рассматривается бесконечный круговой цилиндр. Заданы следующие условия:

$$w = f(r, \varphi, z) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},$$
$$\partial_r w + kw = g(\varphi, z, t) \quad \text{при} \quad r = R \quad \text{(граничное условие)}.$$

Решение $w(r,\varphi,z,t)$ определяется по формуле из разд. 3.1.2-3, где

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) = G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t)G_2(z,\zeta,t),$$

$$G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_n\mu_{nm}^2 J_n(\mu_{nm}r)J_n(\mu_{nm}\xi)}{(\mu_{nm}^2R^2+k^2R^2-n^2)[J_n(\mu_{nm}R)]^2}\cos\bigl[n(\varphi-\eta)\bigr]\exp(-\mu_{nm}^2 at),$$

$$G_2(z,\zeta,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\exp\Bigl[-\frac{(z-\zeta)^2}{4at}\Bigr],\qquad A_n = \begin{cases}1 & \text{при } n=0,\\ 2 & \text{при } n=1,\,2,\,\ldots\end{cases}$$

Здесь $J_n(\xi)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\mu J_n'(\mu R) + kJ_n(\mu R) = 0.$$

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 99, 496).

3.1.2-5. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z < \infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается полубесконечный круговой цилиндр. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r,\varphi,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(\varphi,z,t) && \text{при} \quad r=R && \text{(граничное условие)},\\ w &= g_2(r,\varphi,t) && \text{при} \quad z=0 && \text{(граничное условие)}.\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,\varphi,z,t) &= \int_0^\infty\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi f(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,-\\ &- aR\int_0^t\int_0^\infty\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=R}d\eta\,d\zeta\,d\tau\,+\\ &+ a\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi g_2(\xi,\eta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\zeta=0}d\xi\,d\eta\,d\tau.\end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) = G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t)G_2(z,\zeta,t),$$

$$G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{1}{\pi R^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_n}{[J_n'(\mu_{nm}R)]^2}J_n(\mu_{nm}r)J_n(\mu_{nm}\xi)\cos\bigl[n(\varphi-\eta)\bigr]\exp(-\mu_{nm}^2 at),$$

$$G_2(z,\zeta,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\Bigl\{\exp\Bigl[-\frac{(z-\zeta)^2}{4at}\Bigr]-\exp\Bigl[-\frac{(z+\zeta)^2}{4at}\Bigr]\Bigr\},\quad A_n = \begin{cases}1 & \text{при } n=0,\\ 2 & \text{при } n=1,\,2,\,\ldots,\end{cases}$$

где $J_n(\xi)$ — функции Бесселя (штрих означает производную по аргументу), μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_n(\mu R)=0$.

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 99, 496).

3.1.2-6. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z < \infty$. Вторая краевая задача.

Рассматривается полубесконечный круговой цилиндр. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r,\varphi,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_r w &= g_1(\varphi,z,t) && \text{при} \quad r=R && \text{(граничное условие)},\\ \partial_z w &= g_2(r,\varphi,t) && \text{при} \quad z=0 && \text{(граничное условие)}.\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,\varphi,z,t) &= \int_0^\infty\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi f(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,+\\ &+ aR\int_0^t\int_0^\infty\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,R,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau\,-\\ &- a\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi g_2(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau.\end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) = G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t)G_2(z,\zeta,t),$$

$$G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{1}{\pi R^2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_n\mu_{nm}^2 J_n(\mu_{nm}r)J_n(\mu_{nm}\xi)}{(\mu_{nm}^2R^2 - n^2)[J_n(\mu_{nm}R)]^2}\cos[n(\varphi-\eta)]\exp(-\mu_{nm}^2 at),$$

$$G_2(z,\zeta,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}}\left\{\exp\left[-\frac{(z-\zeta)^2}{4at}\right] + \exp\left[-\frac{(z+\zeta)^2}{4at}\right]\right\},\quad A_n = \begin{cases}1 & \text{при } n=0,\\ 2 & \text{при } n=1,\,2,\,\ldots,\end{cases}$$

где $J_n(\xi)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_n'(\mu R) = 0$.

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 99, 496).

3.1.2-7. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z < \infty$. Третья краевая задача.

Рассматривается полубесконечный круговой цилиндр. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r,\varphi,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_r w + k_1 w &= g(\varphi,z,t) && \text{при} \quad r=R && \text{(граничное условие)},\\ \partial_z w - k_2 w &= g_2(r,\varphi,t) && \text{при} \quad z=0 && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(r,\varphi,z,t)$ определяется по формуле из разд. 3.1.2-6, где

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) = G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t)G_2(z,\zeta,t),$$

$$G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_n\mu_{nm}^2 J_n(\mu_{nm}r)J_n(\mu_{nm}\xi)}{(\mu_{nm}^2R^2 + k_1^2R^2 - n^2)[J_n(\mu_{nm}R)]^2}\cos[n(\varphi-\eta)]\exp(-\mu_{nm}^2 at),$$

$$G_2(z,\zeta,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}}\left\{\exp\left[-\frac{(z-\zeta)^2}{4at}\right] + \exp\left[-\frac{(z+\zeta)^2}{4at}\right] - 2k_2\int_0^{\infty}\exp\left[-\frac{(z+\zeta+s)^2}{4at} - k_2 s\right]ds\right\}.$$

Здесь $A_0 = 1$, $A_n = 2$ при $n = 1,\,2,\,\ldots$; $J_n(\xi)$ — функции Бесселя; μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\mu J_n'(\mu R) + k_1 J_n(\mu R) = 0.$$

3.1.2-8. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z < \infty$. Смешанные краевые задачи.

1°. Рассматривается полубесконечный круговой цилиндр. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r,\varphi,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(\varphi,z,t) && \text{при} \quad r=R && \text{(граничное условие)},\\ \partial_z w &= g_2(r,\varphi,t) && \text{при} \quad z=0 && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,\varphi,z,t) &= \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi f(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,-\\ &- aR\int_0^t\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\right]_{\xi=R} d\eta\,d\zeta\,d\tau\,-\\ &- a\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi g_2(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau. \end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) = G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t)G_2(z,\zeta,t),$$

$$G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{1}{\pi R^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_n}{[J_n'(\mu_{nm}R)]^2}J_n(\mu_{nm}r)J_n(\mu_{nm}\xi)\cos[n(\varphi-\eta)]\exp(-\mu_{nm}^2 at),$$

$$G_2(z,\zeta,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}}\left\{\exp\left[-\frac{(z-\zeta)^2}{4at}\right] + \exp\left[-\frac{(z+\zeta)^2}{4at}\right]\right\},\quad A_n = \begin{cases}1 & \text{при } n=0,\\ 2 & \text{при } n=1,\,2,\,\ldots,\end{cases}$$

где $J_n(\xi)$ — функции Бесселя (штрих означает производную по аргументу), μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_n(\mu R) = 0$.

2°. Рассматривается полубесконечный круговой цилиндр. Заданы следующие условия:

$$\begin{array}{lll} w = f(r,\varphi,z) & \text{при} \quad t = 0 & \text{(начальное условие)}, \\ \partial_r w = g_1(\varphi,z,t) & \text{при} \quad r = R & \text{(граничное условие)}, \\ w = g_2(r,\varphi,t) & \text{при} \quad z = 0 & \text{(граничное условие)}. \end{array}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,\varphi,z,t) = &\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^R \xi f(\xi,\eta,\zeta) G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta + \\ &+ aR \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{2\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau) G(r,\varphi,z,R,\eta,\zeta,t-\tau)\, d\eta\, d\zeta\, d\tau + \\ &+ a \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^R \xi g_2(\xi,\eta,\tau) \Big[\frac{\partial}{\partial\zeta} G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\zeta=0} d\xi\, d\eta\, d\tau. \end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) = G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t) G_2(z,\zeta,t),$$

$$G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{1}{\pi R^2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=1}^\infty \frac{A_n \mu_{nm}^2 J_n(\mu_{nm} r) J_n(\mu_{nm}\xi)}{(\mu_{nm}^2 R^2 - n^2)[J_n(\mu_{nm} R)]^2} \cos\big[n(\varphi-\eta)\big] \exp(-\mu_{nm}^2 a t),$$

$$G_2(z,\zeta,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \left\{ \exp\Big[-\frac{(z-\zeta)^2}{4at}\Big] - \exp\Big[-\frac{(z+\zeta)^2}{4at}\Big] \right\}, \quad A_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 2 & \text{при } n = 1,\, 2,\, \dots, \end{cases}$$

где $J_n(\xi)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_n'(\mu R) = 0$.

3.1.2-9. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Первая краевая задача.

Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{array}{lll} w = f(r,\varphi,z) & \text{при} \quad t = 0 & \text{(начальное условие)}, \\ w = g_1(\varphi,z,t) & \text{при} \quad r = R & \text{(граничное условие)}, \\ w = g_2(r,\varphi,t) & \text{при} \quad z = 0 & \text{(граничное условие)}, \\ w = g_3(r,\varphi,t) & \text{при} \quad z = l & \text{(граничное условие)}. \end{array}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,\varphi,z,t) = &\int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^R \xi f(\xi,\eta,\zeta) G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta - \\ &- aR \int_0^t \int_0^l \int_0^{2\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau) \Big[\frac{\partial}{\partial\xi} G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\xi=R} d\eta\, d\zeta\, d\tau + \\ &+ a \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^R \xi g_2(\xi,\eta,\tau) \Big[\frac{\partial}{\partial\zeta} G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\zeta=0} d\xi\, d\eta\, d\tau - \\ &- a \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^R \xi g_3(\xi,\eta,\tau) \Big[\frac{\partial}{\partial\zeta} G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\zeta=l} d\xi\, d\eta\, d\tau. \end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) = G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t) G_2(z,\zeta,t),$$

$$G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{1}{\pi R^2} \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=1}^\infty \frac{A_n}{[J_n'(\mu_{nm} R)]^2} J_n(\mu_{nm} r) J_n(\mu_{nm}\xi) \cos\big[n(\varphi-\eta)\big] \exp(-\mu_{nm}^2 a t),$$

$$G_2(z,\zeta,t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^\infty \sin\Big(\frac{n\pi z}{l}\Big) \sin\Big(\frac{n\pi\zeta}{l}\Big) \exp\Big(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\Big), \quad A_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 2 & \text{при } n = 1,\, 2,\, \dots, \end{cases}$$

где $J_n(\xi)$ — функции Бесселя (штрих означает производную по аргументу), μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_n(\mu R) = 0$.

3.1.2-10. Область: $0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant z \leqslant l$. Вторая краевая задача.

Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f(r,\varphi,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_r w &= g_1(\varphi,z,t) && \text{при} \quad r=R && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_2(r,\varphi,t) && \text{при} \quad z=0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_3(r,\varphi,t) && \text{при} \quad z=l && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(r,\varphi,z,t) = &\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi f(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,+\\
&+aR\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,R,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau\,-\\
&-a\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi g_2(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau\,+\\
&+a\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi g_3(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,l,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau.
\end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) = G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t)G_2(z,\zeta,t),$$

$$G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{1}{\pi R^2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_n\mu_{nm}^2 J_n(\mu_{nm}r)J_n(\mu_{nm}\xi)}{(\mu_{nm}^2R^2-n^2)[J_n(\mu_{nm}R)]^2}\cos\bigl[n(\varphi-\eta)\bigr]\exp(-\mu_{nm}^2at),$$

$$G_2(z,\zeta,t) = \frac{1}{l}+\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\Bigl(\frac{n\pi x}{l}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{n\pi\xi}{l}\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{an^2\pi^2t}{l^2}\Bigr),\quad A_n = \begin{cases}1 & \text{при } n=0,\\ 2 & \text{при } n=1,\ 2,\ \ldots,\end{cases}$$

где $J_n(\xi)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_n'(\mu R)=0$.

3.1.2-11. Область: $0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant z \leqslant l$. Третья краевая задача.

Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f(r,\varphi,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_r w + k_1 w &= g(\varphi,z,t) && \text{при} \quad r=R && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w - k_2 w &= g_2(r,\varphi,t) && \text{при} \quad z=0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w + k_3 w &= g_3(r,\varphi,t) && \text{при} \quad z=l && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение $w(r,\varphi,z,t)$ определяется по формуле из разд. 3.1.2-10, где

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) = G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t)\sum_{s=1}^{\infty}\frac{h_s(z)h_s(\zeta)}{\|h_s\|^2}\exp(-a\lambda_s^2t),$$

$$G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_n\mu_{nm}^2 J_n(\mu_{nm}r)J_n(\mu_{nm}\xi)}{(\mu_{nm}^2R^2+k_1^2R^2-n^2)[J_n(\mu_{nm}R)]^2}\cos\bigl[n(\varphi-\eta)\bigr]\exp(-\mu_{nm}^2at),$$

$$h_s(z) = \cos(\lambda_s z)+\frac{k_2}{\lambda_s}\sin(\lambda_s z),\qquad \|h_s\|^2 = \frac{k_3}{2\lambda_s^2}\,\frac{\lambda_s^2+k_2^2}{\lambda_s^2+k_3^2}+\frac{k_2}{2\lambda_s^2}+\frac{l}{2}\Bigl(1+\frac{k_2^2}{\lambda_s^2}\Bigr).$$

Здесь $A_0=1$, $A_n=2$ при $n=1,\ 2,\ \ldots$; $J_n(\xi)$ — функции Бесселя; μ_{nm} и λ_s — положительные корни трансцендентных уравнений

$$\mu J_n'(\mu R)+k_1J_n(\mu R)=0,\qquad \frac{\operatorname{tg}(\lambda l)}{\lambda} = \frac{k_2+k_3}{\lambda^2-k_2k_3}.$$

3.1.2-12. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Смешанные краевые задачи.

1°. Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r,\varphi,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(\varphi,z,t) && \text{при} \quad r=R && \text{(граничное условие)},\\ \partial_z w &= g_2(r,\varphi,t) && \text{при} \quad z=0 && \text{(граничное условие)},\\ \partial_z w &= g_3(r,\varphi,t) && \text{при} \quad z=l && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,\varphi,z,t) = &\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi f(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\, - \\ &- aR\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\xi=R}d\eta\,d\zeta\,d\tau\, - \\ &- a\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi g_2(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau\, + \\ &+ a\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi g_3(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,l,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau. \end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) = G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t)G_2(z,\zeta,t),$$

$$G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{1}{\pi R^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_n}{[J_n'(\mu_{nm}R)]^2}J_n(\mu_{nm}r)J_n(\mu_{nm}\xi)\cos[n(\varphi-\eta)]\exp(-\mu_{nm}^2at),$$

$$G_2(z,\zeta,t) = \frac{1}{l}+\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\Big(\frac{n\pi z}{l}\Big)\cos\Big(\frac{n\pi\zeta}{l}\Big)\exp\Big(-\frac{an^2\pi^2t}{l^2}\Big),\qquad A_n = \begin{cases}1 & \text{при } n=0,\\ 2 & \text{при } n=1,\,2,\,\ldots,\end{cases}$$

где $J_n(\xi)$ — функции Бесселя (штрих означает производную по аргументу), μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_n(\mu R) = 0$.

2°. Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r,\varphi,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_r w &= g_1(\varphi,z,t) && \text{при} \quad r=R && \text{(граничное условие)},\\ w &= g_2(r,\varphi,t) && \text{при} \quad z=0 && \text{(граничное условие)},\\ w &= g_3(r,\varphi,t) && \text{при} \quad z=l && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,\varphi,z,t) = &\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi f(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\, + \\ &+ aR\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,R,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau\, + \\ &+ a\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi g_2(\xi,\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\zeta=0}d\xi\,d\eta\,d\tau\, - \\ &- a\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi g_3(\xi,\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\zeta=l}d\xi\,d\eta\,d\tau. \end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) = G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t)G_2(z,\zeta,t),$$

$$G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{1}{\pi R^2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_n\mu_{nm}^2J_n(\mu_{nm}r)J_n(\mu_{nm}\xi)}{(\mu_{nm}^2R^2-n^2)[J_n(\mu_{nm}R)]^2}\cos[n(\varphi-\eta)]\exp(-\mu_{nm}^2at),$$

$$G_2(z,\zeta,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\Big(\frac{n\pi z}{l}\Big)\sin\Big(\frac{n\pi\zeta}{l}\Big)\exp\Big(-\frac{an^2\pi^2t}{l^2}\Big),\qquad A_n = \begin{cases}1 & \text{при } n=0,\\ 2 & \text{при } n=1,\,2,\,\ldots,\end{cases}$$

где $J_n(\xi)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_n'(\mu R) = 0$.

3.1.2-13. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ -\infty < z < \infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается бесконечный полый круговой цилиндр. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} &w = f(r,\varphi,z) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ &w = g_1(\varphi,z,t) && \text{при} \quad r = R_1 && \text{(граничное условие)},\\ &w = g_2(\varphi,z,t) && \text{при} \quad r = R_2 && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,\varphi,z,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} f(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta \,+\\ + aR_1\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\xi=R_1}d\eta\,d\zeta\,d\tau \,-\\ - aR_2\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi} g_2(\eta,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\xi=R_2}d\eta\,d\zeta\,d\tau. \end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}}\exp\Big[-\frac{(z-\zeta)^2}{4at}\Big]G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t),$$

$$G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_nB_{nm}Z_n(\mu_{nm}r)Z_n(\mu_{nm}\xi)\cos\big[n(\varphi-\eta)\big]\exp(-\mu_{nm}^2at),$$

$$A_n = \begin{cases} 1/2 & \text{при } n=0,\\ 1 & \text{при } n\neq 0,\end{cases}\qquad B_{nm} = \frac{\mu_{nm}^2J_n^2(\mu_{nm}R_2)}{J_n^2(\mu_{nm}R_1)-J_n^2(\mu_{nm}R_2)},$$

$$Z_n(\mu_{nm}r) = J_n(\mu_{nm}R_1)Y_n(\mu_{nm}r) - Y_n(\mu_{nm}R_1)J_n(\mu_{nm}r),$$

где $J_n(r)$ и $Y_n(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_n(\mu R_1)Y_n(\mu R_2) - Y_n(\mu R_1)J_n(\mu R_2) = 0.$$

3.1.2-14. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ -\infty < z < \infty$. Вторая краевая задача.

Рассматривается бесконечный полый круговой цилиндр. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} &w = f(r,\varphi,z) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ &\partial_r w = g_1(\varphi,z,t) && \text{при} \quad r = R_1 && \text{(граничное условие)},\\ &\partial_r w = g_2(\varphi,z,t) && \text{при} \quad r = R_2 && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,\varphi,z,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} f(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta \,-\\ - aR_1\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,R_1,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau \,+\\ + aR_2\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi} g_2(\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,R_2,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau. \end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}}\exp\Big[-\frac{(z-\zeta)^2}{4at}\Big]G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t),$$

$$G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{1}{\pi(R_2^2-R_1^2)} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_n\mu_{nm}^2Z_n(\mu_{nm}r)Z_n(\mu_{nm}\xi)\cos\big[n(\varphi-\eta)\big]\exp(-\mu_{nm}^2at)}{(\mu_{nm}^2R_2^2-n^2)Z_n^2(\mu_{nm}R_2)-(\mu_{nm}^2R_1^2-n^2)Z_n^2(\mu_{nm}R_1)},$$

$$Z_n(\mu_{nm}r) = J_n'(\mu_{nm}R_1)Y_n(\mu_{nm}r) - Y_n'(\mu_{nm}R_1)J_n(\mu_{nm}r),$$

где $A_0 = 1$, $A_n = 2$ при $n = 1,\ 2,\ \ldots$; $J_n(r)$ и $Y_n(r)$ — функции Бесселя; μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_n'(\mu R_1)Y_n'(\mu R_2) - Y_n'(\mu R_1)J_n'(\mu R_2) = 0.$$

3.1.2-15. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $-\infty < z < \infty$. Третья краевая задача.

Рассматривается бесконечный полый круговой цилиндр. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_r w - k_1 w &= g_1(\varphi,z,t) &&\text{при}\quad r=R_1 &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_r w + k_2 w &= g_2(\varphi,z,t) &&\text{при}\quad r=R_2 &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(r,\varphi,z,t)$ дается формулами из разд. 3.1.2-14, где

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \exp\Bigl[-\frac{(z-\zeta)^2}{4at}\Bigr] G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t),$$

$$G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_n\mu_{nm}^2 Z_n(\mu_{nm}r)Z_n(\mu_{nm}\xi)\cos[n(\varphi-\eta)]\exp(-\mu_{nm}^2 at)}{(k_2^2R_2^2+\mu_{nm}^2R_2^2-n^2)Z_n^2(\mu_{nm}R_2)-(k_1^2R_1^2+\mu_{nm}^2R_1^2-n^2)Z_n^2(\mu_{nm}R_1)},$$

$$\begin{aligned} Z_n(\mu_{nm}r) = {}&\bigl[\mu_{nm}J_n'(\mu_{nm}R_1) - k_1 J_n(\mu_{nm}R_1)\bigr]Y_n(\mu_{nm}r) - \\ &- \bigl[\mu_{nm}Y_n'(\mu_{nm}R_1) - k_1 Y_n(\mu_{nm}R_1)\bigr]J_n(\mu_{nm}r). \end{aligned}$$

Здесь $A_0 = 1$, $A_n = 2$ при $n = 1, 2, \ldots$; $J_n(r)$ и $Y_n(r)$ — функции Бесселя; μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\begin{aligned} &\bigl[\mu J_n'(\mu R_1) - k_1 J_n(\mu R_1)\bigr]\bigl[\mu Y_n'(\mu R_2) + k_2 Y_n(\mu R_2)\bigr] = \\ &\qquad = \bigl[\mu Y_n'(\mu R_1) - k_1 Y_n(\mu R_1)\bigr]\bigl[\mu J_n'(\mu R_2) + k_2 J_n(\mu R_2)\bigr]. \end{aligned}$$

3.1.2-16. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z < \infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается полубесконечный полый круговой цилиндр. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(\varphi,z,t) &&\text{при}\quad r=R_1 &&\text{(граничное условие)},\\ w &= g_2(\varphi,z,t) &&\text{при}\quad r=R_2 &&\text{(граничное условие)},\\ w &= g_3(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,\varphi,z,t) = {}&\int_0^\infty\!\int_0^{2\pi}\!\int_{R_1}^{R_2} f(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta + \\ &+ aR_1\int_0^t\!\int_0^\infty\!\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=R_1} d\eta\,d\zeta\,d\tau - \\ &- aR_2\int_0^t\!\int_0^\infty\!\int_0^{2\pi} g_2(\eta,\zeta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=R_2} d\eta\,d\zeta\,d\tau + \\ &+ a\int_0^t\!\int_0^{2\pi}\!\int_{R_1}^{R_2} g_3(\xi,\eta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\zeta=0}\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau. \end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\Bigl\{\exp\Bigl[-\frac{(z-\zeta)^2}{4at}\Bigr] - \exp\Bigl[-\frac{(z+\zeta)^2}{4at}\Bigr]\Bigr\} G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t),$$

$$G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_n B_{nm} Z_n(\mu_{nm}r)Z_n(\mu_{nm}\xi)\cos[n(\varphi-\eta)]\exp(-\mu_{nm}^2 at),$$

$$A_n = \begin{cases} 1/2 & \text{при}\ n=0,\\ 1 & \text{при}\ n\neq 0,\end{cases}\qquad B_{nm} = \frac{\mu_{nm}^2 J_n^2(\mu_{nm}R_2)}{J_n^2(\mu_{nm}R_1) - J_n^2(\mu_{nm}R_2)},$$

$$Z_n(\mu_{nm}r) = J_n(\mu_{nm}R_1)Y_n(\mu_{nm}r) - Y_n(\mu_{nm}R_1)J_n(\mu_{nm}r),$$

где $J_n(r)$ и $Y_n(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_n(\mu R_1)Y_n(\mu R_2) - Y_n(\mu R_1)J_n(\mu R_2) = 0.$$

3.1.2-17. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z < \infty$. Вторая краевая задача.

Рассматривается полубесконечный полый круговой цилиндр. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r,\varphi,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_r w &= g_1(\varphi,z,t) && \text{при} \quad r=R_1 && \text{(граничное условие)},\\ \partial_r w &= g_2(\varphi,z,t) && \text{при} \quad r=R_2 && \text{(граничное условие)},\\ \partial_z w &= g_3(r,\varphi,t) && \text{при} \quad z=0 && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,\varphi,z,t) = {}& \int_0^\infty\!\int_0^{2\pi}\!\int_{R_1}^{R_2} f(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,-\\ &- aR_1\int_0^t\!\int_0^\infty\!\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,R_1,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau\,+\\ &+ aR_2\int_0^t\!\int_0^\infty\!\int_0^{2\pi} g_2(\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,R_2,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau\,-\\ &- a\int_0^t\!\int_0^{2\pi}\!\int_{R_1}^{R_2} g_3(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau. \end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi at}}\left\{\exp\left[-\frac{(z-\zeta)^2}{4at}\right]+\exp\left[-\frac{(z+\zeta)^2}{4at}\right]\right\}G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t),$$

$$G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t)=\frac{1}{\pi(R_2^2-R_1^2)}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_n\mu_{nm}^2 Z_n(\mu_{nm}r)Z_n(\mu_{nm}\xi)\cos[n(\varphi-\eta)]\exp(-\mu_{nm}^2 at)}{(\mu_{nm}^2R_2^2-n^2)Z_n^2(\mu_{nm}R_2)-(\mu_{nm}^2R_1^2-n^2)Z_n^2(\mu_{nm}R_1)},$$

$$Z_n(\mu_{nm}r)=J_n'(\mu_{nm}R_1)Y_n(\mu_{nm}r)-Y_n'(\mu_{nm}R_1)J_n(\mu_{nm}r),$$

где $A_0=1$, $A_n=2$ при $n=1,\,2,\,\ldots$; $J_n(r)$ и $Y_n(r)$ — функции Бесселя; μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_n'(\mu R_1)Y_n'(\mu R_2)-Y_n'(\mu R_1)J_n'(\mu R_2)=0.$$

3.1.2-18. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z < \infty$. Третья краевая задача.

Рассматривается полубесконечный полый круговой цилиндр. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r,\varphi,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_r w - k_1 w &= g_1(\varphi,z,t) && \text{при} \quad r=R_1 && \text{(граничное условие)},\\ \partial_r w + k_2 w &= g_2(\varphi,z,t) && \text{при} \quad r=R_2 && \text{(граничное условие)},\\ \partial_z w - k_3 w &= g_3(r,\varphi,t) && \text{при} \quad z=0 && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(r,\varphi,z,t)$ определяется по формуле из разд. 3.1.2-17, где

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)=G_1(z,\zeta,t)G_2(r,\varphi,\xi,\eta,t),$$

$$G_1(z,\zeta,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi at}}\left\{\exp\left[-\frac{(z-\zeta)^2}{4at}\right]+\exp\left[-\frac{(z+\zeta)^2}{4at}\right]-2k_3\int_0^\infty\exp\left[-\frac{(z+\zeta+s)^2}{4at}-k_3 s\right]ds\right\},$$

$$G_2(r,\varphi,\xi,\eta,t)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_n\mu_{nm}^2 Z_n(\mu_{nm}r)Z_n(\mu_{nm}\xi)\cos[n(\varphi-\eta)]\exp(-\mu_{nm}^2 at)}{(k_2^2R_2^2+\mu_{nm}^2R_2^2-n^2)Z_n^2(\mu_{nm}R_2)-(k_1^2R_1^2+\mu_{nm}^2R_1^2-n^2)Z_n^2(\mu_{nm}R_1)},$$

$$\begin{aligned} Z_n(\mu_{nm}r)={}&\bigl[\mu_{nm}J_n'(\mu_{nm}R_1)-k_1J_n(\mu_{nm}R_1)\bigr]Y_n(\mu_{nm}r)-\\ &-\bigl[\mu_{nm}Y_n'(\mu_{nm}R_1)-k_1Y_n(\mu_{nm}R_1)\bigr]J_n(\mu_{nm}r). \end{aligned}$$

Здесь $A_0=1$, $A_n=2$ при $n=1,\,2,\,\ldots$; $J_n(r)$ и $Y_n(r)$ — функции Бесселя; μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\begin{aligned} \bigl[\mu J_n'(\mu R_1)-k_1J_n(\mu R_1)\bigr]\bigl[\mu Y_n'(\mu R_2)+k_2Y_n(\mu R_2)\bigr] &=\\ =\bigl[\mu Y_n'(\mu R_1)-k_1Y_n(\mu R_1)\bigr]\bigl[\mu J_n'(\mu R_2)+k_2J_n(\mu R_2)\bigr]&. \end{aligned}$$

3.1.2-19. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z < \infty$. Смешанные краевые задачи.

1°. Рассматривается полубесконечный полый круговой цилиндр. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r,\varphi,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(\varphi,z,t) && \text{при} \quad r=R_1 && \text{(граничное условие)},\\ w &= g_2(\varphi,z,t) && \text{при} \quad r=R_2 && \text{(граничное условие)},\\ \partial_z w &= g_3(r,\varphi,t) && \text{при} \quad z=0 && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,\varphi,z,t) &= \int_0^\infty\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} f(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,+\\ &+aR_1\int_0^t\int_0^\infty\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=R_1}d\eta\,d\zeta\,d\tau\,-\\ &-aR_2\int_0^t\int_0^\infty\int_0^{2\pi} g_2(\eta,\zeta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=R_2}d\eta\,d\zeta\,d\tau\,-\\ &-a\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} g_3(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau. \end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\biggl\{\exp\Bigl[-\frac{(z-\zeta)^2}{4at}\Bigr]+\exp\Bigl[-\frac{(z+\zeta)^2}{4at}\Bigr]\biggr\}G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t),$$

$$G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^\infty\sum_{m=1}^\infty A_n B_{nm} Z_n(\mu_{nm}r)Z_n(\mu_{nm}\xi)\cos\bigl[n(\varphi-\eta)\bigr]\exp(-\mu_{nm}^2 at),$$

$$A_n = \begin{cases} 1/2 & \text{при} \quad n=0,\\ 1 & \text{при} \quad n\neq 0,\end{cases}\qquad B_{nm} = \frac{\mu_{nm}^2 J_n^2(\mu_{nm}R_2)}{J_n^2(\mu_{nm}R_1)-J_n^2(\mu_{nm}R_2)},$$

$$Z_n(\mu_{nm}r) = J_n(\mu_{nm}R_1)Y_n(\mu_{nm}r)-Y_n(\mu_{nm}R_1)J_n(\mu_{nm}r),$$

где $J_n(r)$ и $Y_n(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_n(\mu R_1)Y_n(\mu R_2)-Y_n(\mu R_1)J_n(\mu R_2) = 0.$$

2°. Рассматривается полубесконечный полый круговой цилиндр. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r,\varphi,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_r w &= g_1(\varphi,z,t) && \text{при} \quad r=R_1 && \text{(граничное условие)},\\ \partial_r w &= g_2(\varphi,z,t) && \text{при} \quad r=R_2 && \text{(граничное условие)},\\ w &= g_3(r,\varphi,t) && \text{при} \quad z=0 && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,\varphi,z,t) &= \int_0^\infty\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} f(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,-\\ &-aR_1\int_0^t\int_0^\infty\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,R_1,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau\,+\\ &+aR_2\int_0^t\int_0^\infty\int_0^{2\pi} g_2(\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,R_2,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau\,+\\ &+a\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} g_3(\xi,\eta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\zeta=0}\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau. \end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\biggl\{\exp\Bigl[-\frac{(z-\zeta)^2}{4at}\Bigr]-\exp\Bigl[-\frac{(z+\zeta)^2}{4at}\Bigr]\biggr\}G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t),$$

$$G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{1}{\pi(R_2^2-R_1^2)}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^\infty\sum_{m=1}^\infty \frac{A_n\mu_{nm}^2 Z_n(\mu_{nm}r)Z_n(\mu_{nm}\xi)\cos\bigl[n(\varphi-\eta)\bigr]\exp(-\mu_{nm}^2 at)}{(\mu_{nm}^2R_2^2-n^2)Z_n^2(\mu_{nm}R_2)-(\mu_{nm}^2R_1^2-n^2)Z_n^2(\mu_{nm}R_1)},$$

$$Z_n(\mu_{nm}r) = J_n'(\mu_{nm}R_1)Y_n(\mu_{nm}r)-Y_n'(\mu_{nm}R_1)J_n(\mu_{nm}r),$$

где $A_0 = 1$, $A_n = 2$ при $n = 1, 2, \ldots$; $J_n(r)$ и $Y_n(r)$ — функции Бесселя; μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_n'(\mu R_1)Y_n'(\mu R_2) - Y_n'(\mu R_1)J_n'(\mu R_2) = 0.$$

3.1.2-20. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Первая краевая задача.

Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
&w = f(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\
&w = g_1(\varphi,z,t) &&\text{при}\quad r = R_1 &&\text{(граничное условие)},\\
&w = g_2(\varphi,z,t) &&\text{при}\quad r = R_2 &&\text{(граничное условие)},\\
&w = g_3(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z = 0 &&\text{(граничное условие)},\\
&w = g_4(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z = l &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(r,\varphi,z,t) &= \int_0^l\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} f(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,+\\
&+ aR_1\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\xi=R_1} d\eta\,d\zeta\,d\tau\,-\\
&- aR_2\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi} g_2(\eta,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\xi=R_2} d\eta\,d\zeta\,d\tau\,+\\
&+ a\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} g_3(\xi,\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\zeta=0}\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau\,-\\
&- a\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} g_4(\xi,\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\zeta=l}\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{gathered}
G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) = G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t)\Big[\frac{2}{l}\sum_{n=1}^\infty \sin\Big(\frac{n\pi z}{l}\Big)\sin\Big(\frac{n\pi\zeta}{l}\Big)\exp\Big(-\frac{an^2\pi^2t}{l^2}\Big)\Big],\\
G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^\infty\sum_{m=1}^\infty A_nB_{nm}Z_n(\mu_{nm}r)Z_n(\mu_{nm}\xi)\cos\big[n(\varphi-\eta)\big]\exp(-\mu_{nm}^2at),\\
A_n = \begin{cases}1/2 & \text{при}\ n=0,\\ 1 & \text{при}\ n\neq 0,\end{cases}\qquad B_{nm} = \frac{\mu_{nm}^2J_n^2(\mu_{nm}R_2)}{J_n^2(\mu_{nm}R_1) - J_n^2(\mu_{nm}R_2)},\\
Z_n(\mu_{nm}r) = J_n(\mu_{nm}R_1)Y_n(\mu_{nm}r) - Y_n(\mu_{nm}R_1)J_n(\mu_{nm}r),
\end{gathered}$$

где $J_n(r)$ и $Y_n(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_n(\mu R_1)Y_n(\mu R_2) - Y_n(\mu R_1)J_n(\mu R_2) = 0.$$

3.1.2-21. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Вторая краевая задача.

Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
&w = f(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\
&\partial_r w = g_1(\varphi,z,t) &&\text{при}\quad r = R_1 &&\text{(граничное условие)},\\
&\partial_r w = g_2(\varphi,z,t) &&\text{при}\quad r = R_2 &&\text{(граничное условие)},\\
&\partial_z w = g_3(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z = 0 &&\text{(граничное условие)},\\
&\partial_z w = g_4(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z = l &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,\varphi,z,t) = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} f(\xi,\eta,\zeta) G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta -$$
$$- aR_1 \int_0^t \int_0^l \int_0^{2\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau) G(r,\varphi,z,R_1,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau +$$
$$+ aR_2 \int_0^t \int_0^l \int_0^{2\pi} g_2(\eta,\zeta,\tau) G(r,\varphi,z,R_2,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau -$$
$$- a \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} g_3(\xi,\eta,\tau) G(r,\varphi,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau +$$
$$+ a \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} g_4(\xi,\eta,\tau) G(r,\varphi,z,\xi,\eta,l,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) = G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t)\left[\frac{1}{l} + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi z}{l}\right)\cos\left(\frac{n\pi\zeta}{l}\right)\exp\left(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\right)\right],$$

$$G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{1}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_n\mu_{nm}^2 Z_n(\mu_{nm}r) Z_n(\mu_{nm}\xi)\cos[n(\varphi-\eta)]\exp(-\mu_{nm}^2 at)}{(\mu_{nm}^2R_2^2 - n^2)Z_n^2(\mu_{nm}R_2) - (\mu_{nm}^2R_1^2 - n^2)Z_n^2(\mu_{nm}R_1)},$$

$$Z_n(\mu_{nm}r) = J_n'(\mu_{nm}R_1)Y_n(\mu_{nm}r) - Y_n'(\mu_{nm}R_1)J_n(\mu_{nm}r),$$

где $A_0 = 1$, $A_n = 2$ при $n = 1,\ 2,\ \ldots$; $J_n(r)$ и $Y_n(r)$ — функции Бесселя; μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_n'(\mu R_1)Y_n'(\mu R_2) - Y_n'(\mu R_1)J_n'(\mu R_2) = 0.$$

3.1.2-22. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Третья краевая задача.

Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_r w - k_1 w &= g_1(\varphi,z,t) &&\text{при}\quad r = R_1 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_r w + k_2 w &= g_2(\varphi,z,t) &&\text{при}\quad r = R_2 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w - k_3 w &= g_3(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z = 0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w + k_4 w &= g_4(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z = l &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение $w(r,\varphi,z,t)$ определяется по формуле из разд. 3.1.2-21, где

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) = G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t)G_2(z,\zeta,t).$$

Здесь первый сомножитель имеет вид

$$G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_n\mu_{nm}^2 Z_n(\mu_{nm}r)Z_n(\mu_{nm}\xi)\cos[n(\varphi-\eta)]\exp(-\mu_{nm}^2 at)}{(k_2^2R_2^2 + \mu_{nm}^2R_2^2 - n^2)Z_n^2(\mu_{nm}R_2) - (k_1^2R_1^2 + \mu_{nm}^2R_1^2 - n^2)Z_n^2(\mu_{nm}R_1)},$$

$$Z_n(\mu_{nm}r) = \left[\mu_{nm}J_n'(\mu_{nm}R_1) - k_1J_n(\mu_{nm}R_1)\right]Y_n(\mu_{nm}r) -$$
$$- \left[\mu_{nm}Y_n'(\mu_{nm}R_1) - k_1Y_n(\mu_{nm}R_1)\right]J_n(\mu_{nm}r),$$

где $A_0 = 1$, $A_n = 2$ при $n = 1,\ 2,\ \ldots$; $J_n(r)$ и $Y_n(r)$ — функции Бесселя; μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\left[\mu J_n'(\mu R_1) - k_1J_n(\mu R_1)\right]\left[\mu Y_n'(\mu R_2) + k_2Y_n(\mu R_2)\right] =$$
$$= \left[\mu Y_n'(\mu R_1) - k_1Y_n(\mu R_1)\right]\left[\mu J_n'(\mu R_2) + k_2J_n(\mu R_2)\right].$$

Второй сомножитель имеет вид

$$G_2(z,\zeta,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{h_s(z)h_s(\zeta)}{\|h_s\|^2}\exp(-a\lambda_s^2 t),$$

$$h_s(z) = \cos(\lambda_s z) + \frac{k_3}{\lambda_s}\sin(\lambda_s z), \qquad \|h_s\|^2 = \frac{k_4}{2\lambda_s^2}\,\frac{\lambda_s^2 + k_3^2}{\lambda_s^2 + k_4^2} + \frac{k_3}{2\lambda_s^2} + \frac{l}{2}\left(1 + \frac{k_3^2}{\lambda_s^2}\right),$$

где λ_s — положительные корни трансцендентного уравнения $\dfrac{\operatorname{tg}(\lambda l)}{\lambda} = \dfrac{k_3 + k_4}{\lambda^2 - k_3k_4}$.

3.1.2-23. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Смешанные краевые задачи.

1°. Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$
\begin{array}{llll}
w = f(r,\varphi,z) & \text{при} & t=0 & \text{(начальное условие)},\\
w = g_1(\varphi,z,t) & \text{при} & r=R_1 & \text{(граничное условие)},\\
w = g_2(\varphi,z,t) & \text{при} & r=R_2 & \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w = g_3(r,\varphi,t) & \text{при} & z=0 & \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w = g_4(r,\varphi,t) & \text{при} & z=l & \text{(граничное условие)}.
\end{array}
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(r,\varphi,z,t) &= \int_0^l\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} f(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta \,+\\
&+ aR_1\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\xi=R_1} d\eta\,d\zeta\,d\tau \,-\\
&- aR_2\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi} g_2(\eta,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\xi=R_2} d\eta\,d\zeta\,d\tau \,-\\
&- a\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} g_3(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau \,+\\
&+ a\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} g_4(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,l,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) = G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t)\left[\frac{1}{l} + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\Big(\frac{n\pi z}{l}\Big)\cos\Big(\frac{n\pi\zeta}{l}\Big)\exp\Big(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\Big)\right],
$$

$$
G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_n B_{nm} Z_n(\mu_{nm}r)Z_n(\mu_{nm}\xi)\cos\big[n(\varphi-\eta)\big]\exp(-\mu_{nm}^2 at),
$$

$$
A_n = \begin{cases} 1/2 & \text{при } n=0,\\ 1 & \text{при } n\neq 0,\end{cases} \qquad B_{nm} = \frac{\mu_{nm}^2 J_n^2(\mu_{nm}R_2)}{J_n^2(\mu_{nm}R_1) - J_n^2(\mu_{nm}R_2)},
$$

$$
Z_n(\mu_{nm}r) = J_n(\mu_{nm}R_1)Y_n(\mu_{nm}r) - Y_n(\mu_{nm}R_1)J_n(\mu_{nm}r),
$$

где $J_n(r)$ и $Y_n(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$
J_n(\mu R_1)Y_n(\mu R_2) - Y_n(\mu R_1)J_n(\mu R_2) = 0.
$$

2°. Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$
\begin{array}{llll}
w = f(r,\varphi,z) & \text{при} & t=0 & \text{(начальное условие)},\\
\partial_r w = g_1(\varphi,z,t) & \text{при} & r=R_1 & \text{(граничное условие)},\\
\partial_r w = g_2(\varphi,z,t) & \text{при} & r=R_2 & \text{(граничное условие)},\\
w = g_3(r,\varphi,t) & \text{при} & z=0 & \text{(граничное условие)},\\
w = g_4(r,\varphi,t) & \text{при} & z=l & \text{(граничное условие)}.
\end{array}
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(r,\varphi,z,t) &= \int_0^l\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} f(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta \,-\\
&- aR_1\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,R_1,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau \,+\\
&+ aR_2\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi} g_2(\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,R_2,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau \,+\\
&+ a\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} g_3(\xi,\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\zeta=0}\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau \,-\\
&- a\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} g_4(\xi,\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\zeta=l}\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) = G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t)\left[\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi z}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi\zeta}{l}\right)\exp\left(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\right)\right],$$

$$G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{1}{\pi(R_2^2-R_1^2)} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_n\mu_{nm}^2 Z_n(\mu_{nm}r)Z_n(\mu_{nm}\xi)\cos[n(\varphi-\eta)]\exp(-\mu_{nm}^2 at)}{(\mu_{nm}^2R_2^2-n^2)Z_n^2(\mu_{nm}R_2)-(\mu_{nm}^2R_1^2-n^2)Z_n^2(\mu_{nm}R_1)},$$

$$Z_n(\mu_{nm}r) = J_n'(\mu_{nm}R_1)Y_n(\mu_{nm}r) - Y_n'(\mu_{nm}R_1)J_n(\mu_{nm}r),$$

где $A_0 = 1$, $A_n = 2$ при $n = 1, 2, \ldots$; $J_n(r)$ и $Y_n(r)$ — функции Бесселя; μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_n'(\mu R_1)Y_n'(\mu R_2) - Y_n'(\mu R_1)J_n'(\mu R_2) = 0.$$

3.1.2-24. Область: $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, $-\infty < z < \infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается двугранный угол. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r,\varphi,z) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(r,z,t) && \text{при} \quad \varphi = 0 && \text{(граничное условие)},\\ w &= g_2(r,z,t) && \text{при} \quad \varphi = \varphi_0 && \text{(граничное условие)}.\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,\varphi,z,t) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\varphi_0}\int_0^{\infty} f(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,+\\ &+ a\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} g_1(\xi,\zeta,\tau)\frac{1}{\xi}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\right]_{\eta=0} d\xi\,d\zeta\,d\tau\,-\\ &- a\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} g_2(\xi,\zeta,\tau)\frac{1}{\xi}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\right]_{\eta=\varphi_0} d\xi\,d\zeta\,d\tau.\end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}}\exp\left[-\frac{(z-\zeta)^2}{4at}\right]G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t),$$

$$G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{1}{a\varphi_0 t}\exp\left(-\frac{r^2+\xi^2}{4at}\right)\sum_{n=1}^{\infty} I_{n\pi/\varphi_0}\left(\frac{r\xi}{2at}\right)\sin\left(\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\right)\sin\left(\frac{n\pi\eta}{\varphi_0}\right),$$

где $I_\nu(r)$ — модифицированные функции Бесселя.

3.1.2-25. Область: $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, $-\infty < z < \infty$. Вторая краевая задача.

Рассматривается двугранный угол. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r,\varphi,z) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ r^{-1}\partial_\varphi w &= g_1(r,z,t) && \text{при} \quad \varphi = 0 && \text{(граничное условие)},\\ r^{-1}\partial_\varphi w &= g_2(r,z,t) && \text{при} \quad \varphi = \varphi_0 && \text{(граничное условие)}.\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,\varphi,z,t) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\varphi_0}\int_0^{\infty} f(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,-\\ &- a\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} g_1(\xi,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\tau\,+\\ &+ a\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} g_2(\xi,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\varphi_0,t-\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\tau.\end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}}\exp\left[-\frac{(z-\zeta)^2}{4at}\right]G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t),$$

$$G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{1}{a\varphi_0 t}\exp\left(-\frac{r^2+\xi^2}{4at}\right)\left[\frac{1}{2}I_0\left(\frac{r\xi}{2at}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} I_{n\pi/\varphi_0}\left(\frac{r\xi}{2at}\right)\cos\left(\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\right)\cos\left(\frac{n\pi\eta}{\varphi_0}\right)\right],$$

где $I_\nu(r)$ — модифицированные функции Бесселя.

3.1.2-26. Область: $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, $0 \leqslant z < \infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается верхняя половина двугранного угла. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(r,z,t) &&\text{при}\quad \varphi=0 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(r,z,t) &&\text{при}\quad \varphi=\varphi_0 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_3(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(r,\varphi,z,t) &= \int_0^\infty\int_0^{\varphi_0}\int_0^\infty f(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,+\\
&+a\int_0^t\int_0^\infty\int_0^\infty g_1(\xi,\zeta,\tau)\frac{1}{\xi}\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\eta=0}d\xi\,d\zeta\,d\tau\,-\\
&-a\int_0^t\int_0^\infty\int_0^\infty g_2(\xi,\zeta,\tau)\frac{1}{\xi}\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\eta=\varphi_0}d\xi\,d\zeta\,d\tau\,+\\
&+a\int_0^t\int_0^{\varphi_0}\int_0^\infty g_3(\xi,\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\zeta=0}\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi at}}\bigg\{\exp\Big[-\frac{(z-\zeta)^2}{4at}\Big]-\exp\Big[-\frac{(z+\zeta)^2}{4at}\Big]\bigg\}G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t),
$$

$$
G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t)=\frac{1}{a\varphi_0 t}\exp\Big(-\frac{r^2+\xi^2}{4at}\Big)\sum_{n=1}^\infty I_{n\pi/\varphi_0}\Big(\frac{r\xi}{2at}\Big)\sin\Big(\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\Big)\sin\Big(\frac{n\pi\eta}{\varphi_0}\Big),
$$

где $I_\nu(r)$ — модифицированные функции Бесселя.

3.1.2-27. Область: $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, $0 \leqslant z < \infty$. Вторая краевая задача.

Рассматривается верхняя половина двугранного угла. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
r^{-1}\partial_\varphi w &= g_1(r,z,t) &&\text{при}\quad \varphi=0 &&\text{(граничное условие)},\\
r^{-1}\partial_\varphi w &= g_2(r,z,t) &&\text{при}\quad \varphi=\varphi_0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_3(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(r,\varphi,z,t) &= \int_0^\infty\int_0^{\varphi_0}\int_0^\infty f(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,-\\
&-a\int_0^t\int_0^\infty\int_0^\infty g_1(\xi,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\tau\,+\\
&+a\int_0^t\int_0^\infty\int_0^\infty g_2(\xi,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\varphi_0,t-\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\tau\,-\\
&-a\int_0^t\int_0^{\varphi_0}\int_0^\infty g_3(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi at}}\bigg\{\exp\Big[-\frac{(z-\zeta)^2}{4at}\Big]+\exp\Big[-\frac{(z+\zeta)^2}{4at}\Big]\bigg\}G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t),
$$

$$
G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t)=\frac{1}{a\varphi_0 t}\exp\Big(-\frac{r^2+\xi^2}{4at}\Big)\bigg[\frac{1}{2}I_0\Big(\frac{r\xi}{2at}\Big)+\sum_{n=1}^\infty I_{n\pi/\varphi_0}\Big(\frac{r\xi}{2at}\Big)\cos\Big(\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\Big)\cos\Big(\frac{n\pi\eta}{\varphi_0}\Big)\bigg],
$$

где $I_\nu(r)$ — модифицированные функции Бесселя.

3.1.2-28. Область: $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, $0 \leqslant z < \infty$. Смешанные краевые задачи.

1°. Рассматривается верхняя половина двугранного угла. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f(r, \varphi, z) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(r, z, t) && \text{при} \quad \varphi = 0 && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(r, z, t) && \text{при} \quad \varphi = \varphi_0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_3(r, \varphi, t) && \text{при} \quad z = 0 && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(r, \varphi, z, t) = &\int_0^\infty \int_0^{\varphi_0} \int_0^\infty f(\xi, \eta, \zeta) G(r, \varphi, z, \xi, \eta, \zeta, t) \xi \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \, +\\
&+ a \int_0^t \int_0^\infty \int_0^\infty g_1(\xi, \zeta, \tau) \frac{1}{\xi} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} G(r, \varphi, z, \xi, \eta, \zeta, t - \tau)\right]_{\eta=0} d\xi \, d\zeta \, d\tau \, -\\
&- a \int_0^t \int_0^\infty \int_0^\infty g_2(\xi, \zeta, \tau) \frac{1}{\xi} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} G(r, \varphi, z, \xi, \eta, \zeta, t - \tau)\right]_{\eta=\varphi_0} d\xi \, d\zeta \, d\tau \, -\\
&- a \int_0^t \int_0^{\varphi_0} \int_0^\infty g_3(\xi, \eta, \tau) G(r, \varphi, z, \xi, \eta, 0, t - \tau) \xi \, d\xi \, d\eta \, d\tau.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
G(r, \varphi, z, \xi, \eta, \zeta, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \left\{\exp\left[-\frac{(z - \zeta)^2}{4at}\right] + \exp\left[-\frac{(z + \zeta)^2}{4at}\right]\right\} G_1(r, \varphi, \xi, \eta, t),
$$

$$
G_1(r, \varphi, \xi, \eta, t) = \frac{1}{a\varphi_0 t} \exp\left(-\frac{r^2 + \xi^2}{4at}\right) \sum_{n=1}^\infty I_{n\pi/\varphi_0}\left(\frac{r\xi}{2at}\right) \sin\left(\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\right) \sin\left(\frac{n\pi\eta}{\varphi_0}\right),
$$

где $I_\nu(r)$ — модифицированные функции Бесселя.

2°. Рассматривается верхняя половина двугранного угла. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f(r, \varphi, z) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\
r^{-1}\partial_\varphi w &= g_1(r, z, t) && \text{при} \quad \varphi = 0 && \text{(граничное условие)},\\
r^{-1}\partial_\varphi w &= g_2(r, z, t) && \text{при} \quad \varphi = \varphi_0 && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_3(r, \varphi, t) && \text{при} \quad z = 0 && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(r, \varphi, z, t) = &\int_0^\infty \int_0^{\varphi_0} \int_0^\infty f(\xi, \eta, \zeta) G(r, \varphi, z, \xi, \eta, \zeta, t) \xi \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \, -\\
&- a \int_0^t \int_0^\infty \int_0^\infty g_1(\xi, \zeta, \tau) G(r, \varphi, z, \xi, \eta, 0, t - \tau) \, d\xi \, d\zeta \, d\tau \, +\\
&+ a \int_0^t \int_0^\infty \int_0^\infty g_2(\xi, \zeta, \tau) G(r, \varphi, z, \xi, \eta, \varphi_0, t - \tau) \, d\xi \, d\zeta \, d\tau \, +\\
&+ a \int_0^t \int_0^{\varphi_0} \int_0^\infty g_3(\xi, \eta, \tau) \left[\frac{\partial}{\partial \zeta} G(r, \varphi, z, \xi, \eta, \zeta, t - \tau)\right]_{\zeta=0} \xi \, d\xi \, d\eta \, d\tau.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
G(r, \varphi, z, \xi, \eta, \zeta, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \left\{\exp\left[-\frac{(z - \zeta)^2}{4at}\right] - \exp\left[-\frac{(z + \zeta)^2}{4at}\right]\right\} G_1(r, \varphi, \xi, \eta, t),
$$

$$
G_1(r, \varphi, \xi, \eta, t) = \frac{1}{a\varphi_0 t} \exp\left(-\frac{r^2 + \xi^2}{4at}\right) \left[\frac{1}{2} I_0\left(\frac{r\xi}{2at}\right) + \sum_{n=1}^\infty I_{n\pi/\varphi_0}\left(\frac{r\xi}{2at}\right) \cos\left(\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\right) \cos\left(\frac{n\pi\eta}{\varphi_0}\right)\right],
$$

где $I_\nu(r)$ — модифицированные функции Бесселя.

3.1.2-29. Область: $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Первая краевая задача.

Рассматривается клиновидная область конечной толщины. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
&w = f(r,\varphi,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
&w = g_1(r,z,t) && \text{при} \quad \varphi=0 && \text{(граничное условие)},\\
&w = g_2(r,z,t) && \text{при} \quad \varphi=\varphi_0 && \text{(граничное условие)},\\
&w = g_3(r,\varphi,t) && \text{при} \quad z=0 && \text{(граничное условие)},\\
&w = g_4(r,\varphi,t) && \text{при} \quad z=l && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(r,\varphi,z,t) = {} & \int_0^l\int_0^{\varphi_0}\int_0^\infty f(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta + \\
& + a\int_0^t\int_0^l\int_0^\infty g_1(\xi,\zeta,\tau)\frac{1}{\xi}\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\eta=0}d\xi\,d\zeta\,d\tau - \\
& - a\int_0^t\int_0^l\int_0^\infty g_2(\xi,\zeta,\tau)\frac{1}{\xi}\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\eta=\varphi_0}d\xi\,d\zeta\,d\tau + \\
& + a\int_0^t\int_0^{\varphi_0}\int_0^\infty g_3(\xi,\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\zeta=0}\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau - \\
& - a\int_0^t\int_0^{\varphi_0}\int_0^\infty g_4(\xi,\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\zeta=l}\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) = G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t)\Bigg[\frac{2}{l}\sum_{n=1}^\infty \sin\Big(\frac{n\pi z}{l}\Big)\sin\Big(\frac{n\pi\zeta}{l}\Big)\exp\Big(-\frac{an^2\pi^2t}{l^2}\Big)\Bigg],
$$

$$
G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{1}{a\varphi_0 t}\exp\Big(-\frac{r^2+\xi^2}{4at}\Big)\sum_{n=1}^\infty I_{n\pi/\varphi_0}\Big(\frac{r\xi}{2at}\Big)\sin\Big(\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\Big)\sin\Big(\frac{n\pi\eta}{\varphi_0}\Big),
$$

где $I_\nu(r)$ — модифицированные функции Бесселя.

3.1.2-30. Область: $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Вторая краевая задача.

Рассматривается клиновидная область конечной толщины. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f(r,\varphi,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
r^{-1}\partial_\varphi w &= g_1(r,z,t) && \text{при} \quad \varphi=0 && \text{(граничное условие)},\\
r^{-1}\partial_\varphi w &= g_2(r,z,t) && \text{при} \quad \varphi=\varphi_0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_3(r,\varphi,t) && \text{при} \quad z=0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_4(r,\varphi,t) && \text{при} \quad z=l && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(r,\varphi,z,t) = {} & \int_0^l\int_0^{\varphi_0}\int_0^\infty f(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta - \\
& - a\int_0^t\int_0^l\int_0^\infty g_1(\xi,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\tau + \\
& + a\int_0^t\int_0^l\int_0^\infty g_2(\xi,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\varphi_0,t-\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\tau - \\
& - a\int_0^t\int_0^{\varphi_0}\int_0^\infty g_3(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau + \\
& + a\int_0^t\int_0^{\varphi_0}\int_0^\infty g_4(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,l,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)=G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t)G_2(z,\zeta,t),$$

$$G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t)=\frac{1}{a\varphi_0 t}\exp\Bigl(-\frac{r^2+\xi^2}{4at}\Bigr)\biggl[\frac{1}{2}I_0\Bigl(\frac{r\xi}{2at}\Bigr)+\sum_{n=1}^{\infty}I_{n\pi/\varphi_0}\Bigl(\frac{r\xi}{2at}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{n\pi\eta}{\varphi_0}\Bigr)\biggr],$$

$$G_2(z,\zeta,t)=\frac{1}{l}+\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\Bigl(\frac{n\pi z}{l}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{n\pi\zeta}{l}\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\Bigr),$$

где $I_\nu(r)$ — модифицированные функции Бесселя.

3.1.2-31. Область: $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Смешанные краевые задачи.

1°. Рассматривается клиновидная область конечной толщины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(r,z,t) &&\text{при}\quad \varphi=0 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(r,z,t) &&\text{при}\quad \varphi=\varphi_0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_3(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_4(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=l &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(r,\varphi,z,t) &= \int_0^l\int_0^{\varphi_0}\int_0^{\infty} f(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,+\\
&+a\int_0^t\int_0^l\int_0^{\infty} g_1(\xi,\zeta,\tau)\frac{1}{\xi}\Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\eta=0}d\xi\,d\zeta\,d\tau\,-\\
&-a\int_0^t\int_0^l\int_0^{\infty} g_2(\xi,\zeta,\tau)\frac{1}{\xi}\Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\eta=\varphi_0}d\xi\,d\zeta\,d\tau\,-\\
&-a\int_0^t\int_0^{\varphi_0}\int_0^{\infty} g_3(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau\,+\\
&+a\int_0^t\int_0^{\varphi_0}\int_0^{\infty} g_4(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,l,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau.
\end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)=G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t)G_2(z,\zeta,t),$$

$$G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t)=\frac{1}{a\varphi_0 t}\exp\Bigl(-\frac{r^2+\xi^2}{4at}\Bigr)\sum_{n=1}^{\infty}I_{n\pi/\varphi_0}\Bigl(\frac{r\xi}{2at}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{n\pi\eta}{\varphi_0}\Bigr),$$

$$G_2(z,\zeta,t)=\frac{1}{l}+\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\Bigl(\frac{n\pi z}{l}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{n\pi\zeta}{l}\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\Bigr),$$

где $I_\nu(r)$ — модифицированные функции Бесселя.

2°. Рассматривается клиновидная область конечной толщины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
r^{-1}\partial_\varphi w &= g_1(r,z,t) &&\text{при}\quad \varphi=0 &&\text{(граничное условие)},\\
r^{-1}\partial_\varphi w &= g_2(r,z,t) &&\text{при}\quad \varphi=\varphi_0 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_3(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_4(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=l &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,\varphi,z,t)=\int_0^l\int_0^{\varphi_0}\int_0^\infty f(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta-$$
$$-a\int_0^t\int_0^l\int_0^\infty g_1(\xi,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\tau+$$
$$+a\int_0^t\int_0^l\int_0^\infty g_2(\xi,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\varphi_0,t-\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\tau+$$
$$+a\int_0^t\int_0^{\varphi_0}\int_0^\infty g_3(\xi,\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\zeta=0}\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau-$$
$$-a\int_0^t\int_0^{\varphi_0}\int_0^\infty g_4(\xi,\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\zeta=l}\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)=G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t)\Big[\frac{2}{l}\sum_{n=1}^\infty\sin\Big(\frac{n\pi z}{l}\Big)\sin\Big(\frac{n\pi\zeta}{l}\Big)\exp\Big(-\frac{an^2\pi^2t}{l^2}\Big)\Big],$$

$$G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t)=\frac{1}{a\varphi_0t}\exp\Big(-\frac{r^2+\xi^2}{4at}\Big)\Big[\frac{1}{2}I_0\Big(\frac{r\xi}{2at}\Big)+\sum_{n=1}^\infty I_{n\pi/\varphi_0}\Big(\frac{r\xi}{2at}\Big)\cos\Big(\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\Big)\cos\Big(\frac{n\pi\eta}{\varphi_0}\Big)\Big],$$

где $I_\nu(r)$ — модифицированные функции Бесселя.

3.1.2-32. Область: $0\leqslant r\leqslant R$, $0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0$, $-\infty<z<\infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается бесконечный цилиндрический сектор. Заданы следующие условия:

$w=f(r,\varphi,z)$ при $t=0$ (начальное условие),
$w=g_1(\varphi,z,t)$ при $r=R$ (граничное условие),
$w=g_2(r,z,t)$ при $\varphi=0$ (граничное условие),
$w=g_3(r,z,t)$ при $\varphi=\varphi_0$ (граничное условие).

Решение:

$$w(r,\varphi,z,t)=\int_{-\infty}^\infty\int_0^{\varphi_0}\int_0^R f(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta-$$
$$-aR\int_0^t\int_{-\infty}^\infty\int_0^{\varphi_0} g_1(\eta,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\xi=R}d\eta\,d\zeta\,d\tau+$$
$$+a\int_0^t\int_{-\infty}^\infty\int_0^R g_2(\xi,\zeta,\tau)\frac{1}{\xi}\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\eta=0}d\xi\,d\zeta\,d\tau-$$
$$-a\int_0^t\int_{-\infty}^\infty\int_0^R g_3(\xi,\zeta,\tau)\frac{1}{\xi}\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\eta=\varphi_0}d\xi\,d\zeta\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi at}}\exp\Big[-\frac{(z-\zeta)^2}{4at}\Big]G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t),$$

$$G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t)=\frac{4}{R^2\varphi_0}\sum_{n=1}^\infty\sum_{m=1}^\infty\frac{J_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}r)J_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}\xi)}{[J'_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}R)]^2}\sin\Big(\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\Big)\sin\Big(\frac{n\pi\eta}{\varphi_0}\Big)\exp(-\mu_{nm}^2at),$$

где $J_{n\pi/\varphi_0}(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_{n\pi/\varphi_0}(\mu R)=0$.

3.1.2-33. Область: $0\leqslant r\leqslant R$, $0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0$, $0\leqslant z<\infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается полубесконечный цилиндрический сектор. Заданы следующие условия:

$w=f(r,\varphi,z)$ при $t=0$ (начальное условие),
$w=g_1(\varphi,z,t)$ при $r=R$ (граничное условие),
$w=g_2(r,z,t)$ при $\varphi=0$ (граничное условие),
$w=g_3(r,z,t)$ при $\varphi=\varphi_0$ (граничное условие),
$w=g_4(r,\varphi,t)$ при $z=0$ (граничное условие).

Решение:

$$w(r,\varphi,z,t) = \int_0^\infty\int_0^{\varphi_0}\int_0^R f(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta -$$
$$- aR\int_0^t\int_0^\infty\int_0^{\varphi_0} g_1(\eta,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\xi=R}d\eta\,d\zeta\,d\tau +$$
$$+ a\int_0^t\int_0^\infty\int_0^R g_2(\xi,\zeta,\tau)\frac{1}{\xi}\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\eta=0}d\xi\,d\zeta\,d\tau -$$
$$- a\int_0^t\int_0^\infty\int_0^R g_3(\xi,\zeta,\tau)\frac{1}{\xi}\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\eta=\varphi_0}d\xi\,d\zeta\,d\tau +$$
$$+ a\int_0^t\int_0^{\varphi_0}\int_0^R g_4(\xi,\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\zeta=0}\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi at}}\Big\{\exp\Big[-\frac{(z-\zeta)^2}{4at}\Big]-\exp\Big[-\frac{(z+\zeta)^2}{4at}\Big]\Big\}G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t),$$

$$G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t)=\frac{4}{R^2\varphi_0}\sum_{n=1}^\infty\sum_{m=1}^\infty\frac{J_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}r)J_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}\xi)}{[J'_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}R)]^2}\sin\Big(\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\Big)\sin\Big(\frac{n\pi\eta}{\varphi_0}\Big)\exp(-\mu_{nm}^2at),$$

где $J_{n\pi/\varphi_0}(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_{n\pi/\varphi_0}(\mu R)=0$.

3.1.2-34. Область: $0\leqslant r\leqslant R$, $0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0$, $0\leqslant z<\infty$. Смешанная краевая задача.

Рассматривается полубесконечный цилиндрический сектор. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(\varphi,z,t) &&\text{при}\quad r=R &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(r,z,t) &&\text{при}\quad \varphi=0 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_3(r,z,t) &&\text{при}\quad \varphi=\varphi_0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_4(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,\varphi,z,t) = \int_0^\infty\int_0^{\varphi_0}\int_0^R f(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta -$$
$$- aR\int_0^t\int_0^\infty\int_0^{\varphi_0} g_1(\eta,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\xi=R}d\eta\,d\zeta\,d\tau +$$
$$+ a\int_0^t\int_0^\infty\int_0^R g_2(\xi,\zeta,\tau)\frac{1}{\xi}\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\eta=0}d\xi\,d\zeta\,d\tau -$$
$$- a\int_0^t\int_0^\infty\int_0^R g_3(\xi,\zeta,\tau)\frac{1}{\xi}\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\eta=\varphi_0}d\xi\,d\zeta\,d\tau -$$
$$- a\int_0^t\int_0^{\varphi_0}\int_0^R g_4(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi at}}\Big\{\exp\Big[-\frac{(z-\zeta)^2}{4at}\Big]+\exp\Big[-\frac{(z+\zeta)^2}{4at}\Big]\Big\}G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t),$$

$$G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t)=\frac{4}{R^2\varphi_0}\sum_{n=1}^\infty\sum_{m=1}^\infty\frac{J_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}r)J_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}\xi)}{[J'_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}R)]^2}\sin\Big(\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\Big)\sin\Big(\frac{n\pi\eta}{\varphi_0}\Big)\exp(-\mu_{nm}^2at),$$

где $J_{n\pi/\varphi_0}(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_{n\pi/\varphi_0}(\mu R)=0$.

3.1.2-35. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Первая краевая задача.

Рассматривается цилиндрический сектор конечной толщины. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
&w = f(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
&w = g_1(\varphi,z,t) &&\text{при}\quad r=R &&\text{(граничное условие)},\\
&w = g_2(r,z,t) &&\text{при}\quad \varphi=0 &&\text{(граничное условие)},\\
&w = g_3(r,z,t) &&\text{при}\quad \varphi=\varphi_0 &&\text{(граничное условие)},\\
&w = g_4(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\
&w = g_5(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=l &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(r,\varphi,z,t) &= \int_0^l\int_0^{\varphi_0}\int_0^R f(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,-\\
&-aR\int_0^t\int_0^l\int_0^{\varphi_0} g_1(\eta,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\xi=R}d\eta\,d\zeta\,d\tau\,+\\
&+a\int_0^t\int_0^l\int_0^R g_2(\xi,\zeta,\tau)\frac{1}{\xi}\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\eta=0}d\xi\,d\zeta\,d\tau\,-\\
&-a\int_0^t\int_0^l\int_0^R g_3(\xi,\zeta,\tau)\frac{1}{\xi}\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\eta=\varphi_0}d\xi\,d\zeta\,d\tau\,+\\
&+a\int_0^t\int_0^{\varphi_0}\int_0^R g_4(\xi,\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\zeta=0}\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau\,-\\
&-a\int_0^t\int_0^{\varphi_0}\int_0^R g_5(\xi,\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\zeta=l}\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)=G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t)G_2(z,\zeta,t),$$

$$G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t)=\frac{4}{R^2\varphi_0}\sum_{n=1}^\infty\sum_{m=1}^\infty\frac{J_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}r)J_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}\xi)}{[J'_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}R)]^2}\sin\Big(\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\Big)\sin\Big(\frac{n\pi\eta}{\varphi_0}\Big)\exp(-\mu_{nm}^2at),$$

$$G_2(z,\zeta,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^\infty\sin\Big(\frac{n\pi z}{l}\Big)\sin\Big(\frac{n\pi\zeta}{l}\Big)\exp\Big(-\frac{an^2\pi^2t}{l^2}\Big),$$

где $J_{n\pi/\varphi_0}(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_{n\pi/\varphi_0}(\mu R)=0$.

3.1.2-36. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Смешанная краевая задача.

Рассматривается цилиндрический сектор конечной толщины. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
&w = f(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
&w = g_1(\varphi,z,t) &&\text{при}\quad r=R &&\text{(граничное условие)},\\
&w = g_2(r,z,t) &&\text{при}\quad \varphi=0 &&\text{(граничное условие)},\\
&w = g_3(r,z,t) &&\text{при}\quad \varphi=\varphi_0 &&\text{(граничное условие)},\\
&\partial_z w = g_4(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\
&\partial_z w = g_5(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=l &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$w(r,\varphi,z,t) = \int_0^l \int_0^{\varphi_0} \int_0^R f(\xi,\eta,\zeta) G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\, d\xi\, d\eta\, d\zeta -$$
$$- aR \int_0^t \int_0^l \int_0^{\varphi_0} g_1(\eta,\zeta,\tau) \Big[\frac{\partial}{\partial\xi} G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\xi=R} d\eta\, d\zeta\, d\tau +$$
$$+ a \int_0^t \int_0^l \int_0^R g_2(\xi,\zeta,\tau) \frac{1}{\xi} \Big[\frac{\partial}{\partial\eta} G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\eta=0} d\xi\, d\zeta\, d\tau -$$
$$- a \int_0^t \int_0^l \int_0^R g_3(\xi,\zeta,\tau) \frac{1}{\xi} \Big[\frac{\partial}{\partial\eta} G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\eta=\varphi_0} d\xi\, d\zeta\, d\tau -$$
$$- a \int_0^t \int_0^{\varphi_0} \int_0^R g_4(\xi,\eta,\tau) G(r,\varphi,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\xi\, d\xi\, d\eta\, d\tau +$$
$$+ a \int_0^t \int_0^{\varphi_0} \int_0^R g_5(\xi,\eta,\tau) G(r,\varphi,z,\xi,\eta,l,t-\tau)\xi\, d\xi\, d\eta\, d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) = G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t)\left[\frac{1}{l} + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} \cos\Big(\frac{n\pi z}{l}\Big) \cos\Big(\frac{n\pi\zeta}{l}\Big) \exp\Big(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\Big)\right],$$

$$G_1(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{4}{R^2\varphi_0} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm} r) J_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}\xi)}{[J'_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}R)]^2} \sin\Big(\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\Big) \sin\Big(\frac{n\pi\eta}{\varphi_0}\Big) \exp(-\mu_{nm}^2 at),$$

где $J_{n\pi/\varphi_0}(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_{n\pi/\varphi_0}(\mu R) = 0$.

3.1.3. Задачи в сферической системе координат

Уравнение теплопроводности в сферической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2 \frac{\partial w}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta \frac{\partial w}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right], \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Его удобно использовать для описания трехмерных нестационарных процессов тепло- и массообмена в областях, ограниченных координатными поверхностями сферической системы.

Одномерные задачи с центральной симметрией, которые имеют решения вида $w = w(r,t)$, рассматриваются в разд. 1.2.3.

3.1.3-1. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Первая краевая задача.

Рассматривается сферическая область. Заданы следующие условия:

$$w = f(r,\theta,\varphi) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},$$
$$w = g(\theta,\varphi,t) \quad \text{при} \quad r = R \quad \text{(граничное условие)}.$$

Решение:

$$w(r,\theta,\varphi,t) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^R f(\xi,\eta,\zeta) G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t)\xi^2 \sin\eta\, d\xi\, d\eta\, d\zeta -$$
$$- aR^2 \int_0^t \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} g(\eta,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi} G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\xi=R} \sin\eta\, d\eta\, d\zeta\, d\tau,$$

где

$$G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{2\pi R^2\sqrt{r\xi}} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} A_k B_{nmk} J_{n+1/2}(\lambda_{nm} r) J_{n+1/2}(\lambda_{nm}\xi)\times$$
$$\times P_n^k(\cos\theta) P_n^k(\cos\eta) \cos\big[k(\varphi-\zeta)\big] \exp(-\lambda_{nm}^2 at),$$

$$A_k = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 0, \\ 2 & \text{при } k \neq 0, \end{cases} \qquad B_{nmk} = \frac{(2n+1)(n-k)!}{(n+k)!\big[J'_{n+1/2}(\lambda_{nm}R)\big]^2}.$$

Здесь $J_{n+1/2}(r)$ — функции Бесселя, $P_n^k(\mu)$ — присоединенные функции Лежандра, которые выражаются через полиномы Лежандра $P_n(\mu)$ по формулам

$$P_n^k(\mu) = (1-\mu^2)^{k/2}\frac{d^k}{d\mu^k}P_n(\mu), \qquad P_n(\mu) = \frac{1}{n!\,2^n}\frac{d^n}{d\mu^n}(\mu^2-1)^n;$$

λ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_{n+1/2}(\lambda R) = 0$.

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 244), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 96, 479).

3.1.3-2. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Вторая краевая задача.

Рассматривается сферическая область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r,\theta,\varphi) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_r w &= g(\theta,\varphi,t) && \text{при} \quad r=R && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,\theta,\varphi,t) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} f(\xi,\eta,\zeta)G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t)\xi^2\sin\eta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\, +\\ + aR^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} g(\eta,\zeta,\tau)G(r,\theta,\varphi,R,\eta,\zeta,t-\tau)\sin\eta\,d\eta\,d\zeta\,d\tau, \end{aligned}$$

где

$$\begin{gathered} G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{3}{4\pi R^3} + \frac{1}{2\pi\sqrt{r\xi}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} A_k B_{nmk} J_{n+1/2}(\lambda_{nm}r)J_{n+1/2}(\lambda_{nm}\xi)\times\\ \times P_n^k(\cos\theta)P_n^k(\cos\eta)\cos\bigl[k(\varphi-\zeta)\bigr]\exp(-\lambda_{nm}^2 at),\\ A_k = \begin{cases} 1 & \text{при } k=0,\\ 2 & \text{при } k\neq 0,\end{cases} \qquad B_{nmk} = \frac{\lambda_{nm}^2(2n+1)(n-k)!}{(n+k)!\bigl[R^2\lambda_{nm}^2 - n(n+1)\bigr]\bigl[J_{n+1/2}(\lambda_{nm}R)\bigr]^2}. \end{gathered}$$

Здесь $J_{n+1/2}(r)$ — функции Бесселя, $P_n^k(\mu)$ — присоединенные функции Лежандра (см. разд. 3.1.3-1), λ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$2\lambda R J'_{n+1/2}(\lambda R) - J_{n+1/2}(\lambda R) = 0.$$

3.1.3-3. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Третья краевая задача.

Рассматривается сферическая область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r,\theta,\varphi) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_r w + kw &= g(\theta,\varphi,t) && \text{при} \quad r=R && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(r,\theta,\varphi,t)$ определяется по формуле из разд. 3.1.3-2, где

$$\begin{gathered} G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{r\xi}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n} A_s B_{nms} J_{n+1/2}(\lambda_{nm}r)J_{n+1/2}(\lambda_{nm}\xi)\times\\ \times P_n^s(\cos\theta)P_n^s(\cos\eta)\cos\bigl[s(\varphi-\zeta)\bigr]\exp(-\lambda_{nm}^2 at),\\ A_s = \begin{cases} 1 & \text{при } s=0,\\ 2 & \text{при } s\neq 0,\end{cases} \qquad B_{nms} = \frac{\lambda_{nm}^2(2n+1)(n-s)!}{(n+s)!\bigl[R^2\lambda_{nm}^2 + (kR+n)(kR-n-1)\bigr]\bigl[J_{n+1/2}(\lambda_{nm}R)\bigr]^2}. \end{gathered}$$

Здесь $J_{n+1/2}(r)$ — функции Бесселя, $P_n^s(\mu)$ — присоединенные функции Лежандра (см. разд. 3.1.3-1), λ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\lambda R J'_{n+1/2}(\lambda R) + \bigl(kR - \tfrac{1}{2}\bigr)J_{n+1/2}(\lambda R) = 0.$$

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 96, 479–480).

3.1.3-4. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Первая краевая задача.

Рассматривается сферический слой. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r,\theta,\varphi) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(\theta,\varphi,t) && \text{при} \quad r = R_1 && \text{(граничное условие)},\\ w &= g_2(\theta,\varphi,t) && \text{при} \quad r = R_2 && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,\theta,\varphi,t) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{R_1}^{R_2} f(\xi,\eta,\zeta)G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t)\xi^2 \sin\eta\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, +\\ + aR_1^2 \int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\xi=R_1} \sin\eta\, d\eta\, d\zeta\, d\tau\, -\\ - aR_2^2 \int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} g_2(\eta,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\xi=R_2} \sin\eta\, d\eta\, d\zeta\, d\tau, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{\pi}{8\sqrt{r\xi}} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} A_k B_{nmk} Z_{n+1/2}(\lambda_{nm}r) Z_{n+1/2}(\lambda_{nm}\xi)\times\\ \times P_n^k(\cos\theta)P_n^k(\cos\eta)\cos\big[k(\varphi-\zeta)\big]\exp(-\lambda_{nm}^2 at). \end{aligned}$$

Здесь

$$Z_{n+1/2}(\lambda_{nm}r) = J_{n+1/2}(\lambda_{nm}R_1)Y_{n+1/2}(\lambda_{nm}r) - Y_{n+1/2}(\lambda_{nm}R_1)J_{n+1/2}(\lambda_{nm}r),$$

$$A_k = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 0,\\ 2 & \text{при } k \neq 0, \end{cases} \qquad B_{nmk} = \frac{\lambda_{nm}^2(2n+1)(n-k)!\,J_{n+1/2}^2(\lambda_{nm}R_2)}{(n+k)!\big[J_{n+1/2}^2(\lambda_{nm}R_1) - J_{n+1/2}^2(\lambda_{nm}R_2)\big]},$$

где $J_{n+1/2}(r)$ — функции Бесселя, $P_n^k(\mu)$ — присоединенные функции Лежандра, которые выражаются через полиномы Лежандра $P_n(\mu)$ по формулам

$$P_n^k(\mu) = (1-\mu^2)^{k/2}\frac{d^k}{d\mu^k}P_n(\mu), \qquad P_n(\mu) = \frac{1}{n!\,2^n}\frac{d^n}{d\mu^n}(\mu^2-1)^n;$$

λ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$Z_{n+1/2}(\lambda R_2) = 0.$$

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 96, 480–481).

3.1.3-5. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Вторая краевая задача.

Рассматривается сферический слой. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r,\theta,\varphi) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_r w &= g_1(\theta,\varphi,t) && \text{при} \quad r = R_1 && \text{(граничное условие)},\\ \partial_r w &= g_2(\theta,\varphi,t) && \text{при} \quad r = R_2 && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,\theta,\varphi,t) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{R_1}^{R_2} f(\xi,\eta,\zeta)G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t)\xi^2 \sin\eta\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, -\\ - aR_1^2 \int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau)G(r,\theta,\varphi,R_1,\eta,\zeta,t-\tau) \sin\eta\, d\eta\, d\zeta\, d\tau\, +\\ + aR_2^2 \int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} g_2(\eta,\zeta,\tau)G(r,\theta,\varphi,R_2,\eta,\zeta,t-\tau) \sin\eta\, d\eta\, d\zeta\, d\tau, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{3}{4\pi(R_2^3 - R_1^3)} + \frac{1}{4\pi\sqrt{r\xi}} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{B_{nmk}} Z_{n+1/2}(\lambda_{nm}r) Z_{n+1/2}(\lambda_{nm}\xi)\times\\ \times P_n^k(\cos\theta)P_n^k(\cos\eta)\cos\big[k(\varphi-\zeta)\big]\exp(-\lambda_{nm}^2 at). \end{aligned}$$

Здесь

$$A_k = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 0, \\ 2 & \text{при } k \neq 0, \end{cases} \qquad B_{nmk} = \frac{(n+k)!}{(2n+1)(n-k)!} \int_{R_1}^{R_2} r Z^2_{n+1/2}(\lambda_{nm} r)\, dr,$$

$$Z_{n+1/2}(\lambda r) = \Big[\lambda J'_{n+1/2}(\lambda R_1) - \frac{1}{2R_1} J_{n+1/2}(\lambda R_1)\Big] Y_{n+1/2}(\lambda r) - \\ - \Big[\lambda Y'_{n+1/2}(\lambda R_1) - \frac{1}{2R_1} Y_{n+1/2}(\lambda R_1)\Big] J_{n+1/2}(\lambda r),$$

где $J_{n+1/2}(r)$ и $Y_{n+1/2}(r)$ — функции Бесселя, $P_n^k(\mu)$ — присоединенные функции Лежандра (см. разд. 3.1.3-4), λ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\lambda Z'_{n+1/2}(\lambda R_2) - \frac{1}{2R_2} Z_{n+1/2}(\lambda R_2) = 0.$$

Интегралы, которые определяют коэффициенты B_{nmk}, могут быть выражены через функции Бесселя и их производные [см. Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 482)].

3.1.3-6. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Третья краевая задача.

Рассматривается сферический слой. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r,\theta,\varphi) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_r w - k_1 w &= g_1(\theta,\varphi,t) &&\text{при}\quad r = R_1 &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_r w + k_2 w &= g_2(\theta,\varphi,t) &&\text{при}\quad r = R_2 &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(r,\theta,\varphi,t)$ определяется по формуле из разд. 3.1.3-5, где

$$G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{4\pi\sqrt{r\xi}} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n} \frac{A_s}{B_{nms}} Z_{n+1/2}(\lambda_{nm} r) Z_{n+1/2}(\lambda_{nm}\xi) \times \\ \times P_n^s(\cos\theta) P_n^s(\cos\eta) \cos\big[s(\varphi-\zeta)\big] \exp(-\lambda^2_{nm} a t).$$

Здесь

$$A_s = \begin{cases} 1 & \text{при } s = 0, \\ 2 & \text{при } s \neq 0, \end{cases} \qquad B_{nms} = \frac{(n+s)!}{(2n+1)(n-s)!} \int_{R_1}^{R_2} r Z^2_{n+1/2}(\lambda_{nm} r)\, dr,$$

$$Z_{n+1/2}(\lambda r) = \Big[\lambda J'_{n+1/2}(\lambda R_1) - \Big(k_1 + \frac{1}{2R_1}\Big) J_{n+1/2}(\lambda R_1)\Big] Y_{n+1/2}(\lambda r) - \\ - \Big[\lambda Y'_{n+1/2}(\lambda R_1) - \Big(k_1 + \frac{1}{2R_1}\Big) Y_{n+1/2}(\lambda R_1)\Big] J_{n+1/2}(\lambda r),$$

где $J_{n+1/2}(r)$ и $Y_{n+1/2}(r)$ — функции Бесселя, $P_n^s(\mu)$ — присоединенные функции Лежандра (см. разд. 3.1.3-4), λ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\lambda Z'_{n+1/2}(\lambda R_2) + \Big(k_2 - \frac{1}{2R_2}\Big) Z_{n+1/2}(\lambda R_2) = 0.$$

Интегралы, которые определяют коэффициенты B_{nms}, могут быть выражены через функции Бесселя и их производные.

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 96, 481–482).

3.1.3-7. Область: $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Первая краевая задача.

Рассматривается конус. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r,\theta,\varphi) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\ w &= g(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad \theta = \theta_0 &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,\theta,\varphi,t) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\theta_0}\int_0^{\infty} f(\xi,\eta,\zeta) G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t) \xi^2 \sin\eta\, d\xi\, d\eta\, d\zeta - \\ - a\int_0^t \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} g(\xi,\zeta,\tau) \Big[\frac{\partial}{\partial\eta} G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\eta=\theta_0} \sin\eta\, d\xi\, d\zeta\, d\tau,$$

где

$$G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t) = -\frac{1}{4\pi a t\sqrt{r\xi}}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\nu}\frac{A_m(2\nu+1)}{B_{m\nu}}\exp\Bigl(-\frac{r^2+\xi^2}{4at}\Bigr)I_{\nu+1/2}\Bigl(\frac{r\xi}{2at}\Bigr)\times$$
$$\times P_\nu^{-m}(\cos\theta)P_\nu^{-m}(\cos\eta)\cos\bigl[m(\varphi-\zeta)\bigr],$$

$$A_m = \begin{cases} 1 & \text{при } m=0,\\ 2 & \text{при } m\neq 0,\end{cases}\qquad B_{m\nu} = \Bigl[(1-\mu)^2\frac{d}{d\mu}P_\nu^{-m}(\mu)\frac{d}{d\nu}P_\nu^{-m}(\mu)\Bigr]_{\mu=\cos\theta_0}.$$

Здесь $P_\nu^{-m}(\mu)$ — модифицированная функция Лежандра, которая определяется формулой

$$P_\nu^{-m}(\mu) = \frac{1}{\Gamma(1+m)}\Bigl(\frac{1-\mu}{1+\mu}\Bigr)^{m/2}F\bigl(-\nu,\ \nu+1,\ 1+m;\ \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\mu\bigr),$$

где $F(a,b,c;\mu)$ — гипергеометрическая функция Гаусса, а $\Gamma(z)$ — гамма-функция. Суммирование по ν производится по всем корням уравнения $P_\nu^{-m}(\cos\theta_0)=0$, которые превышают $-1/2$.

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 378).

3.2. Уравнение теплопроводности с источником $\frac{\partial w}{\partial t} = a\Delta_3 w + \Phi(x,y,z,t)$

3.2.1. Задачи в декартовой системе координат

В прямоугольной декартовой системе координат уравнение теплопроводности с объемным источником имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\Bigl(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\Bigr)+\Phi(x,y,z,t).$$

Оно описывает развитие трехмерных нестационарных процессов в неподвижных средах или твердых телах с постоянным коэффициентом температуропроводности. Аналогичное уравнение используется для анализа соответствующих трехмерных нестационарных массообменных процессов при постоянном коэффициенте диффузии.

3.2.1-1. Область: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$. Задача Коши.

Задано начальное условие:

$$w = f(x,y,z) \quad \text{при} \quad t=0.$$

Решение:

$$w(x,y,z,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta +$$
$$+\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau,$$

где

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{8(\pi a t)^{3/2}}\exp\Bigl[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4at}\Bigr].$$

⊙ *Литература*: А. Г. Бутковский (1979, стр. 160).

3.2.1-2. Область: $0 \leqslant x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$. Различные краевые задачи.

1°. Решение первой краевой задачи для полупространства дается формулой из разд. 3.1.1-4 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau, \qquad (1)$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

2°. Решение второй краевой задачи для полупространства дается формулой из разд. 3.1.1-5 с дополнительным слагаемым (1).

3°. Решение третьей краевой задачи для полупространства дается формулой из разд. 3.1.1-6 с дополнительным слагаемым (1).

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 364), А. Г. Бутковский (1979, стр. 155–156).

3.2.1-3. Область: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Различные краевые задачи.

1°. Решение первой краевой задачи для бесконечного слоя дается формулой из разд. 3.1.1-7 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t \int_0^l \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi, \eta, \zeta, \tau) G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t-\tau)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\tau, \qquad (2)$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

2°. Решение второй краевой задачи для бесконечного слоя дается формулой из разд. 3.1.1-8 с дополнительным слагаемым (2).

3°. Решение третьей краевой задачи для бесконечного слоя дается формулой из разд. 3.1.1-9 с дополнительным слагаемым (2).

4°. Решение смешанной краевой задачи для бесконечного слоя дается формулой из разд. 3.1.1-10 с дополнительным слагаемым (2).

3.2.1-4. Область: $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Различные краевые задачи.

1°. Решение первой краевой задачи для полубесконечного слоя дается формулой из разд. 3.1.1-11 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t \int_0^l \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi, \eta, \zeta, \tau) G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t-\tau)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\tau, \qquad (3)$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

2°. Решение второй краевой задачи для полубесконечного слоя дается формулой из разд. 3.1.1-12 с дополнительным слагаемым (3).

3°. Решение третьей краевой задачи для полубесконечного слоя дается формулой из разд. 3.1.1-13 с дополнительным слагаемым (3).

4°. Решение смешанных краевых задач для полубесконечного слоя дается формулами из разд. 3.1.1-14 с дополнительными слагаемыми вида (3).

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 366–367), А. Г. Бутковский (1979, стр. 156–159).

3.2.1-5. Область: $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$, $0 \leqslant z < \infty$. Различные краевые задачи.

1°. Решение первой краевой задачи для первого октанта дается формулой из разд. 3.1.1-15 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \Phi(\xi, \eta, \zeta, \tau) G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t-\tau)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\tau, \qquad (4)$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

2°. Решение второй краевой задачи для первого октанта дается формулой из разд. 3.1.1-16 с дополнительным слагаемым (4).

3°. Решение третьей краевой задачи для первого октанта дается формулой из разд. 3.1.1-17 с дополнительным слагаемым (4).

4°. Решения смешанных краевых задач для первого октанта даются формулами из разд. 3.1.1-18 с дополнительными слагаемыми вида (4).

3.2.1-6. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, $-\infty < z < \infty$. Различные краевые задачи.

1°. Решение первой краевой задачи в бесконечной прямоугольной области дается формулой из разд. 3.1.1-19 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{l_2} \int_0^{l_1} \Phi(\xi, \eta, \zeta, \tau) G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t-\tau)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\tau, \qquad (5)$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

2°. Решение второй краевой задачи в бесконечной прямоугольной области дается формулой из разд. 3.1.1-20 с дополнительным слагаемым (5).

3°. Решение третьей краевой задачи в бесконечной прямоугольной области дается формулой из разд. 3.1.1-21 с дополнительным слагаемым (5).

4°. Решение смешанной краевой задачи в бесконечной прямоугольной области дается формулой из разд. 3.1.1-22 с дополнительным слагаемым (5).

3.2.1-7. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1,\ 0 \leqslant y \leqslant l_2,\ 0 \leqslant z < \infty$. Различные краевые задачи.

1°. Решение первой краевой задачи в полубесконечной прямоугольной области дается формулой из разд. 3.1.1-23 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t \int_0^\infty \int_0^{l_2} \int_0^{l_1} \Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau) G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\tau, \tag{6}$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

2°. Решение второй краевой задачи в полубесконечной прямоугольной области дается формулой из разд. 3.1.1-24 с дополнительным слагаемым (6).

3°. Решение третьей краевой задачи в полубесконечной прямоугольной области дается формулой из разд. 3.1.1-25 с дополнительным слагаемым (6).

4°. Решение смешанных краевых задач в полубесконечной прямоугольной области дается формулами из разд. 3.1.1-26 с дополнительными слагаемыми вида (6).

3.2.1-8. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1,\ 0 \leqslant y \leqslant l_2,\ 0 \leqslant z \leqslant l_3$. Различные краевые задачи.

1°. Решение первой краевой задачи для параллелепипеда дается формулой из разд. 3.1.1-27 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t \int_0^{l_3} \int_0^{l_2} \int_0^{l_1} \Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau) G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\tau, \tag{7}$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

2°. Решение второй краевой задачи для параллелепипеда дается формулой из разд. 3.1.1-28 с дополнительным слагаемым (7).

3°. Решение третьей краевой задачи для параллелепипеда дается формулой из разд. 3.1.1-29 с дополнительным слагаемым (7).

4°. Решение смешанных краевых задач для параллелепипеда дается формулами из разд. 3.1.1-30 с дополнительными слагаемыми вида (7).

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 355), А. Г. Бутковский (1979, стр. 157).

3.2.2. Задачи в цилиндрической системе координат

Уравнение теплопроводности с объемным источником в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right] + \Phi(r,\varphi,z,t).$$

Оно используется для описания несимметричных нестационарных процессов в неподвижных средах или твердых телах с цилиндрическими и плоскими границами.

3.2.2-1. Область: $0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ -\infty < z < \infty$. Различные краевые задачи.

1°. Решение первой краевой задачи для бесконечного кругового цилиндра дается формулой из разд. 3.1.2-2 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t \int_{-\infty}^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^R \Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau) G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\xi\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\tau, \tag{1}$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

2°. Решение второй краевой задачи для бесконечного кругового цилиндра дается формулой из разд. 3.1.2-3 с дополнительным слагаемым (1).

3°. Решение третьей краевой задачи для бесконечного кругового цилиндра дается суммой решения, указанного в разд. 3.1.2-4, и выражения (1).

3.2.2-2. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z < \infty$. Различные краевые задачи.

1°. Решение первой краевой задачи для полубесконечного кругового цилиндра дается формулой из разд. 3.1.2-5 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^R \Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau) G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau, \tag{2}$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

2°. Решение второй краевой задачи для полубесконечного кругового цилиндра дается формулой из разд. 3.1.2-6 с дополнительным слагаемым (2).

3°. Решение третьей краевой задачи для полубесконечного кругового цилиндра дается суммой решения, указанного в разд. 3.1.2-7, и выражения (2).

4°. Решения смешанных краевых задач для полубесконечного кругового цилиндра даются формулами из разд. 3.1.2-8 с дополнительными слагаемыми вида (2).

3.2.2-3. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Различные краевые задачи.

1°. Решение первой краевой задачи для кругового цилиндра конечной длины дается формулой из разд. 3.1.2-9 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^R \Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau) G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau, \tag{3}$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

2°. Решение второй краевой задачи для кругового цилиндра конечной длины дается формулой из разд. 3.1.2-10 с дополнительным слагаемым (3).

3°. Решение третьей краевой задачи для кругового цилиндра конечной длины дается суммой решения, указанного в разд. 3.1.2-11, и выражения (3).

4°. Решения смешанных краевых задач для кругового цилиндра конечной длины даются формулами из разд. 3.1.2-12 с дополнительными слагаемыми вида (3).

3.2.2-4. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $-\infty < z < \infty$. Различные краевые задачи.

1°. Решение первой краевой задачи для бесконечного полого цилиндра дается формулой из разд. 3.1.2-13 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t \int_{-\infty}^\infty \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau) G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau, \tag{4}$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

2°. Решение второй краевой задачи для бесконечного полого цилиндра дается формулой из разд. 3.1.2-14 с дополнительным слагаемым (4).

3°. Решение третьей краевой задачи для бесконечного полого цилиндра дается суммой решения, указанного в разд. 3.1.2-15, и выражения (4).

3.2.2-5. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z < \infty$. Различные краевые задачи.

1°. Решение первой краевой задачи для полубесконечного полого цилиндра дается дается формулой из разд. 3.1.2-16 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau) G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau, \tag{5}$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

2°. Решение второй краевой задачи для полубесконечного полого цилиндра дается формулой из разд. 3.1.2-17 с дополнительным слагаемым (5).

3°. Решение третьей краевой задачи для полубесконечного полого цилиндра дается суммой решения, указанного в разд. 3.1.2-18, и выражения (5).

4°. Решения смешанных краевых задач для полубесконечного полого цилиндра даются формулами из разд. 3.1.2-19 с дополнительными слагаемыми вида (5).

3.2.2-6. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Различные краевые задачи.

1°. Решение первой краевой задачи для полого цилиндра конечных размеров дается формулой из разд. 3.1.2-20 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau) G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau, \qquad (6)$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

2°. Решение второй краевой задачи для полого цилиндра конечных размеров дается формулой из разд. 3.1.2-21 с дополнительным слагаемым (6).

3°. Решение третьей краевой задачи для полого цилиндра конечных размеров дается суммой решения, указанного в разд. 3.1.2-22, и выражения (6).

4°. Решения смешанных краевых задач для полого цилиндра конечных размеров даются формулами из разд. 3.1.2-23 с дополнительными слагаемыми вида (6).

3.2.2-7. Область: $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, $-\infty < z < \infty$. Различные краевые задачи.

1°. Решение первой краевой задачи для бесконечного клина дается формулой из разд. 3.1.2-24 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\varphi_0} \int_0^{\infty} \Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau) G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau, \qquad (7)$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

2°. Решение второй краевой задачи для бесконечного клина дается формулой из разд. 3.1.2-25 с дополнительным слагаемым (7).

3.2.2-8. Область: $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, $0 \leqslant z < \infty$. Различные краевые задачи.

1°. Решение первой краевой задачи для полубесконечного клина дается формулой из разд. 3.1.2-26 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t \int_0^{\infty} \int_0^{\varphi_0} \int_0^{\infty} \Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau) G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau, \qquad (8)$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

2°. Решение второй краевой задачи для полубесконечного клина дается формулой из разд. 3.1.2-27 с дополнительным слагаемым (8).

3°. Решения смешанных краевых задач для полубесконечного клина дается формулами из разд. 3.1.2-28 с дополнительными слагаемыми вида (8).

3.2.2-9. Область: $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Различные краевые задачи.

1°. Решение первой краевой задачи для клиновидной области конечной толщины дается формулой из разд. 3.1.2-29 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t \int_0^l \int_0^{\varphi_0} \int_0^{\infty} \Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau) G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau, \qquad (9)$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

2°. Решение второй краевой задачи для клиновидной области конечной толщины дается формулой из разд. 3.1.2-30 с дополнительным слагаемым (9).

3°. Решения смешанных краевых задач для клиновидной области конечной толщины дается формулами из разд. 3.1.2-31 с дополнительными слагаемыми вида (9).

3.2.2-10. Различные краевые задачи для цилиндрического сектора.

1°. Решение первой краевой задачи для неограниченного цилиндрического сектора ($0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, $-\infty < z < \infty$) дается формулой из разд. 3.1.2-32 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\varphi_0} \int_0^R \Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau) G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\xi\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\tau,$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

2°. Решение первой краевой задачи для полуограниченного цилиндрического сектора ($0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, $0 \leqslant z < \infty$) дается формулой из разд. 3.1.2-33 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t \int_0^{\infty} \int_0^{\varphi_0} \int_0^R \Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau) G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\xi\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\tau, \tag{10}$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

3°. Решение смешанной краевой задачи для полуограниченного цилиндрического сектора ($0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, $0 \leqslant z < \infty$) дается формулой из разд. 3.1.2-34 с дополнительным слагаемым (10).

4°. Решение первой краевой задачи для цилиндрического сектора конечной толщины ($0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, $0 \leqslant z \leqslant l$) дается формулой из разд. 3.1.2-35 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t \int_0^{l} \int_0^{\varphi_0} \int_0^R \Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau) G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\xi\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\tau, \tag{11}$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

3°. Решение смешанной краевой задачи для цилиндрического сектора конечной толщины формулой из разд. 3.1.2-36 с дополнительным слагаемым (11).

3.2.3. Задачи в сферической системе координат

Уравнение теплопроводности с объемным источником в сферической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial w}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right] + \Phi(r,\theta,\varphi,t).$$

Одномерные задачи с центральной симметрией, которые имеют решения $w = w(r,t)$, рассматриваются в разд. 1.2.4.

3.2.3-1. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Различные краевые задачи.

1°. Решение первой краевой задачи для сферической области дается формулой из разд. 3.1.3-1 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R \Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau) G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\xi^2 \sin\eta\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\tau, \tag{1}$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

2°. Решение второй краевой задачи для сферической области дается формулой из 3.1.3-2 с дополнительным слагаемым (1).

3°. Решение третьей краевой задачи для сферической области дается суммой решения, указанного в разд. 3.1.3-3, и выражения (1).

3.2.3-2. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Различные краевые задачи.

1°. Решение первой краевой задачи для сферического слоя дается формулой из разд. 3.1.3-4 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{R_1}^{R_2} \Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau) G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\xi^2 \sin\eta\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\tau, \tag{2}$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

2°. Решение второй краевой задачи для сферического слоя дается формулой из 3.1.3-5 с дополнительным слагаемым (2).

3°. Решение третьей краевой задачи для сферического слоя дается суммой решения, указанного в разд. 3.1.3-6, и выражения (2).

3.2.3-3. Область: $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Первая краевая задача.

Решение первой краевой задачи для бесконечного конуса дается формулой из разд. 3.1.3-7 с дополнительным слагаемым
$$\int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} \int_0^{\infty} \Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau) G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\xi^2 \sin\eta \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \, d\tau,$$
которое учитывает неоднородность уравнения.

3.3. Другие уравнения с тремя пространственными переменными

3.3.1. Уравнения, содержащие произвольные параметры

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + (b_1 x + b_2 y + b_3 z + c)w.$

Преобразование
$$w(x,y,z,t) = \exp\Bigl[(b_1 x + b_2 y + b_3 z)t + \tfrac{1}{3}a(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)t^3 + ct\Bigr]u(\xi,\eta,\zeta,t),$$
$$\xi = x + ab_1 t^2, \quad \eta = y + ab_2 t^2, \quad \zeta = z + ab_3 t^2$$
приводит к трехмерному уравнению теплопроводности $\partial_t u = a(\partial_{\xi\xi} u + \partial_{\eta\eta} u + \partial_{\zeta\zeta} u)$, которое рассматривается в разд. 3.1.1.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) - \bigl[b(x^2 + y^2 + z^2) + c\bigr]w, \qquad b > 0.$

Преобразование (A — любое)
$$w(x,y,z,t) = \exp\Bigl[\frac{\sqrt{ab}}{2a}(x^2 + y^2 + z^2) + \bigl(3\sqrt{ab} - c\bigr)t\Bigr]u(\xi,\eta,\zeta,\tau),$$
$$\xi = x\exp\bigl(2\sqrt{ab}\,t\bigr), \quad \eta = y\exp\bigl(2\sqrt{ab}\,t\bigr), \quad \zeta = z\exp\bigl(2\sqrt{ab}\,t\bigr), \quad \tau = \frac{1}{4\sqrt{ab}}\exp\bigl(4\sqrt{ab}\,t\bigr) + A$$
приводит к трехмерному уравнению теплопроводности $\partial_\tau u = a(\partial_{\xi\xi} u + \partial_{\eta\eta} u + \partial_{\zeta\zeta} u)$, которое рассматривается в разд. 3.1.1.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \bigl[-b(x^2 + y^2 + z^2) + c_1 x + c_2 y + c_3 z + s\bigr]w.$

Частный случай уравнения 3.3.2.3 при $f_k(t) = c_k$, $g(t) = s$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + b_1\dfrac{\partial w}{\partial x} + b_2\dfrac{\partial w}{\partial y} + b_3\dfrac{\partial w}{\partial z} + cw.$

Это уравнение описывает нестационарное поле температуры (концентрации) в движущейся с постоянной скоростью среде при наличии объемного выделения (поглощения) тепла, которое пропорционально температуре.

Замена
$$w(x,y,z,t) = \exp\bigl(A_1 x + A_2 y + A_3 z + Bt\bigr)U(x,y,z,t),$$
где
$$A_1 = -\frac{b_1}{2a}, \quad A_2 = -\frac{b_2}{2a}, \quad A_3 = -\frac{b_3}{2a}, \quad B = c - \frac{1}{4a}\bigl(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\bigr),$$
приводит к трехмерному уравнению теплопроводности $\partial_t U = a\Delta_3 U$, которое рассматривается в разд. 3.1.1.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) - by\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Это уравнение встречается в задачах конвективного тепло- и массопереноса в простом сдвиговом потоке.

Фундаментальное решение:
$$\mathscr{E}(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{(4\pi at)^{3/2}\sqrt{(1+\frac{1}{12}b^2t^2)}}\exp\biggl\{-\frac{[x-\xi-\frac{1}{2}bt(y+\eta)]^2}{4at(1+\frac{1}{12}b^2t^2)} - \frac{(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4at}\biggr\}.$$

⊙ *Литература*: Е. А. Новиков (1958).

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\Big) + b_1 x\dfrac{\partial w}{\partial x} + b_2 y\dfrac{\partial w}{\partial x} + b_3 z\dfrac{\partial w}{\partial z} + \Phi(x,y,z,t).$

Это уравнение встречается в задачах конвективного массо- и теплопереноса в линейном сдвиговом потоке.

Область: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$. Задача Коши. Задано начальное условие:

$$w = f(x,y,z) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Решение:

$$w(x,y,z,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,dx\,dy\,dz + \\ + \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\,dx\,dy\,dz\,d\tau,$$

где

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) = H(x,\xi,t;b_1)H(y,\eta,t;b_2)H(z,\zeta,t;b_3),$$
$$H(x,\xi,t;b) = \Big[\frac{2\pi a}{b}\big(e^{2bt}-1\big)\Big]^{-1/2}\exp\Big[-\frac{b\big(xe^{bt}-\xi\big)^2}{2a\big(e^{2bt}-1\big)}\Big].$$

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\Big) + (b_1 x + c_1)\dfrac{\partial w}{\partial x} + (b_2 y + c_2)\dfrac{\partial w}{\partial y} + {}$
$\qquad + (b_3 z + c_3)\dfrac{\partial w}{\partial z} + (s_1 x + s_2 y + s_3 z + p)w.$

Частный случай уравнения 3.3.2.5.

8. $i\hbar\dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\hbar^2}{2m}\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\Big) = 0.$

Трехмерное уравнение Шредингера, $i^2 = -1$.

Фундаментальное решение:

$$\mathscr{E}(x,y,z,t) = -\frac{i}{\hbar}\Big(\frac{m}{2\pi\hbar t}\Big)^{3/2}\exp\Big[i\frac{m}{2\hbar t}(x^2+y^2+z^2) - i\frac{3\pi}{4}\Big].$$

⊙ *Литература*: В. С. Владимиров, В. П. Михайлов, А. А. Вашарин и др. (1974, стр. 120).

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(by^m\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big) + \dfrac{\partial}{\partial z}\Big(cz^k\dfrac{\partial w}{\partial z}\Big).$

Это уравнение описывает нестационарные процессы тепло- и массопереноса в неоднородных (анизотропных) средах. Оно имеет решения с разделяющимися переменными и допускает решения с неполным разделением переменных (см. разд. 0.9.2-1). Кроме того, при $n \neq 2$, $m \neq 2$, $k \neq 2$ существуют частные решения вида

$$w = w(\xi,t), \qquad \xi^2 = 4\Big[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{z^{2-k}}{c(2-k)^2}\Big],$$

где функция $w(\xi,t)$ определяется одномерным нестационарным уравнением

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{A}{\xi}\frac{\partial w}{\partial \xi}, \qquad A = 2\Big(\frac{1}{2-n} + \frac{1}{2-m} + \frac{1}{2-k}\Big) - 1.$$

О решениях этого уравнения см. разд. 1.2.1, 1.2.3, 1.2.5.

3.3.2. Уравнения, содержащие произвольные функции

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\Big) + f(t)w.$

Это уравнение описывает развитие трехмерных тепловых процессов в неподвижных средах или твердых телах с постоянным коэффициентом температуропроводности при наличии нестационарного объемного тепловыделения, которое пропорционально температуре.

Замена $w(x,y,z,t) = \exp\Big[\displaystyle\int f(t)\,dt\Big]U(x,y,z,t)$ приводит к обычному уравнению теплопроводности $\partial_t U = a\Delta_3 U$, которое рассматривается в разд. 3.1.1.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\Big) + \Big[xf_1(t) + yf_2(t) + zf_3(t) + g(t)\Big]w.$

Преобразование

$$w(x,y,z,t) = \exp\Big[xF_1(t) + yF_2(t) + zF_3(t) + a\int\big[F_1^2(t)+F_2^2(t)+F_3^2(t)\big]\,dt + \int g(t)\,dt\Big]u(\xi,\eta,\zeta,t),$$
$$\xi = x + 2a\int F_1(t)\,dt,\quad \eta = y + 2a\int F_2(t)\,dt,\quad \zeta = z + 2a\int F_3(t)\,dt,\quad F_k(t) = \int f_k(t)\,dt$$

приводит к трехмерному уравнению теплопроводности $\partial_t u = a\big(\partial_{\xi\xi}u + \partial_{\eta\eta}u + \partial_{\zeta\zeta}u\big)$, которое рассматривается в разд. 3.1.1.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\Big) + \big[-b(x^2+y^2+z^2) + xf_1(t) + yf_2(t) + zf_3(t) + g(t)\big]w.$

1°. Случай $b > 0$. Преобразование

$$w(x,y,z,t) = u(\xi,\eta,\zeta,\tau)\exp\Big[\frac{\sqrt{ab}}{2a}\,(x^2+y^2+z^2)\Big],$$
$$\xi = x\exp\big(2\sqrt{ab}\,t\big),\quad \eta = y\exp\big(2\sqrt{ab}\,t\big),\quad \zeta = z\exp\big(2\sqrt{ab}\,t\big),\quad \tau = \frac{1}{4\sqrt{ab}}\exp\big(4\sqrt{ab}\,t\big) + A,$$

где A — произвольная постоянная, приводит к уравнению вида 3.3.2.2:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}\Big) + \Big[\xi F_1(\tau) + \eta F_2(\tau) + \zeta F_3(\tau) + G(\tau)\Big]u,$$
$$F_k(\tau) = \frac{1}{(c\tau)^{3/2}}f_k\Big(\frac{\ln(c\tau)}{c}\Big),\quad G(\tau) = \frac{1}{c\tau}g\Big(\frac{\ln(c\tau)}{c}\Big) + \frac{3}{4\tau},\quad c = 4\sqrt{ab},\quad k = 1,\,2,\,3.$$

2°. Случай $b < 0$. Преобразование

$$w(x,y,z,t) = v(\xi_1,\eta_1,\zeta_1,\tau_1)\exp\Big[\frac{\sqrt{-ab}}{2a}(x^2+y^2+z^2)\operatorname{tg}\big(2\sqrt{-ab}\,t\big)\Big],$$
$$\xi_1 = \frac{x}{\cos\big(2\sqrt{-ab}\,t\big)},\quad \eta_1 = \frac{y}{\cos\big(2\sqrt{-ab}\,t\big)},\quad \zeta_1 = \frac{z}{\cos\big(2\sqrt{-ab}\,t\big)},\quad \tau_1 = \frac{1}{2\sqrt{-ab}}\operatorname{tg}\big(2\sqrt{-ab}\,t\big)$$

также приводит к уравнению вида 3.3.2.2 для функции $v = v(\xi_1,\eta_1,\zeta_1,\tau_1)$ (это уравнение не выписывается).

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a_1(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_2(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_3(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \Phi(x,y,z,t).$

Здесь $0 < a_k(t) < \infty$; $k = 1,\,2,\,3$.

Область: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$. Задача Коши.

Задано начальное условие:

$$w = f(x,y,z) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Решение:

$$w(x,y,z,t) = \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t,\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau +$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t,0)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

где

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t,\tau) = \frac{1}{8\pi^{3/2}\sqrt{T_1T_2T_3}}\exp\Big[-\frac{(x-\xi)^2}{4T_1} - \frac{(y-\eta)^2}{4T_2} - \frac{(z-\zeta)^2}{4T_3}\Big],$$
$$T_1 = \int_\tau^t a_1(\sigma)\,d\sigma,\quad T_2 = \int_\tau^t a_2(\sigma)\,d\sigma,\quad T_3 = \int_\tau^t a_3(\sigma)\,d\sigma.$$

См. также более общее уравнение 3.4.3.3, где рассматриваются другие краевые задачи.

5. $$\frac{\partial w}{\partial t}=a_1(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+a_2(t)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+a_3(t)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\big[b_1(t)x+c_1(t)\big]\frac{\partial w}{\partial x}+$$
$$+\big[b_2(t)y+c_2(t)\big]\frac{\partial w}{\partial y}+\big[b_3(t)z+c_3(t)\big]\frac{\partial w}{\partial z}+\big[s_1(t)x+s_2(t)y+s_3(t)z+p(t)\big]w.$$

Преобразование

$$w(x,y,z,t)=\exp\big[f_1(t)x+f_2(t)y+f_3(t)z+g(t)\big]u(\xi,\eta,\zeta,t),$$
$$\xi=h_1(t)x+r_1(t),\quad \eta=h_2(t)y+r_2(t),\quad \zeta=h_3(t)z+r_3(t),$$

где

$$h_k(t)=A_k\exp\Big[\int b_k(t)\,dt\Big],$$
$$f_k(t)=h_k(t)\int\frac{s_k(t)}{h_k(t)}\,dt+B_kh_k(t),$$
$$r_k(t)=\int\big[2a_k(t)f_k(t)+c_k(t)\big]h_k(t)\,dt+C_k,$$
$$g(t)=\int\sum_{k=1}^{3}\big[a_k(t)f_k^2(t)+c_k(t)f_k(t)\big]\,dt+\int p(t)\,dt+D,$$

($k=1,\ 2,\ 3$; A_k, B_k, C_k, D — произвольные постоянные) приводит к уравнению вида 3.3.2.4:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a_1(t)h_1^2(t)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+a_2(t)h_2^2(t)\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+a_3(t)h_3^2(t)\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}.$$

6. $$\frac{\partial w}{\partial t}=a_1(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+a_2(t)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+a_3(t)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\big[b_1(t)x+c_1(t)\big]\frac{\partial w}{\partial x}+\big[b_2(t)y+c_2(t)\big]\frac{\partial w}{\partial y}+$$
$$+\big[b_3(t)z+c_3(t)\big]\frac{\partial w}{\partial z}+\big[s_1(t)x^2+s_2(t)y^2+s_3(t)z^2+p_1(t)x+p_2(t)y+p_3(t)z+q(t)\big]w.$$

Замена

$$w(x,y,z,t)=\exp\big[f_1(t)x^2+f_2(t)y^2+f_3(t)z^2\big]u(x,y,z,t),$$

где функции $f_k=f_k(t)$ удовлетворяют уравнениям Риккати

$$f_k'=4a_k(t)f_k^2+2b_k(t)f_k+s_k(t)\qquad (k=1,\ 2,\ 3),$$

приводит к уравнению вида 3.3.2.5 для $u=u(x,y,z,t)$.

7. $$\frac{\partial w}{\partial t}+\sum_{n=1}^{2}\big[f_n(t)+g_n(t)x_3\big]\frac{\partial w}{\partial x_n}-a\frac{\partial w}{\partial x_3}=\sum_{n,m=1}^{2}K_{nm}(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x_n\partial x_m}+K_{33}(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x_3^2}.$$

Уравнение турбулентной диффузии. Описывает диффузию примеси в горизонтальном потоке, компоненты скорости которого линейно зависят от высоты.

Фундаментальное решение:

$$\mathscr{E}(x_1,x_2,x_3,\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\frac{1}{(4\pi)^{3/2}\sqrt{\det|T|}}\exp\Bigg[-\frac14\sum_{i,j=1}^{3}T_{ij}^{-1}(t)y_iy_j\Bigg],\qquad T_{ij}(t)=\int_0^t S_{ij}(\tau)\,d\tau.$$

Здесь использованы обозначения (n, $m=1,\ 2$):

$$y_n=x_n-\xi_n-F_n(t)-x_3G_n(t)-a\int_0^t(t-\tau)g_n(\tau)\,d\tau,\quad y_3=x_3-\xi_3+at,$$
$$S_{nm}(t)=K_{nm}(t)+K_{33}(t)G_n(t)G_m(t),\quad S_{n3}(t)=S_{3n}(t)=-K_{33}(t)G_n(t),$$
$$S_{33}(t)=K_{33}(t),\quad F_n(t)=\int_0^t f_n(t)\,dt,\quad G_n(t)=\int_0^t g_n(t)\,dt,$$

$\det|T|$ — определитель матрицы $\mathbf{T}$ с элементами $T_{ij}(t)$, $T_{ij}^{-1}(t)$ — элементы матрицы, обратной к $\mathbf{T}$. Считается, что выполнены неравенства: $T_{11}(t)>0$, $T_{11}(t)T_{22}(t)-T_{12}^2(t)>0$, $\det|T|>0$.

⊙ *Литература*: Е. А. Новиков (1958).

3.3.3. Уравнения вида $\rho(x,y,z)\dfrac{\partial w}{\partial t} = \operatorname{div}[a(x,y,z)\nabla w] - q(x,y,z)w + \Phi(x,y,z,t)$

Уравнения этого вида часто встречаются в теории тепло- и массопереноса. При записи уравнения использовано краткое обозначение:

$$\operatorname{div}\bigl[a(\mathbf{r})\nabla w\bigr] = \frac{\partial}{\partial x}\Bigl[a(\mathbf{r})\frac{\partial w}{\partial x}\Bigr] + \frac{\partial}{\partial y}\Bigl[a(\mathbf{r})\frac{\partial w}{\partial y}\Bigr] + \frac{\partial}{\partial z}\Bigl[a(\mathbf{r})\frac{\partial w}{\partial z}\Bigr], \qquad \mathbf{r} = \{x,y,z\}.$$

Задачи для данного уравнения будем рассматривать в односвязной ограниченной области V с гладкой поверхностью S. Далее считается, что $\rho(\mathbf{r}) > 0$, $a(\mathbf{r}) > 0$, $q(\mathbf{r}) \geqslant 0$.

3.3.3-1. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$w = f(\mathbf{r}) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},$$
$$w = g(\mathbf{r},t) \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \in S \quad \text{(граничное условие)}.$$

Решение:

$$w(\mathbf{r},t) = \int_0^t \int_V \Phi(\boldsymbol{\xi},\tau)\mathcal{G}(\mathbf{r},\boldsymbol{\xi},t-\tau)\,dV_\xi\,d\tau + \int_V f(\boldsymbol{\xi})\rho(\boldsymbol{\xi})\mathcal{G}(\mathbf{r},\boldsymbol{\xi},t)\,dV_\xi -$$
$$- \int_0^t \int_S g(\boldsymbol{\xi},\tau)a(\boldsymbol{\xi})\Bigl[\frac{\partial}{\partial N_\xi}\mathcal{G}(\mathbf{r},\boldsymbol{\xi},t-\tau)\Bigr]\,dS_\xi\,d\tau. \qquad (1)$$

Здесь модифицированная функция Грина определяется по формуле

$$\mathcal{G}(\mathbf{r},\boldsymbol{\xi},t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(\mathbf{r})u_n(\boldsymbol{\xi})}{\|u_n\|^2}\exp(-\lambda_n t), \qquad \|u_n\|^2 = \int_V \rho(\mathbf{r})u_n^2(\mathbf{r})\,dV, \qquad \boldsymbol{\xi} = \{\xi_1,\xi_2,\xi_3\}, \quad (2)$$

где λ_n и $u_n(\mathbf{r})$ — собственные значения и собственные функции задачи Штурма — Лиувилля для эллиптического уравнения второго порядка с однородным граничным условием первого рода:

$$\operatorname{div}\bigl[a(\mathbf{r})\nabla u\bigr] - q(\mathbf{r})u + \lambda\rho(\mathbf{r})u = 0, \qquad (3)$$
$$u = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \in S. \qquad (4)$$

Интегрирование в решении (1) ведется по переменным ξ_1, ξ_2, ξ_3, а $\frac{\partial}{\partial N_\xi}$ — производная по внешней нормали к поверхности S относительно этих же переменных.

Общие свойства задачи Штурма — Лиувилля (3)–(4):

1°. Существует счетное множество собственных значений. Все собственные значения вещественны и могут быть упорядочены $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \cdots$, причем $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$ (поэтому может быть лишь конечное число отрицательных собственных значений).

2°. При $\rho(\mathbf{r}) > 0$, $a(\mathbf{r}) > 0$, $q(\mathbf{r}) \geqslant 0$ все собственные значения положительны: $\lambda_n > 0$.

3°. Собственные функции определяются с точностью до постоянного множителя. Собственные функции $u_n(\mathbf{r})$ и $u_m(\mathbf{r})$, отвечающие различным собственным значениям λ_n и λ_m, ортогональны между собой с весом $\rho(\mathbf{r})$ в области V:

$$\int_V \rho(\mathbf{r})u_n(\mathbf{r})u_m(\mathbf{r})\,dV = 0 \quad \text{при} \quad n \neq m.$$

4°. Произвольная функция $F(\mathbf{r})$, дважды непрерывно дифференцируемая и удовлетворяющая граничному условию задачи Штурма — Лиувилля ($F = 0$ при $\mathbf{r} \in S$), разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям:

$$F(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n u_n(\mathbf{r}), \qquad F_n = \frac{1}{\|u_n\|^2}\int_V F(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r})u_n(\mathbf{r})\,dV,$$

где формула для $\|u_n\|^2$ приведена в (2).

Замечание. В трехмерной задаче каждому собственному значению λ_n вообще говоря соответствует конечное число линейно независимых собственных функций $u_n^{(1)}, u_n^{(2)}, \ldots, u_n^{(m)}$. Эти функции всегда можно заменить такими их линейными комбинациями

$$\bar{u}_n^{(k)} = A_{k,1}u_n^{(1)} + \cdots + A_{k,k-1}u_n^{(k-1)} + u_n^{(k)}, \qquad k = 1,\,2,\,\ldots,\,m,$$

что $\bar{u}_n^{(1)}, \bar{u}_n^{(2)}, \ldots, \bar{u}_n^{(m)}$ будут уже попарно ортогональны. Поэтому без ограничения общности можно считать, что все собственные функции ортогональны.

3.3.3-2. Вторая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$w = f(\mathbf{r}) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},$$
$$\frac{\partial w}{\partial N} = g(\mathbf{r}, t) \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \in S \quad \text{(граничное условие)}.$$

Решение:

$$w(\mathbf{r}, t) = \int_0^t \int_V \Phi(\boldsymbol{\xi}, \tau) \mathcal{G}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}, t - \tau) \, dV_\xi \, d\tau + \int_V f(\boldsymbol{\xi}) \rho(\boldsymbol{\xi}) \mathcal{G}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}, t) \, dV_\xi +$$
$$+ \int_0^t \int_S g(\boldsymbol{\xi}, \tau) a(\boldsymbol{\xi}) \mathcal{G}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}, t - \tau) \, dS_\xi \, d\tau. \tag{5}$$

Здесь модифицированная функция Грина определяется по формуле (2), где λ_n и $u_n(\mathbf{r})$ — собственные значения и собственные функции задачи Штурма — Лиувилля для эллиптического уравнения второго порядка (3) с однородным граничным условием второго рода

$$\frac{\partial u}{\partial N} = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \in S. \tag{6}$$

При $q(\mathbf{r}) > 0$ общие свойства задачи на собственные значения (3), (6) будут такими же, как и для первой краевой задачи (все $\lambda_n > 0$).

3.3.3-3. Третья краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$w = f(\mathbf{r}) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},$$
$$\frac{\partial w}{\partial N} + k(\mathbf{r}) w = g(\mathbf{r}, t) \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \in S \quad \text{(граничное условие)}.$$

Решение третьей краевой задачи описывается формулами (5) и (2), где λ_n и $u_n(\mathbf{r})$ — собственные значения и собственные функции задачи Штурма — Лиувилля для эллиптического уравнения второго порядка (3) с однородным граничным условием третьего рода

$$\frac{\partial u}{\partial N} + k(\mathbf{r}) u = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \in S. \tag{7}$$

При $q(\mathbf{r}) \geqslant 0$, $k(\mathbf{r}) > 0$ общие свойства задачи на собственные значения (3), (7) будут такими же, как и для первой краевой задачи (см. разд. 3.3.3-1).

Пусть $k(\mathbf{r}) = k$. Обозначим функции Грина второй и третьей краевых задач соответственно $G_2(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}, t)$ и $G_3(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}, t, k)$. При $q(\mathbf{r}) > 0$ справедливо предельное соотношение: $G_2(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}, t) = \lim\limits_{k \to 0} G_3(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}, t, k)$.

⊙ *Литература к разделу 3.3.3*: В. С. Владимиров (1971, стр. 473–474, 502–509), А. Д. Полянин (2000 *a*, *c*).

3.4. Уравнения с n пространственными переменными

3.4.1. Уравнение вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\Delta_n w + \Phi(x_1, \ldots, x_n, t)$

Это n-мерное неоднородное уравнение теплопроводности, которое в декартовой системе координат записывается так:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2} + \Phi(\mathbf{x}, t), \qquad \mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Решение различных задач для этого уравнения строится на основе неполного разделения переменных (см. разд. 0.6.1-2 и 0.9.2-1) с учетом результатов разд. 1.1.1 и 1.1.2. Некоторые примеры решения таких задач даны ниже в разд. 3.4.1-2 — 3.4.1-4.

3.4.1-1. Однородное уравнение (при $\Phi \equiv 0$).

1°. Частные решения:

$$w(\mathbf{x},t) = A\exp\Bigl(\sum_{m=1}^{n} k_m x_m + at\sum_{m=1}^{n} k_m^2\Bigr),$$

$$w(\mathbf{x},t) = A\exp\Bigl(-at\sum_{m=1}^{n} k_m^2\Bigr)\prod_{m=1}^{n}\cos(k_m x_m + C_m),$$

$$w(\mathbf{x},t) = A\exp\Bigl(-\sum_{m=1}^{n} k_m x_m\Bigr)\prod_{m=1}^{n}\cos(k_m x_m - 2ak_m^2 t + C_m),$$

$$w(\mathbf{x},t) = \frac{A}{(t-t_0)^{n/2}}\exp\biggl[-\frac{1}{4a(t-t_0)}\sum_{m=1}^{n}(x_m - C_m)^2\biggr],$$

$$w(\mathbf{x},t) = A\prod_{m=1}^{n}\operatorname{erf}\Bigl(\frac{x_m - C_m}{2\sqrt{at}}\Bigr),$$

где $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$; A, k_m, C_m, t_0 — произвольные постоянные.

2°. Фундаментальное решение:

$$\mathscr{E}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{\bigl(2\sqrt{\pi a t}\,\bigr)^n}\exp\Bigl(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4at}\Bigr), \qquad |\mathbf{x}|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

3°. Пусть $w = w(x_1, \ldots, x_n, t)$ — некоторое решение однородного уравнения. Тогда функции

$$w_1 = Aw(\pm\lambda x_1 + C_1, \ldots, \pm\lambda x_n + C_n,\ \lambda^2 t + C_{n+1}),$$

$$w_2 = A\exp\biggl(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k + at\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2\biggr)w(x_1 + 2a\lambda_1 t + C_1, \ldots, x_n + 2a\lambda_n t + C_n,\ t + C_{n+1}),$$

$$w_3 = \frac{A}{|\delta + \beta t|^{n/2}}\exp\biggl[-\frac{\beta}{4a(\delta + \beta t)}\sum_{k=1}^{n} x_k^2\biggr]w\Bigl(\frac{x_1}{\delta + \beta t}, \ldots, \frac{x_n}{\delta + \beta t}, \frac{\gamma + \lambda t}{\delta + \beta t}\Bigr), \qquad \lambda\delta - \beta\gamma = 1,$$

где A, $C_1, \ldots, C_{n+1}$, λ, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ β, δ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения. Знаки при λ в формуле для w_1 выбираются произвольно независимо друг от друга.

3.4.1-2. Область: $\mathcal{R}^n = \{-\infty < x_k < \infty;\ k = 1, \ldots, n\}$. Задача Коши.

Задано начальное условие:

$$w = f(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Решение:

$$w(\mathbf{x},t) = \frac{1}{\bigl(2\sqrt{\pi a t}\,\bigr)^n}\int_{\mathcal{R}^n} f(\mathbf{y})\exp\Bigl(-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4at}\Bigr)d\mathbf{y} + {}$$
$$+ \int_0^t\int_{\mathcal{R}^n}\frac{\Phi(\mathbf{y},\tau)}{\bigl(2\sqrt{\pi a(t-\tau)}\,\bigr)^n}\exp\Bigl(-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4a(t-\tau)}\Bigr)d\mathbf{y}\,d\tau,$$

где $\mathbf{y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$, $|\mathbf{x}-\mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$, $d\mathbf{y} = dy_1\,dy_2\,\ldots\,dy_n$.

⊙ *Литература*: В. С. Владимиров (1971, стр. 264).

3.4.1-3. Область: $V = \{0 \leqslant x_k \leqslant l_k;\ k = 1, \ldots, n\}$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
&w = f(\mathbf{x}) && \text{при} && t = 0 && \text{(начальное условие)},\\
&w = g_k(\mathbf{x},t) && \text{при} && x_k = 0 && \text{(граничные условия)},\\
&w = h_k(\mathbf{x},t) && \text{при} && x_k = l_k && \text{(граничные условия)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$w(\mathbf{x},t)=\int_0^t\int_V\Phi(\mathbf{y},\tau)G(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\,d\mathbf{y}\,d\tau+\int_V f(\mathbf{y})G(\mathbf{x},\mathbf{y},t)\,d\mathbf{y}+$$
$$+a\sum_{k=1}^n\int_0^t\int_{S^{(k)}}\Bigl[g_k(\mathbf{y},\tau)\frac{\partial}{\partial y_k}G(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\Bigr]_{y_k=0}dS_y^{(k)}\,d\tau-$$
$$-a\sum_{k=1}^n\int_0^t\int_{S^{(k)}}\Bigl[h_k(\mathbf{y},\tau)\frac{\partial}{\partial y_k}G(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\Bigr]_{y_k=l_k}dS_y^{(k)}\,d\tau,$$

где использованы обозначения

$dS_y^{(k)}=dy_1\dots dy_{k-1}\,dy_{k+1}\dots dy_n,\quad S^{(k)}=\{0\leqslant y_m\leqslant l_m$ при $m=1,\,\dots,\,k-1,\,k+1,\,\dots,\,n\}$.

Функцию Грина можно представить в виде произведения

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y},t)=\prod_{k=1}^n G_k(x_k,y_k,t),\tag{1}$$

где $G_k(x_k,y_k,t)$ функции Грина соответствующих одномерных краевых задач (см. разд. 1.1.2-5):

$$G_k(x_k,y_k,t)=\frac{2}{l_k}\sum_{m=1}^\infty\sin\Bigl(\frac{m\pi x}{l_k}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{m\pi\xi}{l_k}\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{am^2\pi^2t}{l_k^2}\Bigr).$$

3.4.1-4. Область: $V=\{0\leqslant x_k\leqslant l_k;\ k=1,\,\dots,\,n\}$. Вторая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w&=f(\mathbf{x}) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_{x_k}w&=g_k(\mathbf{x},t) &&\text{при}\quad x_k=0 &&\text{(граничные условия)},\\
\partial_{x_k}w&=h_k(\mathbf{x},t) &&\text{при}\quad x_k=l_k &&\text{(граничные условия)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$w(\mathbf{x},t)=\int_0^t\int_V\Phi(\mathbf{y},\tau)G(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\,d\mathbf{y}\,d\tau+\int_V f(\mathbf{y})G(\mathbf{x},\mathbf{y},t)\,d\mathbf{y}-$$
$$-a\sum_{k=1}^n\int_0^t\int_{S^{(k)}}\bigl[g_k(\mathbf{y},\tau)G(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\bigr]_{y_k=0}dS_y^{(k)}\,d\tau+\tag{2}$$
$$+a\sum_{k=1}^n\int_0^t\int_{S^{(k)}}\bigl[h_k(\mathbf{y},\tau)G(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\bigr]_{y_k=l_k}dS_y^{(k)}\,d\tau.$$

Функцию Грина можно представить в виде произведения (1) соответствующих одномерных функций Грина вида (см. разд. 1.1.2-6):

$$G_k(x_k,y_k,t)=\frac{1}{l_k}+\frac{2}{l_k}\sum_{m=1}^\infty\cos\Bigl(\frac{m\pi x}{l_k}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{m\pi\xi}{l_k}\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{am^2\pi^2t}{l_k^2}\Bigr).$$

3.4.2. Другие уравнения, содержащие произвольные параметры

1. $\displaystyle\frac{\partial w}{\partial t}=a\sum_{k=1}^n\frac{\partial^2w}{\partial x_k^2}+\Bigl(c+\sum_{k=1}^n b_kx_k\Bigr)w.$

Частный случай уравнения 3.4.3.1. Преобразование

$$w(x_1,\dots,x_n,t)=\exp\Bigl(t\sum_{k=1}^n b_kx_k+\tfrac13at^3\sum_{k=1}^n b_k^2+ct\Bigr)u(\xi_1,\dots,\xi_n,t),\qquad \xi_k=x_k+ab_kt^2$$

приводит к n-мерному уравнению теплопроводности $\partial_tu=a\sum\limits_{k=1}^n\partial_{\xi_k\xi_k}u$, которое рассматривается в разд. 3.4.1.

2. $$\frac{\partial w}{\partial t} = a\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2} - \Bigl(c + b\sum_{k=1}^{n} x_k^2\Bigr)w, \qquad b > 0.$$

Преобразование (A — любое)

$$w(x_1,\dots,x_n,t) = u(\xi_1,\dots,\xi_n,\tau)\exp\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}\,\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \bigl(n\sqrt{ab} - c\bigr)\,t\right],$$

$$\xi_1 = x_1\exp\bigl(2\sqrt{ab}\,t\bigr),\ \dots,\ \xi_n = x_n\exp\bigl(2\sqrt{ab}\,t\bigr), \quad \tau = \frac{1}{4\sqrt{ab}}\exp\bigl(4\sqrt{ab}\,t\bigr) + A$$

приводит к n-мерному уравнению теплопроводности $\partial_\tau u = a\sum\limits_{k=1}^{n}\partial_{\xi_k\xi_k}u$, которое рассматривается в разд. 3.4.1.

3. $$\frac{\partial w}{\partial t} = a\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2} + \Bigl(-b\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \sum_{k=1}^{n} c_k x_k + s\Bigr)w.$$

Частный случай уравнения 3.4.3.2 при $f_k(t) = c_k$, $g(t) = s$.

4. $$\frac{\partial w}{\partial t} = a\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2} + \sum_{k=1}^{n} b_k\frac{\partial w}{\partial x_k} + cw.$$

Замена

$$w(x_1,\dots,x_n,t) = \exp\Bigl(At - \frac{1}{2a}\sum_{k=1}^{n} b_k x_k\Bigr)U(x_1,\dots,x_n,t), \quad \text{где} \quad A = c - \frac{1}{4a}\sum_{k=1}^{n} b_k^2,$$

приводит к n-мерному уравнению теплопроводности $\partial_t U = a\Delta_n U$, которое рассматривается в разд. 3.4.1.

5. $$\frac{\partial w}{\partial t} = a\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2} + \sum_{k=1}^{n}(b_k x_k + c_k)\frac{\partial w}{\partial x_k} + \Bigl(\sum_{k=1}^{n} s_k x_k + p\Bigr)w.$$

Частный случай уравнения 3.4.3.4.

6. $$i\hbar\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2} = 0.$$

n-мерное уравнение Шредингера, $i^2 = -1$.

Фундаментальное решение:

$$\mathscr{E}(\mathbf{x},t) = -\frac{i}{\hbar}\Bigl(\frac{m}{2\pi\hbar t}\Bigr)^{n/2}\exp\Bigl(i\frac{m}{2\hbar t}|\mathbf{x}|^2 - i\frac{\pi n}{4}\Bigr), \qquad |\mathbf{x}|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2.$$

⊙ *Литература*: В. С. Владимиров, В. П. Михайлов, А. А. Вашарин и др. (1974, стр. 120).

3.4.3. Уравнения, содержащие произвольные функции

1. $$\frac{\partial w}{\partial t} = a\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2} + \Bigl[\sum_{k=1}^{n} x_k f_k(t) + g(t)\Bigr]w.$$

Преобразование

$$w(x_1,\dots,x_n,t) = \exp\left[\sum_{k=1}^{n} x_k F_k(t) + a\sum_{k=1}^{n}\int F_k^2(t)\,dt + G(t)\right]u(\xi_1,\dots,\xi_n,t),$$

$$\xi_k = x_k + 2a\int F_k(t)\,dt, \quad F_k(t) = \int f_k(t)\,dt, \quad G(t) = \int g(t)\,dt$$

приводит к n-мерному уравнению теплопроводности $\partial_t u = a\sum\limits_{k=1}^{n}\partial_{\xi_k\xi_k}u$, которое рассматривается в разд. 3.4.1.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_k^2} + \Big[-b\sum_{k=1}^{n}x_k^2 + \sum_{k=1}^{n}x_k f_k(t) + g(t)\Big]w.$

1°. Случай $b > 0$. Преобразование

$$w(x_1,\ldots,x_n,t) = u(\xi_1,\ldots,\xi_n,\tau)\exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right),$$

$$\xi_1 = x_1\exp\bigl(2\sqrt{ab}\,t\bigr),\ \ldots,\ \xi_n = x_n\exp\bigl(2\sqrt{ab}\,t\bigr),\quad \tau = \frac{1}{4\sqrt{ab}}\exp\bigl(4\sqrt{ab}\,t\bigr) + C,$$

где C — произвольная постоянная, приводит к уравнению вида 3.4.3.1:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k^2} + \Big[\sum_{k=1}^{n}\xi_k F_k(\tau) + G(\tau)\Big]u,$$

$$F_k(\tau) = \frac{1}{(c\tau)^{3/2}}f_k\Big(\frac{\ln(c\tau)}{c}\Big),\quad G(\tau) = \frac{1}{c\tau}g\Big(\frac{\ln(c\tau)}{c}\Big) + \frac{n}{4\tau},\quad c = 4\sqrt{ab}.$$

2°. Случай $b < 0$. Преобразование

$$w(x_1,\ldots,x_n,t) = v(z_1,\ldots,z_n,\tau)\exp\left[\frac{\sqrt{-b}}{2\sqrt{a}}\,\mathrm{tg}\bigl(2\sqrt{-ab}\,t\bigr)\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right],$$

$$z_1 = \frac{x_1}{\cos\bigl(2\sqrt{-ab}\,t\bigr)},\ \ldots,\ z_n = \frac{x_n}{\cos\bigl(2\sqrt{-ab}\,t\bigr)},\quad \tau = \frac{1}{2\sqrt{-ab}}\,\mathrm{tg}\bigl(2\sqrt{-ab}\,t\bigr)$$

также приводит к уравнению вида 3.4.3.1 (это уравнение не выписывается).

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n}a_k(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_k^2} + \Phi(x_1,\ldots,x_n,t).$

Решение различных задач для этого уравнения строится на основе неполного разделения переменных (см. разд. 0.6.1-2 и 0.9.2-1) с учетом результатов разд. 1.1.1 и 1.1.2. Некоторые примеры решения таких задач даны ниже. Считается, что $0 < a_k(t) < \infty$.

1°. Область: $\mathcal{R}^n = \{-\infty < x_k < \infty;\ k = 1,\ \ldots,\ n\}$. Задача Коши.
Задано начальное условие:

$$w = f(\mathbf{x})\quad\text{при}\quad t = 0.$$

Решение:

$$w(\mathbf{x},t) = \int_0^t\int_{\mathcal{R}^n}\Phi(\mathbf{y},\tau)G(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)\,d\mathbf{y}\,d\tau + \int_{\mathcal{R}^n}f(\mathbf{y})G(\mathbf{x},\mathbf{y},t,0)\,d\mathbf{y},$$

где

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau) = \frac{1}{2^n\pi^{n/2}\sqrt{T_1T_2\ldots T_n}}\exp\left[-\sum_{k=1}^{n}\frac{(x_k-y_k)^2}{4T_k}\right],\quad T_k = \int_\tau^t a_k(\eta)\,d\eta,$$

$$\mathbf{x} = \{x_1,\ldots,x_n\},\quad \mathbf{y} = \{y_1,\ldots,y_n\},\quad d\mathbf{y} = dy_1\,dy_2\,\ldots\,dy_n.$$

2°. Область: $V = \{0 \leqslant x_k \leqslant l_k;\ k = 1,\ \ldots,\ n\}$. Первая краевая задача.
Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} &w = f(\mathbf{x}) && \text{при}\quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ &w = g_k(\mathbf{x},t) && \text{при}\quad x_k = 0 && \text{(граничные условия)},\\ &w = h_k(\mathbf{x},t) && \text{при}\quad x_k = l_k && \text{(граничные условия)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x},t) &= \int_0^t\int_V\Phi(\mathbf{y},\tau)G(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)\,d\mathbf{y}\,d\tau + \int_V f(\mathbf{y})G(\mathbf{x},\mathbf{y},t)\,d\mathbf{y}\,+\\ &+\sum_{k=1}^{n}\int_0^t\int_{S^{(k)}}a_k(\tau)\Big[g_k(\mathbf{y},\tau)\frac{\partial}{\partial y_k}G(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)\Big]_{y_k=0}dS_y^{(k)}\,d\tau\,-\\ &-\sum_{k=1}^{n}\int_0^t\int_{S^{(k)}}a_k(\tau)\Big[h_k(\mathbf{y},\tau)\frac{\partial}{\partial y_k}G(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)\Big]_{y_k=l_k}dS_y^{(k)}\,d\tau, \end{aligned}$$

где использованы обозначения

$dS_y^{(k)} = dy_1 \ldots dy_{k-1}\, dy_{k+1} \ldots dy_n$, $\quad S^{(k)} = \{0 \leqslant y_m \leqslant l_m$ при $m = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n\}$.

Функцию Грина можно представить в виде произведения

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \tau) = \prod_{k=1}^{n} G_k(x_k, y_k, t, \tau), \tag{1}$$

где $G_k(x_k, y_k, t, \tau)$ функции Грина соответствующих одномерных краевых задач

$$G_k(x_k, y_k, t, \tau) = \frac{2}{l_k} \sum_{m=1}^{\infty} \sin\Bigl(\frac{m\pi x_k}{l_k}\Bigr) \sin\Bigl(\frac{m\pi y_k}{l_k}\Bigr) \exp\Bigl(-\frac{m^2\pi^2 T_k}{l_k^2}\Bigr), \quad T_k = \int_\tau^t a_k(\sigma)\, d\sigma. \tag{2}$$

3°. Область: $V = \{0 \leqslant x_k \leqslant l_k;\ k = 1, \ldots, n\}$. Вторая краевая задача.
Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(\mathbf{x}) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_{x_k} w &= g_k(\mathbf{x}, t) && \text{при} \quad x_k = 0 && \text{(граничные условия)},\\ \partial_{x_k} w &= h_k(\mathbf{x}, t) && \text{при} \quad x_k = l_k && \text{(граничные условия)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x}, t) = {} & \int_0^t \int_V \Phi(\mathbf{y}, \tau) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \tau)\, d\mathbf{y}\, d\tau + \int_V f(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)\, d\mathbf{y} - \\ & - \sum_{k=1}^{n} \int_0^t \int_{S^{(k)}} a_k(\tau) \bigl[g_k(\mathbf{y}, \tau) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \tau)\bigr]_{y_k=0}\, dS_y^{(k)}\, d\tau + \\ & + \sum_{k=1}^{n} \int_0^t \int_{S^{(k)}} a_k(\tau) \bigl[h_k(\mathbf{y}, \tau) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \tau)\bigr]_{y_k=l_k}\, dS_y^{(k)}\, d\tau. \end{aligned}$$

Функцию Грина можно представить в виде произведения (1) соответствующих одномерных функций Грина

$$G_k(x_k, y_k, t, \tau) = \frac{1}{l_k} + \frac{2}{l_k} \sum_{m=1}^{\infty} \cos\Bigl(\frac{m\pi x_k}{l_k}\Bigr) \cos\Bigl(\frac{m\pi y_k}{l_k}\Bigr) \exp\Bigl(-\frac{m^2\pi^2 T_k}{l_k^2}\Bigr), \quad T_k = \int_\tau^t a_k(\sigma)\, d\sigma.$$

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин (2000 *a*, *b*).

4. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n} a_k(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2} + \sum_{k=1}^{n} \Bigl[b_k(t) x_k + c_k(t)\Bigr] \frac{\partial w}{\partial x_k} + \Bigl[\sum_{k=1}^{n} s_k(t) x_k + p(t)\Bigr] w.$

Сделаем преобразование

$$w(x_1, \ldots, x_n, t) = \exp\Bigl[\sum_{k=1}^{n} f_k(t) x_k + g(t)\Bigr] u(z_1, \ldots, z_n, t), \quad z_k = h_k(t) x_k + r_k(t),$$

где функции $f_k(t), g(t), h_k(t), r_k(t)$ определяются по формулам (A_k, B_k, C_k, D — произвольные постоянные):

$$\begin{aligned} h_k(t) &= A_k \exp\Bigl[\int b_k(t)\, dt\Bigr],\\ f_k(t) &= h_k(t) \int \frac{s_k(t)}{h_k(t)}\, dt + B_k h_k(t),\\ r_k(t) &= \int \bigl[2a_k(t) f_k(t) + c_k(t)\bigr] h_k(t)\, dt + C_k,\\ g(t) &= \int \Bigl[p(t) + \sum_{k=1}^{n} a_k(t) f_k^2(t) + \sum_{k=1}^{n} c_k(t) f_k(t)\Bigr]\, dt + D. \end{aligned}$$

В результате для новой неизвестной $u = u(z_1, \ldots, z_n, t)$ получим уравнение вида 3.4.3.3:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n} a_k(t) h_k^2(t) \frac{\partial^2 u}{\partial z_k^2}.$$

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_k^2} + \sum\limits_{k=1}^{n}\Big[b_k(t)x_k + c_k(t)\Big]\dfrac{\partial w}{\partial x_k} + \Big[\sum\limits_{k=1}^{n} s_k(t)x_k^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} p_k(t)x_k + q(t)\Big]w.$

Замена

$$w(x_1,\dots,x_n,t) = \exp\Big[\sum_{k=1}^{n} f_k(t)x_k^2\Big]u(x_1,\dots,x_n,t),$$

где функции $f_k = f_k(t)$ удовлетворяют уравнениям Риккати

$$f_k' = 4a_k(t)f_k^2 + 2b_k(t)f_k + s_k(t) \qquad (k=1,\dots,n),$$

приводит к уравнению вида 3.4.3.4 для $u = u(x_1,\dots,x_n,t)$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} - \sum\limits_{k=1}^{n}\Big[a_k(x_k,t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_k^2} + b_k(x_k,t)\dfrac{\partial w}{\partial x_k} + c_k(x_k,t)w\Big] = \Phi(x_1,\dots,x_n,t).$

Здесь $0 < a_k(x_k,t) < \infty$. Введем обозначения $\mathbf{x} = \{x_1,\dots,x_n\}$, $\mathbf{y} = \{y_1,\dots,y_n\}$ и будем рассматривать область $V = \{\alpha_k \leqslant x_k \leqslant \beta_k,\ k = 1,\ \dots,\ n\}$, представляющую собой n-мерный параллелепипед.

1°. Первая краевая задача. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} &w = f(\mathbf{x}) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ &w = g_k(\mathbf{x},t) &&\text{при}\quad x_k=\alpha_k &&\text{(граничные условия)},\\ &w = h_k(\mathbf{x},t) &&\text{при}\quad x_k=\beta_k &&\text{(граничные условия)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x},t) = {}&\int_0^t\int_V \Phi(\mathbf{y},\tau)G(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)\,d\mathbf{y}\,d\tau + \int_V f(\mathbf{y})G(\mathbf{x},\mathbf{y},t,0)\,d\mathbf{y} +\\ &+\sum_{k=1}^{n}\int_0^t\int_{S^{(k)}} a_k(\alpha_k,\tau)\Big[g_k(\mathbf{y},\tau)\frac{\partial}{\partial y_k}G(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)\Big]_{y_k=\alpha_k} dS_y^{(k)}\,d\tau -\\ &-\sum_{k=1}^{n}\int_0^t\int_{S^{(k)}} a_k(\beta_k,\tau)\Big[h_k(\mathbf{y},\tau)\frac{\partial}{\partial y_k}G(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)\Big]_{y_k=\beta_k} dS_y^{(k)}\,d\tau, \end{aligned}$$

где использованы обозначения

$$\begin{aligned} &d\mathbf{y} = dy_1\,dy_2\,\dots\,dy_n, \qquad dS_y^{(k)} = dy_1\dots dy_{k-1}\,dy_{k+1}\dots dy_n,\\ &S^{(k)} = \{\alpha_m \leqslant y_m \leqslant \beta_m \ \text{при}\ m = 1,\ \dots,\ k-1,\ k+1,\ \dots,\ n\}. \end{aligned}$$

Функцию Грина можно представить в виде произведения

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau) = \prod_{k=1}^{n} G_k(x_k,y_k,t,\tau). \tag{1}$$

Здесь $G_k = G_k(x_k,y_k,t,\tau)$ — вспомогательные функции Грина, которые при $t > \tau \geqslant 0$ удовлетворяют одномерным линейным однородным уравнениям

$$\frac{\partial G_k}{\partial t} - a_k(x_k,t)\frac{\partial^2 G_k}{\partial x_k^2} - b_k(x_k,t)\frac{\partial G_k}{\partial x_k} - c_k(x_k,t)G_k = 0 \qquad (k=1,\ \dots,\ n) \tag{2}$$

с неоднородным начальным условием специального вида

$$G_k = \delta(x_k - y_k) \quad \text{при} \quad t=\tau \tag{3}$$

и однородными граничными условиями первого рода

$$\begin{aligned} G_k = 0 \quad &\text{при} \quad x_k = \alpha_k,\\ G_k = 0 \quad &\text{при} \quad x_k = \beta_k. \end{aligned}$$

В задачу для определения функции G_k величины y_k и τ входят как свободные параметры, $\delta(x)$ — дельта-функция.

2°. Вторая и третья краевые задачи. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f(\mathbf{x}) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_{x_k} w - s_k w &= g_k(\mathbf{x}, t) && \text{при} \quad x_k = \alpha_k && \text{(граничные условия)},\\
\partial_{x_k} w + p_k w &= h_k(\mathbf{x}, t) && \text{при} \quad x_k = \beta_k && \text{(граничные условия)}.
\end{aligned}$$

Вторая краевая задача соответствует значениям $s_k = p_k = 0$.

Решение:

$$\begin{aligned}
w(\mathbf{x}, t) = &\int_0^t \int_V \Phi(\mathbf{y}, \tau) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \tau)\, d\mathbf{y}\, d\tau + \int_V f(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, 0)\, d\mathbf{y} - \\
&- \sum_{k=1}^n \int_0^t \int_{S^{(k)}} a_k(\alpha_k, \tau) \bigl[g_k(\mathbf{y}, \tau) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \tau)\bigr]_{y_k=\alpha_k} dS_y^{(k)}\, d\tau + \\
&+ \sum_{k=1}^n \int_0^t \int_{S^{(k)}} a_k(\beta_k, \tau) \bigl[h_k(\mathbf{y}, \tau) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \tau)\bigr]_{y_k=\beta_k} dS_y^{(k)}\, d\tau.
\end{aligned}$$

Функцию Грина можно представить в виде произведения (1) соответствующих одномерных функций Грина, которые удовлетворяют линейным уравнениям (2) с начальными условиями (3) и однородными граничными условиями

$$\begin{aligned}
\partial_{x_k} G_k - s_k G_k &= 0 \quad \text{при} \quad x_k = \alpha_k,\\
\partial_{x_k} G_k + p_k G_k &= 0 \quad \text{при} \quad x_k = \beta_k.
\end{aligned}$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2000 *a*, *b*).

7. $$\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial w}{\partial x_j}\right] - q(x_1, \ldots, x_n) w + \Phi(x_1, \ldots, x_n, t).$$

Задачи для данного уравнения будем рассматривать в ограниченной области V с гладкой поверхностью S. Введем краткое обозначение $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и будем считать, что выполнено условие

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x}) \lambda_i \lambda_j \geqslant c \sum_{i=1}^n \lambda_i^2, \quad c > 0,$$

которое соответствует эллиптичности дифференциального оператора в правой части уравнения.

1°. Первая краевая задача. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f(\mathbf{x}) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\
w &= g(\mathbf{x}, t) && \text{при} \quad \mathbf{x} \in S && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(\mathbf{x}, t) = &\int_0^t \int_V \Phi(\mathbf{y}, \tau) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau)\, dV_y\, d\tau + \int_V f(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)\, dV_y - \\
&- \int_0^t \int_S g(\mathbf{y}, \tau) \left[\frac{\partial}{\partial M_y} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau)\right] dS_y\, d\tau. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Здесь функция Грина определяется формулами

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \sum_{n=1}^\infty \frac{u_n(\mathbf{x}) u_n(\mathbf{y})}{\|u_n\|^2} \exp(-\lambda_n t), \qquad \|u_n\|^2 = \int_V u_n^2(\mathbf{x})\, dV, \qquad \mathbf{y} = \{y_1, \ldots, y_n\}, \quad (2)$$

где λ_n и $u_n(\mathbf{x})$ — собственные значения и собственные функции задачи Штурма — Лиувилля для эллиптического уравнения второго порядка с однородным граничным условием первого рода:

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j}\right] - q(\mathbf{x}) u + \lambda u = 0, \qquad (3)$$

$$u = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \in S. \qquad (4)$$

Интегрирование в решении (1) ведется по переменным $y_1, \dots, y_n$; $\frac{\partial}{\partial M_y}$ — дифференциальный оператор:

$$\frac{\partial G}{\partial M_y} \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{y}) N_j \frac{\partial G}{\partial y_i}, \tag{5}$$

где $\mathbf{N} = \{N_1, \dots, N_n\}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S. В частном случае, когда $a_{ii}(\mathbf{x}) = 1$ и $a_{ij}(\mathbf{x}) = 0$ при $i \neq j$, оператор (5) совпадает с обычным оператором дифференцирования по направлению внешней нормали к поверхности S.

Общие свойства задачи Штурма — Лиувилля (3)–(4):

1. Существует счетное множество собственных значений. Все собственные значения вещественны и могут быть упорядочены $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \cdots$, причем $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$ (поэтому может быть лишь конечное число отрицательных собственных значений).

2. При $q(\mathbf{x}) \geqslant 0$ все собственные значения положительны: $\lambda_n > 0$.

3. Собственные функции определяются с точностью до постоянного множителя. Собственные функции $u_n(\mathbf{x})$ и $u_m(\mathbf{x})$, отвечающие различным собственным значениям λ_n и λ_m, ортогональны между собой в области V:

$$\int_V u_n(\mathbf{x}) u_m(\mathbf{x})\, dV = 0 \quad \text{при} \quad n \neq m.$$

Замечание. Каждому собственному значению λ_n вообще говоря соответствует конечное число линейно независимых собственных функций $u_n^{(1)}, u_n^{(2)}, \dots, u_n^{(m)}$. Эти функции всегда можно заменить такими их линейными комбинациями

$$\bar{u}_n^{(k)} = A_{k,1} u_n^{(1)} + \cdots + A_{k,k-1} u_n^{(k-1)} + u_n^{(k)}, \qquad k = 1,\, 2,\, \dots,\, m,$$

что $\bar{u}_n^{(1)}, \bar{u}_n^{(2)}, \dots, \bar{u}_n^{(m)}$ будут уже попарно ортогональны. Поэтому без ограничения общности можно считать, что все собственные функции ортогональны.

2°. Вторая краевая задача. Заданы следующие условия:

$$w = f(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},$$
$$\frac{\partial w}{\partial M_x} = g(\mathbf{x}, t) \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \in S \quad \text{(граничное условие)}.$$

Здесь левая часть граничного условия определяется с помощью (5), где G, y, $\mathbf{y}$, y_k следует соответственно заменить на w, x, $\mathbf{x}$, x_k.

Решение:

$$w(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \int_V \Phi(\mathbf{y}, \tau) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau)\, dV_y\, d\tau + \int_V f(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)\, dV_y +$$
$$+ \int_0^t \int_S g(\mathbf{y}, \tau) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau)\, dS_y\, d\tau. \tag{6}$$

Здесь функция Грина определяется по формуле (2), где λ_n и $u_n(\mathbf{x})$ — собственные значения и собственные функции задачи Штурма — Лиувилля для эллиптического уравнения второго порядка (3) с однородным граничным условием второго рода

$$\frac{\partial u}{\partial M_x} = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \in S. \tag{7}$$

При $q(\mathbf{x}) > 0$ общие свойства задачи на собственные значения (3), (7) будут такими же, как и для первой краевой задачи (см. п. 1°). При $q(\mathbf{x}) \equiv 0$ появляется нулевое собственное значение $\lambda_0 = 0$, которому отвечает собственная функция $u_0 = \text{const}$.

Отметим, что функцию Грина второй краевой задачи можно выразить через функцию Грина третьей краевой задачи (см. п. 3°).

3°. Третья краевая задача. Заданы следующие условия:

$$w = f(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},$$
$$\frac{\partial w}{\partial M_x} + k(\mathbf{x}) w = g(\mathbf{x}, t) \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \in S \quad \text{(граничное условие)}.$$

Решение третьей краевой задачи описывается формулами (6) и (2), где λ_n и $u_n(\mathbf{x})$ — собственные значения и собственные функции задачи Штурма — Лиувилля для эллиптического уравнения второго порядка (3) с однородным граничным условием третьего рода

$$\frac{\partial u}{\partial M_x} + k(\mathbf{x})u = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \in S. \tag{8}$$

При $q(\mathbf{x}) \geqslant 0$, $k(\mathbf{x}) > 0$ общие свойства задачи на собственные значения (3), (8) будут такими же, как и для первой краевой задачи (см. п. 1°).

Пусть $k(\mathbf{x}) = k$. Обозначим функции Грина второй и третьей краевых задач соответственно $G_2(\mathbf{x},\mathbf{y},t)$ и $G_3(\mathbf{x},\mathbf{y},t,k)$. Справедливы соотношения:

$$G_2(\mathbf{x},\mathbf{y},t) = \begin{cases} \lim\limits_{k\to 0} G_3(\mathbf{x},\mathbf{y},t,k), & \text{если} \quad q(\mathbf{x}) > 0; \\ \dfrac{1}{V_0} + \lim\limits_{k\to 0} G_3(\mathbf{x},\mathbf{y},t,k), & \text{если} \quad q(\mathbf{x}) \equiv 0; \end{cases}$$

где $V_0 = \displaystyle\int_V dV$ — объем рассматриваемой области.

⊙ *Литература*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 60–63), А. Д. Полянин (2000 *a*, *b*).

4. Уравнения гиперболического типа с одной пространственной переменной

4.1. Уравнения с постоянными коэффициентами

4.1.1. Волновое уравнение $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$

Это уравнение называют также *уравнением колебаний струны*. Оно часто встречается в теории упругости, аэродинамике, акустике, электродинамике.

4.1.1-1. Общее решение. Некоторые формулы.

1°. Общее решение:

$$w(x,t) = \varphi(x+at) + \psi(x-at),$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — произвольные функции. *Физическая интерпретация решения*: пара бегущих волн, распространяющихся соответственно влево и вправо вдоль оси x с постоянной скоростью a.

2°. Фундаментальное решение:

$$\mathscr{E}(x,t) = \frac{1}{2a}\theta\bigl(at - |x|\bigr), \qquad \theta(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z < 0, \\ 1 & \text{при } z > 0. \end{cases}$$

3°. Решения в виде бесконечных рядов, содержащие произвольные функции пространственной переменной:

$$w(x,t) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(at)^{2n}}{(2n)!} f_x^{(2n)}(x), \qquad f_x^{(m)}(x) = \frac{d^m}{dx^m} f(x),$$

$$w(x,t) = tg(x) + t\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(at)^{2n}}{(2n+1)!} g_x^{(2n)}(x),$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — любые бесконечно дифференцируемые функции. Первое решение удовлетворяет начальным условиям $w(x,0) = f(x)$, $\partial_t w(x,0) = 0$, а второе — начальным условиям $w(x,0)=0$, $\partial_t w(x,0) = g(x)$. Суммы будут конечными, если $f(x)$ и $g(x)$ являются полиномами.

4°. Решения в виде бесконечных рядов, содержащие произвольные функции времени:

$$w(x,t) = f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{2n}(2n)!} x^{2n} f_t^{(2n)}(t), \qquad f_t^{(m)}(t) = \frac{d^m}{dt^m} f(t),$$

$$w(x,t) = xg(t) + x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{2n}(2n+1)!} x^{2n} g_t^{(2n)}(t),$$

где $f(t)$ и $g(t)$ — любые бесконечно дифференцируемые функции. Суммы будут конечными, если $f(t)$ и $g(t)$ являются полиномами. Первое решение удовлетворяет граничному условию первого рода $w(0,t) = f(t)$, а второе — граничному условию второго рода $\partial_x w(0,t) = g(t)$.

5°. Если $w(x,t)$ — некоторое решение волнового уравнения, то функции

$$\begin{aligned}
w_1 &= Aw(\pm\lambda x + C_1, \lambda t + C_2), \\
w_2 &= Aw(\lambda x + C_1, \pm\lambda t + C_2), \\
w_3 &= Aw\biggl(\frac{x - vt}{\sqrt{1-(v/a)^2}}, \frac{t - va^{-2}x}{\sqrt{1-(v/a)^2}}\biggr), \\
w_4 &= Aw\biggl(\frac{x}{x^2 - a^2t^2}, \frac{t}{x^2 - a^2t^2}\biggr),
\end{aligned}$$

также являются решениями всюду, где они определены (A, C_1, C_2, v, λ — произвольные постоянные). Функция w_3 получена как следствие инвариантности волнового уравнения по отношению к преобразованию Лоренца.

⊙ *Литература*: Г. Н. Положий (1964, стр. 273–274), А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко (1985, стр. 68).

4.1.1-2. Область: $-\infty < x < \infty$. Задача Коши.

Заданы начальные условия:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0,$$
$$\partial_t w = g(x) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Решение (формула Даламбера):

$$w(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(\xi)\,d\xi.$$

4.1.1-3. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Первая краевая задача.

1°. Задача с однородным граничным условием:

$$\begin{aligned} w &= f(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= g(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ w &= 0 && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)] + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} g(\xi)\,d\xi & \text{при } t < \dfrac{x}{a},\\ \dfrac{1}{2}[f(x+at) - f(at-x)] + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at} g(\xi)\,d\xi & \text{при } t > \dfrac{x}{a}. \end{cases}$$

2°. Задача с неоднородным граничным условием:

$$\begin{aligned} w &= f(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= g(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ w &= h(t) && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)] + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} g(\xi)\,d\xi & \text{при } t < \dfrac{x}{a},\\ \dfrac{1}{2}[f(x+at) - f(at-x)] + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at} g(\xi)\,d\xi + h\Big(t - \dfrac{x}{a}\Big) & \text{при } t > \dfrac{x}{a}. \end{cases}$$

В области $t < x/a$ влияние граничных условий не сказывается и выражение для $w(x,t)$ совпадает с решением Даламбера для бесконечной прямой (см. разд. 4.1.1-2).

⊙ *Литература*: А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972, стр. 64–70).

4.1.1-4. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Вторая краевая задача.

1°. Задача с однородным граничным условием:

$$\begin{aligned} w &= f(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= g(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_x w &= 0 && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)] + \dfrac{1}{2a}[G(x+at) - G(x-at)] & \text{при } t < \dfrac{x}{a},\\ \dfrac{1}{2}[f(x+at) + f(at-x)] + \dfrac{1}{2a}[G(x+at) + G(at-x)] & \text{при } t > \dfrac{x}{a}, \end{cases}$$

где $G(z) = \displaystyle\int_0^z g(\xi)\,d\xi$.

2°. Задача с неоднородным граничным условием:

$$\begin{aligned} w &= f(x) &&\text{при} \quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= g(x) &&\text{при} \quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_x w &= h(t) &&\text{при} \quad x = 0 &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)] + \dfrac{1}{2a}[G(x+at) - G(x-at)] & \text{при } t < \dfrac{x}{a},\\ \dfrac{1}{2}[f(x+at) + f(at-x)] + \dfrac{1}{2a}[G(x+at) + G(at-x)] - aH\Bigl(t - \dfrac{x}{a}\Bigr) & \text{при } t > \dfrac{x}{a}, \end{cases}$$

где $G(z) = \int_0^z g(\xi)\,d\xi$ и $H(z) = \int_0^z h(\xi)\,d\xi$. В области $t < x/a$ влияние граничных условий не сказывается и выражение для $w(x,t)$ совпадает с решением Даламбера для бесконечной прямой (см. разд. 4.1.1-2).

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972, стр. 41, 269–271).

4.1.1-5. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Первая краевая задача.

1°. Колебания струны с жестко закрепленными концами. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x) &&\text{при} \quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= g(x) &&\text{при} \quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\ w &= 0 &&\text{при} \quad x = 0 &&\text{(граничное условие)},\\ w &= 0 &&\text{при} \quad x = l &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bigl[A_n \cos(\lambda_n at) + B_n \sin(\lambda_n at)\bigr] \sin(\lambda_n x), \qquad \lambda_n = \frac{\pi n}{l},$$

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin(\lambda_n x)\,dx, \qquad B_n = \frac{2}{a\pi n}\int_0^l g(x)\sin(\lambda_n x)\,dx.$$

Пример 1. Начальное форма струны — треугольник с основанием $0 \leqslant x \leqslant l$ и высотой h при $x = c$, т. е.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{hx}{c} & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant c,\\ \dfrac{h(l-x)}{l-c} & \text{при } c \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Начальные скорости точек струны равны нулю, $g(x) = 0$.

Решение:

$$w(x,t) = \frac{2hl^2}{\pi^2 c(l-c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\Bigl(\frac{n\pi c}{l}\Bigr) \sin\Bigl(\frac{n\pi x}{l}\Bigr) \cos\Bigl(\frac{n\pi at}{l}\Bigr).$$

Пример 2. Начальное форма струны — часть параболы, симметричной относительно середины струны, с максимумом равным h:

$$f(x) = \frac{4h}{l^2}x(l-x).$$

Начальные скорости точек струны равны нулю, $g(x) = 0$.

Решение:

$$w(x,t) = \frac{32h}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \sin\Bigl[\frac{(2n+1)\pi x}{l}\Bigr] \cos\Bigl[\frac{(2n+1)\pi at}{l}\Bigr].$$

2°. Решение первой краевой задачи с неоднородными граничными условиями см. в разд. 4.1.2-4 при $\Phi(x,t) \equiv 0$.

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972, стр. 219–220), А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко (1985, стр. 236).

4.1.1-6. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Вторая краевая задача.

1°. Продольные колебания упругого стержня со свободными концами. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w = f(x) &\quad \text{при} \quad t = 0 \quad (\text{начальное условие}), \\ \partial_t w = g(x) &\quad \text{при} \quad t = 0 \quad (\text{начальное условие}), \\ \partial_x w = 0 &\quad \text{при} \quad x = 0 \quad (\text{граничное условие}), \\ \partial_x w = 0 &\quad \text{при} \quad x = l \quad (\text{граничное условие}). \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t) = A_0 + B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \bigl[A_n \cos(\lambda_n a t) + B_n \sin(\lambda_n a t)\bigr] \cos(\lambda_n x),$$

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \qquad A_0 = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,dx, \qquad B_0 = \frac{1}{l}\int_0^l g(x)\,dx,$$

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos(\lambda_n x)\,dx, \qquad B_n = \frac{2}{a\pi n}\int_0^l g(x)\cos(\lambda_n x)\,dx.$$

2°. Решение второй краевой задачи с неоднородными граничными условиями см. в разд. 4.1.2-5 при $\Phi(x,t) \equiv 0$.

⊙ *Литература*: А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко (1985, стр. 236).

4.1.1-7. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Третья краевая задача.

1°. Продольные колебания стержня с упруго закрепленными концами при одинаковых коэффициентах жесткости. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w = f(x) &\quad \text{при} \quad t = 0 \quad (\text{начальное условие}), \\ \partial_t w = g(x) &\quad \text{при} \quad t = 0 \quad (\text{начальное условие}), \\ \partial_x w - kw = 0 &\quad \text{при} \quad x = 0 \quad (\text{граничное условие}), \\ \partial_x w + kw = 0 &\quad \text{при} \quad x = l \quad (\text{граничное условие}). \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bigl[A_n \cos(\lambda_n a t) + B_n \sin(\lambda_n a t)\bigr] \sin(\lambda_n x + \varphi_n),$$

где

$$A_n = \frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^l \sin(\lambda_n x + \varphi_n) f(x)\,dx, \quad B_n = \frac{1}{a\lambda_n \|X_n\|^2}\int_0^l \sin(\lambda_n x + \varphi_n) g(x)\,dx,$$

$$\varphi_n = \operatorname{arctg}\frac{\lambda_n}{k}, \quad \|X_n\|^2 = \int_0^l \sin^2(\lambda_n x + \varphi_n)\,dx = \frac{l}{2} + \frac{k}{k^2 + \lambda_n^2};$$

λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\operatorname{ctg}(\lambda l) = \dfrac{1}{2}\Bigl(\dfrac{\lambda}{k} - \dfrac{k}{\lambda}\Bigr)$.

2°. Продольные колебания стержня с упруго закрепленными концами при различных коэффициентах жесткости. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w = f(x) &\quad \text{при} \quad t = 0 \quad (\text{начальное условие}), \\ \partial_t w = g(x) &\quad \text{при} \quad t = 0 \quad (\text{начальное условие}), \\ \partial_x w - k_1 w = 0 &\quad \text{при} \quad x = 0 \quad (\text{граничное условие}), \\ \partial_x w + k_2 w = 0 &\quad \text{при} \quad x = l \quad (\text{граничное условие}). \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bigl[A_n \cos(\lambda_n a t) + B_n \sin(\lambda_n a t)\bigr] \sin(\lambda_n x + \varphi_n),$$

где

$$A_n = \frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^l \sin(\lambda_n x + \varphi_n) f(x)\,dx, \quad B_n = \frac{1}{a\lambda_n\|X_n\|^2}\int_0^l \sin(\lambda_n x + \varphi_n) g(x)\,dx,$$

$$\varphi_n = \operatorname{arctg}\frac{\lambda_n}{k_1}, \quad \|X_n\|^2 = \int_0^l \sin^2(\lambda_n x + \varphi_n)\,dx = \frac{l}{2} + \frac{(\lambda_n^2 + k_1k_2)(k_1+k_2)}{2(\lambda_n^2 + k_1^2)(\lambda_n^2 + k_2^2)};$$

λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\operatorname{ctg}(\lambda l) = \dfrac{\lambda^2 - k_1k_2}{\lambda(k_1+k_2)}$.

3°. Решение третьей краевой задачи с неоднородными граничными условиями см. в разд. 4.1.2-6 при $\Phi(x,t) \equiv 0$.

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972, стр. 223–226).

4.1.1-8. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Смешанная краевая задача.

1°. Продольные колебания упругого стержня, один конец которого жестко закреплен, а второй свободен. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= g(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ w &= 0 && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)},\\ \partial_x w &= 0 && \text{при} \quad x = l && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\bigl[A_n\cos(\lambda_n at) + B_n\sin(\lambda_n at)\bigr]\sin(\lambda_n x), \quad \lambda_n = \frac{\pi(2n+1)}{2l},$$

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin(\lambda_n x)\,dx, \quad B_n = \frac{2}{al\lambda_n}\int_0^l g(x)\sin(\lambda_n x)\,dx.$$

2°. Решение смешанной краевой задачи с неоднородными граничными условиями см. в разд. 4.1.2-7 при $\Phi(x,t) \equiv 0$.

⊙ *Литература*: М. М. Смирнов (1975, стр. 73–74), А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко (1985, стр. 236).

4.1.1-9. Задача Гурса.

Условия выставляются на характеристиках уравнения:

$$\begin{aligned} w &= f(x) && \text{при} \quad x - at = 0 && (0 \leqslant x \leqslant b),\\ w &= g(x) && \text{при} \quad x + at = 0 && (0 \leqslant x \leqslant c), \end{aligned}$$

где $f(0) = g(0)$.

Решение:

$$w(x,t) = f\Bigl(\frac{x+at}{2}\Bigr) + g\Bigl(\frac{x-at}{2}\Bigr) - f(0).$$

Область распространения решения ограничена четырьмя прямыми:

$$x - at = 0, \quad x + at = 0, \quad x - at = 2c, \quad x + at = 2b.$$

⊙ *Литература*: А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко (1985, стр. 208).

4.1.2. Уравнение вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \Phi(x,t)$

4.1.2-1. Область: $-\infty < x < \infty$. Задача Коши.

Заданы начальные условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x) && \text{при} \quad t = 0,\\ \partial_t w &= g(x) && \text{при} \quad t = 0. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t) = \frac{1}{2}[f(x-at) + f(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau.$$

4.1.2-2. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= g(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ w &= h(t) && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t) = w_1(x,t) + \frac{1}{2a} w_2(x,t),$$

где

$$w_1(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)] + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} g(\xi)\,d\xi & \text{при } t < \dfrac{x}{a},\\[2ex] \dfrac{1}{2}[f(x+at) - f(at-x)] + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at} g(\xi)\,d\xi + h\Big(t - \dfrac{x}{a}\Big) & \text{при } t > \dfrac{x}{a}, \end{cases}$$

$$w_2(x,t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau & \text{при } t < \dfrac{x}{a},\\[2ex] \displaystyle\int_0^{t-x/a} \int_{a(t-\tau)-x}^{x+a(t-\tau)} \Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau + \int_{t-x/a}^{t} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau & \text{при } t > \dfrac{x}{a}. \end{cases}$$

⊙ *Литература*: А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко (1985, стр. 69, 204).

4.1.2-3. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Вторая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= g(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_x w &= h(t) && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t) = w_1(x,t) + \frac{1}{2a} w_2(x,t),$$

где

$$w_1(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)] + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} g(\xi)\,d\xi & \text{при } t < \dfrac{x}{a},\\[2ex] \dfrac{1}{2}[f(x+at) + f(at-x)] + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{0}^{x+at} g(\xi)\,d\xi + & \\[2ex] \qquad + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^{at-x} g(\xi)\,d\xi - a\int_0^{t-x/a} h(\xi)\,d\xi & \text{при } t > \dfrac{x}{a}, \end{cases}$$

$$w_2(x,t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau & \text{при } t < \dfrac{x}{a},\\[2ex] \displaystyle\int_0^{t-x/a} \int_{0}^{x+a(t-\tau)} \Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau + \int_0^{t-x/a} \int_{0}^{a(t-\tau)-x} \Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau + & \\[2ex] \qquad + \displaystyle\int_{t-x/a}^{t} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau & \text{при } t > \dfrac{x}{a}. \end{cases}$$

⊙ *Литература*: А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко (1985, стр. 69, 204).

4.1.2-4. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(x) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(x) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(t) && \text{при} \quad x=0 && \text{(граничное условие)},\\ w &= g_2(t) && \text{при} \quad x=l && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l f_0(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^l f_1(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^t\int_0^l \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau + $$
$$+ a^2\int_0^t g_1(\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,t-\tau)\right]_{\xi=0}d\tau - a^2\int_0^t g_2(\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,t-\tau)\right]_{\xi=l}d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi\xi}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi at}{l}\right).$$

4.1.2-5. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Вторая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(x) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(x) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_x w &= g_1(t) && \text{при} \quad x=0 && \text{(граничное условие)},\\ \partial_x w &= g_2(t) && \text{при} \quad x=l && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l f_0(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^l f_1(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^t\int_0^l \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau - $$
$$- a^2\int_0^t g_1(\tau)G(x,0,t-\tau)\,d\tau + a^2\int_0^t g_2(\tau)G(x,l,t-\tau)\,d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{t}{l} + \frac{2}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{n\pi\xi}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi at}{l}\right).$$

4.1.2-6. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Третья краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(x) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(x) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_x w - k_1 w &= g_1(t) && \text{при} \quad x=0 && \text{(граничное условие)},\\ \partial_x w + k_2 w &= g_2(t) && \text{при} \quad x=l && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(x,t)$ определяется по формуле из разд. 4.1.2-5, где

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n\|u_n\|^2}\sin(\lambda_n x+\varphi_n)\sin(\lambda_n\xi+\varphi_n)\sin(\lambda_n at),$$
$$\varphi_n = \operatorname{arctg}\frac{\lambda_n}{k_1}, \qquad \|u_n\|^2 = \frac{l}{2} + \frac{(\lambda_n^2+k_1k_2)(k_1+k_2)}{2(\lambda_n^2+k_1^2)(\lambda_n^2+k_2^2)};$$

λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\operatorname{ctg}(\lambda l) = \dfrac{\lambda^2 - k_1k_2}{\lambda(k_1+k_2)}$.

4.1.2-7. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Смешанная краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(x) \quad \text{при} \quad t=0 \quad \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(x) \quad \text{при} \quad t=0 \quad \text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(t) \quad \text{при} \quad x=0 \quad \text{(граничное условие)},\\ \partial_x w &= g_2(t) \quad \text{при} \quad x=l \quad \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l f_0(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^l f_1(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^t\!\!\int_0^l \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau +$$
$$+ a^2\int_0^t g_1(\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,t-\tau)\Big]_{\xi=0}d\tau + a^2\int_0^t g_2(\tau)G(x,l,t-\tau)\,d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{al}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\sin(\lambda_n x)\sin(\lambda_n\xi)\sin(\lambda_n at), \qquad \lambda_n = \frac{\pi(2n+1)}{2l}.$$

4.1.3. Уравнение вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - bw + \Phi(x,t)$

При $\Phi(x,t)\equiv 0$ и $b>0$ это уравнение встречается в квантовой теории поля и ряде приложений и называется *уравнением Клейна — Гордона*.

4.1.3-1. Решения однородного уравнения (при $\Phi \equiv 0$).

1°. Частные решения:

$$w(x,t) = \exp(\pm\mu t)(Ax+B), \quad b = -\mu^2,$$
$$w(x,t) = \exp(\pm\lambda x)(At+B), \quad b = a^2\lambda^2,$$
$$w(x,t) = \cos(\lambda x)[A\cos(\mu t)+B\sin(\mu t)], \quad b = -a^2\lambda^2+\mu^2,$$
$$w(x,t) = \sin(\lambda x)[A\cos(\mu t)+B\sin(\mu t)], \quad b = -a^2\lambda^2+\mu^2,$$
$$w(x,t) = \exp(\pm\mu t)[A\cos(\lambda x)+B\sin(\lambda x)], \quad b = -a^2\lambda^2-\mu^2,$$
$$w(x,t) = \exp(\pm\lambda x)[A\cos(\mu t)+B\sin(\mu t)], \quad b = a^2\lambda^2+\mu^2,$$
$$w(x,t) = \exp(\pm\lambda x)[A\exp(\mu t)+B\exp(-\mu t)], \quad b = a^2\lambda^2-\mu^2,$$
$$w(x,t) = AJ_0(\xi)+BY_0(\xi), \quad \xi = \frac{\sqrt{b}}{a}\sqrt{a^2(t+C_1)^2-(x+C_2)^2}, \quad b>0,$$
$$w(x,t) = AI_0(\xi)+BK_0(\xi), \quad \xi = \frac{\sqrt{-b}}{a}\sqrt{a^2(t+C_1)^2-(x+C_2)^2}, \quad b<0,$$

где A, B, C_1, C_2 — произвольные постоянные, $J_0(\xi)$ и $Y_0(\xi)$ — функции Бесселя, $I_0(\xi)$ и $K_0(\xi)$ — модифицированные функции Бесселя.

2°. Фундаментальные решения:

$$\mathscr{E}(x,t) = \frac{\vartheta(at-|x|)}{2a}J_0\Big(\frac{c}{a}\sqrt{a^2t^2-x^2}\Big) \quad \text{при} \quad b=c^2>0,$$
$$\mathscr{E}(x,t) = \frac{\vartheta(at-|x|)}{2a}I_0\Big(\frac{c}{a}\sqrt{a^2t^2-x^2}\Big) \quad \text{при} \quad b=-c^2<0,$$

где $\vartheta(z)$ — единичная функция Хевисайда, $J_0(z)$ — функция Бесселя, $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя.

⊙ *Литература*: В. С. Владимиров, В. П. Михайлов, А. А. Вашарин (1974, стр. 122).

ТАБЛИЦА 19

Ортогональные координаты $u=u(x,t)$, $v=v(x,t)$, допускающие решения уравнения Клейна — Гордона с разделенными переменными $w=F(u)G(v)$ ($a=1$; A_1, A_2, B_1, B_2, λ — произвольные постоянные).

№	Связь между x, t и u, v	Функция $F=F(u)$ (дифференциальное уравнение)	Функция $G=G(v)$ (дифференциальное уравнение)
1	$x=u,\ t=v$	$F=A_1e^{u\sqrt{\lambda+b}}+A_2e^{-u\sqrt{\lambda+b}}$	$G=B_1e^{v\sqrt{\lambda}}+B_2e^{-v\sqrt{\lambda}}$
2	$x=u\operatorname{sh}v$, $t=u\operatorname{ch}v$	$F=\sqrt{u}\,\bigl[A_1J_\sigma(u\sqrt{b})+A_2Y_\sigma(u\sqrt{b})\bigr]$, $\sigma=\frac{1}{2}\sqrt{1+\lambda^2}$	$G=B_1e^{\lambda v}+B_2e^{-\lambda v}$
3	$x=uv$, $t=\frac{1}{2}(u^2+v^2)$	$F=A_1D_\lambda(\beta u)+A_2D_\lambda(-\beta u)$, $\beta=(-4b)^{1/4}$	$G=B_1D_\lambda(\beta v)+B_2D_\lambda(-\beta v)$, $\beta=(-4b)^{1/4}$
4	$x=\frac{1}{2}(u^2+v^2)$, $t=uv$	$F=A_1D_\lambda(\beta u)+A_2D_\lambda(-\beta u)$, $\beta=(4b)^{1/4}$	$G=B_1D_\lambda(\beta v)+B_2D_\lambda(-\beta v)$, $\beta=(4b)^{1/4}$
5	$x=-\frac{1}{2}(u-v)^2+u+v$, $t=\frac{1}{2}(u-v)^2+u+v$	$F=\sqrt{U}\,\bigl[A_1J_{\frac{1}{3}}(\xi)+A_2Y_{\frac{1}{3}}(\xi)\bigr]$, $U=u+\lambda,\ \xi=\frac{2}{3}\sqrt{b}\,U^{3/2}$	$G=\sqrt{V}\,\bigl[B_1J_{\frac{1}{3}}(\eta)+B_2Y_{\frac{1}{3}}(\eta)\bigr]$, $V=v+\lambda,\ \eta=\frac{2}{3}\sqrt{b}\,V^{3/2}$
6	$t+x=\operatorname{ch}\bigl[\frac{1}{2}(u-v)\bigr]$, $t-x=\operatorname{sh}\bigl[\frac{1}{2}(u+v)\bigr]$	$F''+(\lambda+b\operatorname{sh}u)F=0$	$G''+(\lambda+b\operatorname{sh}v)G=0$
7	$x=\operatorname{sh}(u-v)-\frac{1}{2}e^{u+v}$, $t=\operatorname{sh}(u-v)+\frac{1}{2}e^{u+v}$	$F=A_1J_\lambda(\beta e^u)+A_2Y_\lambda(\beta e^u)$, $\beta=\sqrt{b}$	$G=B_1I_\lambda(\beta e^v)+B_1K_\lambda(\beta e^v)$, $\beta=\sqrt{b}$
8	$x=\operatorname{ch}(u-v)-\frac{1}{2}e^{u+v}$, $t=\operatorname{ch}(u-v)+\frac{1}{2}e^{u+v}$	$F=A_1J_\lambda(\beta e^u)+A_2Y_\lambda(\beta e^u)$, $\beta=\sqrt{b}$	$G=B_1J_\lambda(\beta e^v)+B_1Y_\lambda(\beta e^v)$, $\beta=\sqrt{b}$
9	$x=\operatorname{ch}u\operatorname{sh}v$, $t=\operatorname{sh}u\operatorname{ch}v$	$F''+(\lambda+\frac{1}{2}b\operatorname{ch}2u)F=0$, модифицированное уравнение Матье	$G''+(\lambda-\frac{1}{2}b\operatorname{ch}2v)G=0$, модифицированное уравнение Матье
10	$x=\operatorname{sh}u\operatorname{sh}v$, $t=\operatorname{ch}u\operatorname{ch}v$	$F''+(\lambda+\frac{1}{2}b\operatorname{ch}2u)F=0$, модифицированное уравнение Матье	$G''+(\lambda+\frac{1}{2}b\operatorname{ch}2v)G=0$, модифицированное уравнение Матье
11	$x=\sin u\sin v$, $t=\cos u\cos v$	$F''+(\lambda-\frac{1}{2}b\cos 2u)F=0$, уравнение Матье	$G''+(\lambda-\frac{1}{2}b\cos 2v)G=0$, уравнение Матье

4.1.3-2. Некоторые формулы и преобразования однородного уравнения (при $\Phi\equiv 0$).

Пусть $w=w(x,t)$ — некоторое решение уравнения Клейна — Гордона. Тогда функции

$$w_1=Aw(x+C_1,\pm t+C_2),$$
$$w_2=Aw(-x+C_1,\pm t+C_2),$$
$$w_3=Aw\biggl(\frac{x-vt}{\sqrt{1-(v/a)^2}},\ \frac{t-va^{-2}x}{\sqrt{1-(v/a)^2}}\biggr),$$

где A, C_1, C_2, v — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

В табл. 19 указаны преобразования независимых переменных, позволяющие разделить переменные в уравнении Клейна — Гордона.

Обозначения: $J_\sigma(z)$ и $Y_\sigma(z)$ — функции Бесселя, $I_\sigma(z)$ и $K_\sigma(z)$ — модифицированные функции Бесселя, $D_\lambda(z)$ — функция параболического цилиндра.

⊙ *Литература*: E. Kalnins (1975), У. Миллер (1981, стр. 75–82).

4.1.3-3. Область: $-\infty < x < \infty$. Задача Коши.

Заданы начальные условия:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0,$$
$$\partial_t w = g(x) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Решение при $b = -c^2 < 0$:

$$w(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)] + \frac{ct}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \frac{I_1\bigl(c\sqrt{t^2-(x-\xi)^2/a^2}\,\bigr)}{\sqrt{t^2-(x-\xi)^2/a^2}} f(\xi)\,d\xi +$$
$$+ \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} I_0\bigl(c\sqrt{t^2-(x-\xi)^2/a^2}\,\bigr) g(\xi)\,d\xi +$$
$$+ \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} I_0\bigl(c\sqrt{(t-\tau)^2-(x-\xi)^2/a^2}\,\bigr)\Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где $I_0(z)$ и $I_1(z)$ — модифицированные функции Бесселя первого рода.

Решение при $b = c^2 > 0$:

$$w(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)] - \frac{ct}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \frac{J_1\bigl(c\sqrt{t^2-(x-\xi)^2/a^2}\,\bigr)}{\sqrt{t^2-(x-\xi)^2/a^2}} f(\xi)\,d\xi +$$
$$+ \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} J_0\bigl(c\sqrt{t^2-(x-\xi)^2/a^2}\,\bigr) g(\xi)\,d\xi +$$
$$+ \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} J_0\bigl(c\sqrt{(t-\tau)^2-(x-\xi)^2/a^2}\,\bigr)\Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где $J_0(z)$ и $J_1(z)$ — функции Бесселя первого рода.

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972, стр. 265–268).

4.1.3-4. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(t) && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)},\\ w &= g_2(t) && \text{при} \quad x = l && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l f_0(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^l f_1(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^t\int_0^l \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau +$$
$$+ a^2\int_0^t g_1(\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,t-\tau)\Bigr]_{\xi=0} d\tau - a^2\int_0^t g_2(\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,t-\tau)\Bigr]_{\xi=l} d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\lambda_n x)\sin(\lambda_n \xi)\frac{\sin\bigl(t\sqrt{a^2\lambda_n^2+b}\,\bigr)}{\sqrt{a^2\lambda_n^2+b}}, \qquad \lambda_n = \frac{\pi n}{l}.$$

Замечание. Пусть $b < 0$, $a^2\lambda_n^2 + b < 0$ при $n = 1, \ldots, m$ и $a^2\lambda_n^2 + b > 0$ при $n = m+1,\ m+2, \ldots$ В этом случае функция Грина модифицируется и принимает вид

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{m} \sin(\lambda_n x)\sin(\lambda_n \xi)\frac{\operatorname{sh}\bigl(t\sqrt{|a^2\lambda_n^2+b|}\,\bigr)}{\sqrt{|a^2\lambda_n^2+b|}} +$$
$$+ \frac{2}{l}\sum_{n=m+1}^{\infty} \sin(\lambda_n x)\sin(\lambda_n \xi)\frac{\sin\bigl(t\sqrt{a^2\lambda_n^2+b}\,\bigr)}{\sqrt{a^2\lambda_n^2+b}}, \qquad \lambda_n = \frac{\pi n}{l}.$$

Аналогичным образом модифицируется функция Грина для второй, третьей и смешанной краевых задач в подобных случаях.

⊙ *Литература*: А. Г. Бутковский (1979, стр. 84).

4.1.3-5. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Вторая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(x) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(x) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_x w &= g_1(t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_x w &= g_2(t) &&\text{при}\quad x=l &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l f_0(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi+\int_0^l f_1(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi+\int_0^t\int_0^l \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau- \\ -a^2\int_0^t g_1(\tau)G(x,0,t-\tau)\,d\tau+a^2\int_0^t g_2(\tau)G(x,l,t-\tau)\,d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,t)=\frac{1}{l\sqrt{b}}\sin\bigl(t\sqrt{b}\bigr)+\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(\lambda_n x)\cos(\lambda_n \xi)\frac{\sin\bigl(t\sqrt{a^2\lambda_n^2+b}\bigr)}{\sqrt{a^2\lambda_n^2+b}},\qquad \lambda_n=\frac{\pi n}{l}.$$

4.1.3-6. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Третья краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(x) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(x) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_x w-k_1w &= g_1(t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_x w+k_2w &= g_2(t) &&\text{при}\quad x=l &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(x,t)$ определяется по формуле из разд. 4.1.3-5, где

$$G(x,\xi,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n(x)y_n(\xi)\sin\bigl(t\sqrt{a^2\lambda_n^2+b}\bigr)}{\|y_n\|^2\sqrt{a^2\lambda_n^2+b}},$$

$$y_n(x)=\cos(\lambda_n x)+\frac{k_1}{\lambda_n}\sin(\lambda_n x),\qquad \|y_n\|^2=\frac{k_2}{2\lambda_n^2}\,\frac{\lambda_n^2+k_1^2}{\lambda_n^2+k_2^2}+\frac{k_1}{2\lambda_n^2}+\frac{l}{2}\Bigl(1+\frac{k_1^2}{\lambda_n^2}\Bigr).$$

Здесь λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\dfrac{\operatorname{tg}(\lambda l)}{\lambda}=\dfrac{k_1+k_2}{\lambda^2-k_1k_2}$.

4.1.3-7. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Смешанная краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(x) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(x) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_x w &= g_2(t) &&\text{при}\quad x=l &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l f_0(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi+\int_0^l f_1(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi+\int_0^t\int_0^l \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau+ \\ +a^2\int_0^t g_1(\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,t-\tau)\Bigr]_{\xi=0}d\tau+a^2\int_0^t g_2(\tau)G(x,l,t-\tau)\,d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\sin(\lambda_n x)\sin(\lambda_n \xi)\frac{\sin\bigl(t\sqrt{a^2\lambda_n^2+b}\bigr)}{\sqrt{a^2\lambda_n^2+b}},\qquad \lambda_n=\frac{\pi(2n+1)}{2l}.$$

4.1.4. Уравнение вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - b\dfrac{\partial w}{\partial x} + \Phi(x,t)$

4.1.4-1. Приведение к неоднородному уравнению Клейна — Гордона.

Замена $w(x,t) = \exp\Bigl(\dfrac{bx}{2a^2}\Bigr)u(x,t)$ приводит к неоднородному уравнению Клейна — Гордона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{b^2}{4a^2}u + \exp\Bigl(-\frac{bx}{2a^2}\Bigr)\Phi(x,t),$$

которое рассматривается в разд. 4.1.3.

4.1.4-2. Область: $-\infty < x < \infty$. Задача Коши.

Заданы начальные условия:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0,$$
$$\partial_t w = g(x) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(x,t) &= \frac{1}{2}f(x+at)\exp\Bigl(-\frac{bt}{2a}\Bigr) + \frac{1}{2}f(x-at)\exp\Bigl(\frac{bt}{2a}\Bigr) - \\
&- \frac{\sigma t}{2a}\exp\Bigl(\frac{bx}{2a^2}\Bigr)\int_{x-at}^{x+at}\exp\Bigl(-\frac{b\xi}{2a^2}\Bigr)\frac{J_1\bigl(\sigma\sqrt{t^2-(x-\xi)^2/a^2}\,\bigr)}{\sqrt{t^2-(x-\xi)^2/a^2}}f(\xi)\,d\xi + \\
&+ \frac{1}{2a}\exp\Bigl(\frac{bx}{2a^2}\Bigr)\int_{x-at}^{x+at}\exp\Bigl(-\frac{b\xi}{2a^2}\Bigr)J_0\bigl(\sigma\sqrt{t^2-(x-\xi)^2/a^2}\,\bigr)g(\xi)\,d\xi + \\
&+ \frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\exp\Bigl[\frac{b(x-\xi)}{2a^2}\Bigr]J_0\bigl(\sigma\sqrt{(t-\tau)^2-(x-\xi)^2/a^2}\,\bigr)\Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,
\end{aligned}$$

где $J_0(z)$ и $J_1(z)$ — функции Бесселя первого рода, $\sigma = \frac{1}{2}|b|/a$.

4.1.4-3. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(x) &&\text{при} \quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(x) &&\text{при} \quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(t) &&\text{при} \quad x = 0 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(t) &&\text{при} \quad x = l &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l f_0(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^l f_1(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^t\int_0^l \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau + \\
+ a^2\int_0^t g_1(\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,t-\tau)\Bigr]_{\xi=0}d\tau - a^2\int_0^t g_2(\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,t-\tau)\Bigr]_{\xi=l}d\tau,
\end{aligned}$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l}\exp\Bigl[\frac{b}{2a^2}(x-\xi)\Bigr]\sum_{n=1}^{\infty}\sin\Bigl(\frac{\pi n x}{l}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{\pi n\xi}{l}\Bigr)\frac{\sin(\lambda_n t)}{\lambda_n}, \qquad \lambda_n = \sqrt{\frac{a^2\pi^2 n^2}{l^2} + \frac{b^2}{4a^2}}.$$

⊙ *Литература*: А. Г. Бутковский (1979, стр. 92).

4.1.4-4. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Вторая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(x) &&\text{при} \quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(x) &&\text{при} \quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_x w &= g_1(t) &&\text{при} \quad x = 0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_x w &= g_2(t) &&\text{при} \quad x = l &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l f_0(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi+\int_0^l f_1(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi+\int_0^t\int_0^l \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau-$$
$$-a^2\int_0^t g_1(\tau)G(x,0,t-\tau)\,d\tau+a^2\int_0^t g_2(\tau)G(x,l,t-\tau)\,d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,t)=\frac{bt}{a^2\left[1-\exp(-bl/a^2)\right]}\exp\Bigl(-\frac{b\xi}{a^2}\Bigr)+\frac{2}{l}\exp\Bigl[\frac{b}{2a^2}(x-\xi)\Bigr]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n(x)y_n(\xi)\sin(\lambda_n t)}{\lambda_n(1+\mu_n^2)},$$
$$y_n(x)=\cos\Bigl(\frac{\pi nx}{l}\Bigr)-\frac{bl}{2a^2\pi n}\sin\Bigl(\frac{\pi nx}{l}\Bigr),\quad \lambda_n=\sqrt{\frac{a^2\pi^2n^2}{l^2}+\frac{b^2}{4a^2}},\quad \mu_n=\frac{bl}{2a^2\pi n}.$$

⊙ *Литература*: А. Г. Бутковский (1979, стр. 93).

4.1.4-5. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Третья краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(x) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(x) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_x w-k_1w &= g_1(t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_x w+k_2w &= g_2(t) &&\text{при}\quad x=l &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(x,t)$ определяется по формуле из разд. 4.1.4-4, где

$$G(x,\xi,t)=\exp\Bigl[\frac{b(x-\xi)}{2a^2}\Bigr]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n(x)y_n(\xi)\sin(a\lambda_n t)}{a\lambda_n B_n}.$$

Здесь

$$y_n(x)=\cos(\mu_n x)+\frac{2a^2k_1-b}{2a^2\mu_n}\sin(\mu_n x),\qquad \lambda_n=\sqrt{\mu_n^2+\frac{b^2}{4a^4}},$$
$$B_n=\frac{2a^2k_2+b}{4a^2\mu_n^2}\,\frac{4a^4\mu_n^2+(2a^2k_1-b)^2}{4a^4\mu_n^2+(2a^2k_2+b)^2}+\frac{2a^2k_1-b}{4a^2\mu_n^2}+\frac{l}{2}+\frac{l(2a^2k_1-b)^2}{8a^4\mu_n^2},$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\frac{\operatorname{tg}(\mu l)}{\mu}=\frac{4a^4(k_1+k_2)}{4a^4\mu^2-(2a^2k_1-b)(2a^2k_2+b)}.$$

⊙ *Литература*: А. Г. Бутковский (1979, стр. 86).

4.1.5. Уравнение вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+b\dfrac{\partial w}{\partial x}+cw+\Phi(x,t)$

4.1.5-1. Приведение к неоднородному уравнению Клейна — Гордона.

Замена $w(x,t)=\exp\bigl(-\frac{1}{2}a^{-2}bx\bigr)u(x,t)$ приводит к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\bigl(c-\tfrac{1}{4}a^{-2}b^2\bigr)u+\exp\bigl(\tfrac{1}{2}a^{-2}bx\bigr)\Phi(x,t),$$

которое рассматривается в разд. 4.1.3.

4.1.5-2. Область: $-\infty < x < \infty$. Задача Коши.

Заданы начальные условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x) &&\text{при}\quad t=0,\\ \partial_t w &= g(x) &&\text{при}\quad t=0. \end{aligned}$$

Решение при $c - \frac{1}{4}a^{-2}b^2 = \sigma^2 > 0$:

$$w(x,t) = \frac{1}{2}f(x+at)\exp\Bigl(\frac{bt}{2a}\Bigr) + \frac{1}{2}f(x-at)\exp\Bigl(-\frac{bt}{2a}\Bigr) + \\ + \frac{\sigma t}{2a}\exp\Bigl(-\frac{bx}{2a^2}\Bigr)\int_{x-at}^{x+at}\exp\Bigl(\frac{b\xi}{2a^2}\Bigr)\frac{I_1\bigl(\sigma\sqrt{t^2-(x-\xi)^2/a^2}\,\bigr)}{\sqrt{t^2-(x-\xi)^2/a^2}}f(\xi)\,d\xi + \\ + \frac{1}{2a}\exp\Bigl(-\frac{bx}{2a^2}\Bigr)\int_{x-at}^{x+at}\exp\Bigl(\frac{b\xi}{2a^2}\Bigr)I_0\bigl(\sigma\sqrt{t^2-(x-\xi)^2/a^2}\,\bigr)g(\xi)\,d\xi + \\ + \frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\exp\Bigl[\frac{b(\xi-x)}{2a^2}\Bigr]I_0\bigl(\sigma\sqrt{(t-\tau)^2-(x-\xi)^2/a^2}\,\bigr)\Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где $I_0(z)$ и $I_1(z)$ — модифицированные функции Бесселя первого рода.

Решение при $c - \frac{1}{4}a^{-2}b^2 = -\sigma^2 < 0$:

$$w(x,t) = \frac{1}{2}f(x+at)\exp\Bigl(\frac{bt}{2a}\Bigr) + \frac{1}{2}f(x-at)\exp\Bigl(-\frac{bt}{2a}\Bigr) - \\ - \frac{\sigma t}{2a}\exp\Bigl(-\frac{bx}{2a^2}\Bigr)\int_{x-at}^{x+at}\exp\Bigl(\frac{b\xi}{2a^2}\Bigr)\frac{J_1\bigl(\sigma\sqrt{t^2-(x-\xi)^2/a^2}\,\bigr)}{\sqrt{t^2-(x-\xi)^2/a^2}}f(\xi)\,d\xi + \\ + \frac{1}{2a}\exp\Bigl(-\frac{bx}{2a^2}\Bigr)\int_{x-at}^{x+at}\exp\Bigl(\frac{b\xi}{2a^2}\Bigr)J_0\bigl(\sigma\sqrt{t^2-(x-\xi)^2/a^2}\,\bigr)g(\xi)\,d\xi + \\ + \frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\exp\Bigl[\frac{b(\xi-x)}{2a^2}\Bigr]J_0\bigl(\sigma\sqrt{(t-\tau)^2-(x-\xi)^2/a^2}\,\bigr)\Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где $J_0(z)$ и $J_1(z)$ — функции Бесселя первого рода.

⊙ *Литература*: А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972, стр. 136–138).

4.1.5-3. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(x) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(x) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\ w &= g_2(t) &&\text{при}\quad x=l &&\text{(граничное условие)}.\end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t) = \int_0^t\int_0^l \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau + \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l f_0(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^l f_1(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \\ + a^2\int_0^t g_1(\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,t-\tau)\Bigr]_{\xi=0}d\tau - a^2\int_0^t g_2(\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,t-\tau)\Bigr]_{\xi=l}d\tau.$$

Пусть $a^2\pi^2 + \frac{1}{4}a^{-2}b^2l^2 - cl^2 > 0$. Тогда

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l}\exp\Bigl[\frac{b(\xi-x)}{2a^2}\Bigr]\sum_{n=1}^{\infty}\sin\Bigl(\frac{\pi nx}{l}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{\pi n\xi}{l}\Bigr)\frac{\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_n}\,\bigr)}{\sqrt{\lambda_n}}, \qquad \lambda_n = \frac{a^2\pi^2n^2}{l^2} + \frac{b^2}{4a^2} - c.$$

Пусть

$$\begin{aligned} a^2\pi^2n^2 + \tfrac{1}{4}a^{-2}b^2l^2 - cl^2 &\leqslant 0 \quad\text{при}\quad n = 1,\dots,m;\\ a^2\pi^2n^2 + \tfrac{1}{4}a^{-2}b^2l^2 - cl^2 &> 0 \quad\text{при}\quad n = m+1, m+2,\dots\end{aligned}$$

Тогда

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l}\exp\Bigl[\frac{b(\xi-x)}{2a^2}\Bigr]\sum_{n=1}^{m}\sin\Bigl(\frac{\pi nx}{l}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{\pi n\xi}{l}\Bigr)\frac{\operatorname{sh}\bigl(t\sqrt{\beta_n}\,\bigr)}{\sqrt{\beta_n}} + \\ + \frac{2}{l}\exp\Bigl[\frac{b(\xi-x)}{2a^2}\Bigr]\sum_{n=m+1}^{\infty}\sin\Bigl(\frac{\pi nx}{l}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{\pi n\xi}{l}\Bigr)\frac{\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_n}\,\bigr)}{\sqrt{\lambda_n}},$$

$$\beta_n = c - \frac{a^2\pi^2n^2}{l^2} - \frac{b^2}{4a^2}, \quad \lambda_n = \frac{a^2\pi^2n^2}{l^2} + \frac{b^2}{4a^2} - c.$$

При $\beta_n = 0$ отношение $\operatorname{sh}\bigl(t\sqrt{\beta_n}\,\bigr)/\sqrt{\beta_n}$ заменяется на t.

⊙ *Литература*: А. Г. Бутковский (1979, стр. 98).

4.1.5-4. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Вторая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f_0(x) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(x) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_x w &= g_1(t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_x w &= g_2(t) &&\text{при}\quad x=l &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
w(x,t)=\int_0^t\int_0^l \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau+\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l f_0(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi+\int_0^l f_1(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi-
$$

$$
-a^2\int_0^t g_1(\tau)G(x,0,t-\tau)\,d\tau+a^2\int_0^t g_2(\tau)G(x,l,t-\tau)\,d\tau.
$$

При $c<0$:

$$
G(x,\xi,t)=\frac{b}{a^2(e^{bl/a^2}-1)}\exp\Bigl(\frac{b\xi}{a^2}\Bigr)\frac{\sin\bigl(t\sqrt{|c|}\bigr)}{\sqrt{|c|}}+\frac{2}{l}\exp\Bigl[\frac{b(\xi-x)}{2a^2}\Bigr]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n(x)y_n(\xi)}{1+\mu_n^2}\frac{\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_n}\bigr)}{\sqrt{\lambda_n}},
$$

$$
\lambda_n=\frac{a^2\pi^2n^2}{l^2}+\frac{b^2}{4a^2}-c,\quad y_n(x)=\cos\Bigl(\frac{\pi nx}{l}\Bigr)+\mu_n\sin\Bigl(\frac{\pi nx}{l}\Bigr),\quad \mu_n=\frac{bl}{2a^2\pi n}.
$$

При $c>0$:

$$
G(x,\xi,t)=\frac{b}{a^2(e^{bl/a^2}-1)}\exp\Bigl(\frac{b\xi}{a^2}\Bigr)\frac{\operatorname{sh}(t\sqrt{c})}{\sqrt{c}}+\frac{2}{l}\exp\Bigl[\frac{b(\xi-x)}{2a^2}\Bigr]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n(x)y_n(\xi)}{1+\mu_n^2}\frac{\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_n}\bigr)}{\sqrt{\lambda_n}},
$$

где λ_n, $y_n(x)$, μ_n были указаны ранее. Если для нескольких первых значений $n=1,\ldots,m$ выполняется неравенство $\lambda_n<0$, то в соответствующих членах ряда выражения $\sqrt{\lambda_n}$ следует заменить на $\sqrt{|\lambda_n|}$, а синусы — на гиперболические синусы.

4.1.5-5. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Третья краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f_0(x) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(x) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_x w-k_1w &= g_1(t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_x w+k_2w &= g_2(t) &&\text{при}\quad x=l &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение $w(x,t)$ определяется по формуле из разд. 4.1.5-4, где

$$
G(x,\xi,t)=\exp\Bigl[\frac{b(\xi-x)}{2a^2}\Bigr]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n(x)y_n(\xi)\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_n}\bigr)}{B_n\sqrt{\lambda_n}}.
$$

Здесь

$$
y_n(x)=\cos(\mu_nx)+\frac{2a^2k_1+b}{2a^2\mu_n}\sin(\mu_nx),\qquad \lambda_n=a^2\mu_n^2+\frac{b^2}{4a^2}-c,
$$

$$
B_n=\frac{2a^2k_2-b}{4a^2\mu_n^2}\,\frac{4a^4\mu_n^2+(2a^2k_1+b)^2}{4a^4\mu_n^2+(2a^2k_2-b)^2}+\frac{2a^2k_1+b}{4a^2\mu_n^2}+\frac{l}{2}+\frac{l(2a^2k_1+b)^2}{8a^4\mu_n^2},
$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$
\frac{\operatorname{tg}(\mu l)}{\mu}=\frac{4a^4(k_1+k_2)}{4a^4\mu^2-(2a^2k_1+b)(2a^2k_2-b)}.
$$

4.2. Одномерное волновое уравнение с осевой и центральной симметрией

4.2.1. Уравнение вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\Bigl(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\Bigr)$

Одномерное волновое уравнение с осевой симметрией, где $r=\sqrt{x^2+y^2}$ — радиальная координата. В рассматриваемых в разд. 4.2.1-1 — 4.2.1-3 задачах ищутся решения, ограниченные при $r=0$ (в тексте это специально не оговаривается).

4.2.1-1. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r) \quad \text{при} \quad t=0 \quad \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(r) \quad \text{при} \quad t=0 \quad \text{(начальное условие)},\\ w &= g(t) \quad \text{при} \quad r=R \quad \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R f_0(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi+\int_0^R f_1(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi-a^2\int_0^t g(\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\xi,t-\tau)\right]_{\xi=R}d\tau,$$

где

$$G(r,\xi,t)=\frac{2\xi}{aR}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n J_1^2(\lambda_n)}J_0\left(\frac{\lambda_n r}{R}\right)J_0\left(\frac{\lambda_n\xi}{R}\right)\sin\left(\frac{\lambda_n at}{R}\right).$$

Здесь λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $J_0(\lambda)=0$ (численные значения первых десяти корней λ_n указаны в разд. 1.2.1-3).

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 534).

4.2.1-2. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Вторая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r) \quad \text{при} \quad t=0 \quad \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(r) \quad \text{при} \quad t=0 \quad \text{(начальное условие)},\\ \partial_r w &= g(t) \quad \text{при} \quad r=R \quad \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R f_0(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi+\int_0^R f_1(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi+a^2\int_0^t g(\tau)G(r,R,t-\tau)\,d\tau,$$

где

$$G(r,\xi,t)=\frac{2t\xi}{R^2}+\frac{2\xi}{aR}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n J_0^2(\lambda_n)}J_0\left(\frac{\lambda_n r}{R}\right)J_0\left(\frac{\lambda_n\xi}{R}\right)\sin\left(\frac{\lambda_n at}{R}\right).$$

Здесь λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $J_1(\lambda)=0$ (численные значения первых десяти корней λ_n указаны в разд. 1.2.1-4).

⊙ *Литература*: М. М. Смирнов (1975, стр. 84–85), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 535).

4.2.1-3. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Третья краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r) \quad \text{при} \quad t=0 \quad \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(r) \quad \text{при} \quad t=0 \quad \text{(начальное условие)},\\ \partial_r w+kw &= g(t) \quad \text{при} \quad r=R \quad \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(r,t)$ определяется по формуле из разд. 4.2.1-2, где

$$G(r,\xi,t)=\frac{2\xi}{aR}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{(k^2R^2+\lambda_n^2)J_0^2(\lambda_n)}J_0\left(\frac{\lambda_n r}{R}\right)J_0\left(\frac{\lambda_n\xi}{R}\right)\sin\left(\frac{\lambda_n at}{R}\right).$$

Здесь λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\lambda J_1(\lambda)-kRJ_0(\lambda)=0.$$

Численные значения первых шести корней λ_n приведены в книге Г. Карслоу, Д. Егера (1964, стр. 482); см. также М. Абрамовиц, И. Стиган (1979, стр. 232).

4.2.1-4. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f_0(r) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(t) &&\text{при}\quad r = R_1 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(t) &&\text{при}\quad r = R_2 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
w(r,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_{R_1}^{R_2} f_0(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi + \int_{R_1}^{R_2} f_1(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi +
$$
$$
+ a^2\int_0^t g_1(\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\xi,t-\tau)\Big]_{\xi=R_1}d\tau - a^2\int_0^t g_2(\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\xi,t-\tau)\Big]_{\xi=R_2}d\tau.
$$

Здесь

$$
G(r,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\xi\Psi_n(r)\Psi_n(\xi)\sin\Big(\frac{\lambda_n at}{R_1}\Big),\qquad A_n = \frac{\pi^2\lambda_n J_0^2(s\lambda_n)}{2aR_1\left[J_0^2(\lambda_n) - J_0^2(s\lambda_n)\right]},
$$
$$
\Psi_n(r) = Y_0(\lambda_n)J_0\Big(\frac{\lambda_n r}{R_1}\Big) - J_0(\lambda_n)Y_0\Big(\frac{\lambda_n r}{R_1}\Big),\qquad s = \frac{R_2}{R_1},
$$

где $J_0(z)$ и $Y_0(z)$ — функции Бесселя, λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$
J_0(\lambda)Y_0(s\lambda) - J_0(s\lambda)Y_0(\lambda) = 0.
$$

Численные значения первых пяти корней $\lambda_n = \lambda_n(s)$ приведены в книгах М. Абрамовица, И. Стиган (1979, стр. 233) и Г. Карслоу, Д. Егера (1964, стр. 482).

4.2.1-5. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. Вторая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f_0(r) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_r w &= g_1(t) &&\text{при}\quad r = R_1 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_r w &= g_2(t) &&\text{при}\quad r = R_2 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
w(r,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_{R_1}^{R_2} f_0(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi + \int_{R_1}^{R_2} f_1(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi -
$$
$$
- a^2\int_0^t g_1(\tau)G(r,R_1,t-\tau)\,d\tau + a^2\int_0^t g_2(\tau)G(r,R_2,t-\tau)\,d\tau.
$$

Здесь

$$
G(r,\xi,t) = \frac{2t\xi}{R_2^2 - R_1^2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\xi\Psi_n(r)\Psi_n(\xi)\sin\Big(\frac{\lambda_n at}{R_1}\Big),\qquad A_n = \frac{\pi^2\lambda_n J_1^2(s\lambda_n)}{2aR_1\left[J_1^2(\lambda_n) - J_1^2(s\lambda_n)\right]},
$$
$$
\Psi_n(r) = Y_1(\lambda_n)J_0\Big(\frac{\lambda_n r}{R_1}\Big) - J_1(\lambda_n)Y_0\Big(\frac{\lambda_n r}{R_1}\Big),\qquad s = \frac{R_2}{R_1},
$$

где $J_k(z)$ и $Y_k(z)$ — функции Бесселя ($k = 0,\ 1$); λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$
J_1(\lambda)Y_1(s\lambda) - J_1(s\lambda)Y_1(\lambda) = 0.
$$

Численные значения первых пяти корней $\lambda_n = \lambda_n(s)$ приведены в книге М. Абрамовица, И. Стиган (1979, стр. 233).

4.2.1-6. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. Третья краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f_0(r) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_r w - k_1 w &= g_1(t) &&\text{при}\quad r = R_1 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_r w + k_2 w &= g_2(t) &&\text{при}\quad r = R_2 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение $w(r,t)$ определяется по формуле из разд. 4.2.1-5, где

$$G(r,\xi,t) = \frac{\pi^2}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{B_n} \bigl[k_2 J_0(\mu_n R_2) - \mu_n J_1(\mu_n R_2)\bigr]^2 \xi H_n(r) H_n(\xi) \sin(\mu_n at).$$

Здесь

$$B_n = (\mu_n^2 + k_2^2)\bigl[k_1 J_0(\mu_n R_1) + \mu_n J_1(\mu_n R_1)\bigr]^2 - (\mu_n^2 + k_1^2)\bigl[k_2 J_0(\mu_n R_2) - \mu_n J_1(\mu_n R_2)\bigr]^2,$$
$$H_n(r) = \bigl[k_1 Y_0(\mu_n R_1) + \mu_n Y_1(\mu_n R_1)\bigr] J_0(\mu_n r) - \bigl[k_1 J_0(\mu_n R_1) + \mu_n J_1(\mu_n R_1)\bigr] Y_0(\mu_n r);$$

μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\bigl[k_1 J_0(\mu R_1) + \mu J_1(\mu R_1)\bigr]\bigl[k_2 Y_0(\mu R_2) - \mu Y_1(\mu R_2)\bigr] - \\ - \bigl[k_2 J_0(\mu R_2) - \mu J_1(\mu R_2)\bigr]\bigl[k_1 Y_0(\mu R_1) + \mu Y_1(\mu R_1)\bigr] = 0.$$

4.2.2. Уравнение вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\Bigl(\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r}\Bigr) + \Phi(r,t)$

4.2.2-1. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Различные краевые задачи.

1°. Решение первой краевой задачи для круга радиуса R дается формулой из разд. 4.2.1-1 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t \int_0^R \Phi(\xi,\tau) G(r,\xi,t-\tau)\, d\xi\, d\tau, \qquad (1)$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

2°. Решение второй краевой задачи для круга радиуса R дается формулой из разд. 4.2.1-2 с дополнительным слагаемым (1).

3°. Решение третьей краевой задачи для круга радиуса R дается суммой решения, указанного в разд. 4.2.1-3, и выражения (1).

4.2.2-2. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. Различные краевые задачи.

1°. Решение первой краевой задачи для кольцевой области дается формулой из разд. 4.2.1-4 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t \int_{R_1}^{R_2} \Phi(\xi,\tau) G(r,\xi,t-\tau)\, d\xi\, d\tau, \qquad (2)$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

2°. Решение второй краевой задачи для кольцевой области дается формулой из разд. 4.2.1-5 с дополнительным слагаемым (2).

3°. Решение третьей краевой задачи для кольцевой области дается суммой решения, указанного в разд. 4.2.1-6, и выражения (2).

4.2.3. Уравнение вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\Bigl(\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r}\Bigr)$

Уравнение одномерных колебаний с центральной симметрией, где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ — радиальная координата. В рассматриваемых в разд. 4.2.3-1 — 4.2.3-3 задачах ищутся решения, ограниченные при $r=0$ (в тексте это специально не оговаривается).

4.2.3-1. Общее решение:

$$w(t,r) = \frac{\varphi(r+at) + \psi(r-at)}{r},$$

где $\varphi(r_1)$ и $\psi(r_2)$ — произвольные функции.

4.2.3-2. Преобразование к уравнению с постоянными коэффициентами.

Замена $u(r,t) = rw(r,t)$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2},$$

которое рассматривается в разд. 4.1.1.

4.2.3-3. Область: $0 \leqslant r < \infty$. Задача Коши.

Заданы начальные условия:

$$w = f(r) \quad \text{при} \quad t = 0,$$
$$\partial_t w = g(r) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Решение:

$$w(r,t) = \frac{1}{2r}\Big[(r-at)f\big(|r-at|\big) + (r+at)f\big(|r+at|\big)\Big] + \frac{1}{2ar}\int_{r-at}^{r+at} \xi g\big(|\xi|\big)\,d\xi.$$

Решение в центре при $r = 0$:

$$w(0,t) = atf'(at) + f(at) + tg(at).$$

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 518).

4.2.3-4. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(r) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ w &= g(t) && \text{при} \quad r = R && \text{(граничное условие)}.\end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^R f_0(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi + \int_0^R f_1(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi - a^2\int_0^t g(\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial \xi}G(r,\xi,t-\tau)\Big]_{\xi=R}\,d\tau,$$

где

$$G(r,\xi,t) = \frac{2\xi}{\pi a r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\Big(\frac{n\pi r}{R}\Big)\sin\Big(\frac{n\pi\xi}{R}\Big)\sin\Big(\frac{an\pi t}{R}\Big).$$

4.2.3-5. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Вторая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(r) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_r w &= g(t) && \text{при} \quad r = R && \text{(граничное условие)}.\end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^R f_0(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi + \int_0^R f_1(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi + a^2\int_0^t g(\tau)G(r,R,t-\tau)\,d\tau,$$

где

$$G(r,\xi,t) = \frac{3t\xi^2}{R^3} + \frac{2\xi}{ar}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2+1}{\mu_n^3}\sin\Big(\frac{\mu_n r}{R}\Big)\sin\Big(\frac{\mu_n\xi}{R}\Big)\sin\Big(\frac{\mu_n at}{R}\Big).$$

Здесь μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\operatorname{tg}\mu - \mu = 0$ (численные значения первых пяти корней μ_n указаны в разд. 1.2.3-5).

4.2.3-6. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Третья краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)}, \\ \partial_t w &= f_1(r) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)}, \\ \partial_r w + kw &= g(t) && \text{при} \quad r=R && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(r,t)$ определяется по формуле из разд. 4.2.3-5, где

$$G(r,\xi,t) = \frac{2\xi}{ar} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2 + (kR-1)^2}{\mu_n\left[\mu_n^2 + kR(kR-1)\right]} \sin\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) \sin\left(\frac{\mu_n \xi}{R}\right) \sin\left(\frac{\mu_n a t}{R}\right).$$

Здесь μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\mu \operatorname{ctg} \mu + kR - 1 = 0.$$

Численные значения первых шести корней μ_n приведены в книге Г. Карслоу, Д. Егера (1964, стр. 481).

4.2.3-7. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)}, \\ \partial_t w &= f_1(r) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)}, \\ w &= g_1(t) && \text{при} \quad r=R_1 && \text{(граничное условие)}, \\ w &= g_2(t) && \text{при} \quad r=R_2 && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,t) = {} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{R_1}^{R_2} f_0(\xi) G(r,\xi,t)\, d\xi + \int_{R_1}^{R_2} f_1(\xi) G(r,\xi,t)\, d\xi + \\ & + a^2 \int_0^t g_1(\tau) \left[\frac{\partial}{\partial \xi} G(r,\xi,t-\tau)\right]_{\xi=R_1} d\tau - a^2 \int_0^t g_2(\tau) \left[\frac{\partial}{\partial \xi} G(r,\xi,t-\tau)\right]_{\xi=R_2} d\tau, \end{aligned}$$

где

$$G(r,\xi,t) = \frac{2\xi}{\pi a r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left[\frac{\pi n(r-R_1)}{R_2-R_1}\right] \sin\left[\frac{\pi n(\xi-R_1)}{R_2-R_1}\right] \sin\left(\frac{\pi n a t}{R_2-R_1}\right).$$

4.2.3-8. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. Вторая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)}, \\ \partial_t w &= f_1(r) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)}, \\ \partial_r w &= g_1(t) && \text{при} \quad r=R_1 && \text{(граничное условие)}, \\ \partial_r w &= g_2(t) && \text{при} \quad r=R_2 && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,t) = {} & \int_{R_1}^{R_2} f_0(\xi) G(r,\xi,t)\, d\xi + \int_{R_1}^{R_2} f_1(\xi) G(r,\xi,t)\, d\xi - \\ & - a^2 \int_0^t g_1(\tau) G(r,R_1,t-\tau)\, d\tau + a^2 \int_0^t g_2(\tau) G(r,R_2,t-\tau)\, d\tau, \end{aligned}$$

где

$$G(r,\xi,t) = \frac{3t\xi^2}{R_2^3 - R_1^3} + \frac{2\xi}{a(R_2-R_1)r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+R_2^2\lambda_n^2)\Psi_n(r)\Psi_n(\xi)\sin(\lambda_n a t)}{\lambda_n^3\left[R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2(1 + R_1 R_2 \lambda_n^2)\right]},$$

$$\Psi_n(r) = \sin[\lambda_n(r-R_1)] + R_1\lambda_n \cos[\lambda_n(r-R_1)].$$

Здесь λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$(\lambda^2 R_1 R_2 + 1) \operatorname{tg}[\lambda(R_2-R_1)] - \lambda(R_2-R_1) = 0.$$

4.2.3-9. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. Третья краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f_0(r) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_r w - k_1 w &= g_1(t) &&\text{при}\quad r=R_1 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_r w + k_2 w &= g_2(t) &&\text{при}\quad r=R_2 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение $w(r,t)$ определяется по формуле из разд. 4.2.3-8, где

$$
G(r,\xi,t) = \frac{2\xi}{ar}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\frac{(b_2^2+R_2^2\lambda_n^2)\Psi_n(r)\Psi_n(\xi)\sin(\lambda_n at)}{(R_2-R_1)(b_1^2+R_1^2\lambda_n^2)(b_2^2+R_2^2\lambda_n^2)+(b_1R_2+b_2R_1)(b_1b_2+R_1R_2\lambda_n^2)},
$$

$$
\Psi_n(r) = b_1\sin[\lambda_n(r-R_1)] + R_1\lambda_n\cos[\lambda_n(r-R_1)],\quad b_1 = k_1R_1+1,\quad b_2 = k_2R_2-1.
$$

Здесь λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$
(b_1b_2 - R_1R_2\lambda^2)\sin[\lambda(R_2-R_1)] + \lambda(R_1b_2+R_2b_1)\cos[\lambda(R_2-R_1)] = 0.
$$

4.2.4. Уравнение вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\Bigl(\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r}\Bigr) + \Phi(r,t)$

4.2.4-1. Приведение к неоднородному уравнению с постоянными коэффициентами.

Замена $u(r,t) = rw(r,t)$ приводит к неоднородному уравнению с постоянными коэффициентами

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\Phi(r,t),
$$

которое рассматривается в разд. 4.1.2.

4.2.4-2. Область: $0 \leqslant r < \infty$. Задача Коши.

Заданы начальные условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f(r) &&\text{при}\quad t=0,\\
\partial_t w &= g(r) &&\text{при}\quad t=0.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
w(r,t) = \frac{1}{2r}\Bigl[(r-at)f\bigl(|r-at|\bigr) + (r+at)f\bigl(|r+at|\bigr)\Bigr] + \frac{1}{2ar}\int_{r-at}^{r+at}\xi g\bigl(|\xi|\bigr)\,d\xi +
$$
$$
+ \frac{1}{2ar}\int_0^t d\tau\int_{r-a(t-\tau)}^{r+a(t-\tau)}\xi\Phi\bigl(|\xi|,\tau\bigr)\,d\xi.
$$

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 518).

4.2.4-3. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Различные краевые задачи.

1°. Решение первой краевой задачи для сферы радиуса R дается формулой из разд. 4.2.3-4 с дополнительным слагаемым

$$
\int_0^t\int_0^R \Phi(\xi,\tau)G(r,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau, \tag{1}
$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

2°. Решение второй краевой задачи для сферы радиуса R дается формулой из разд. 4.2.3-5 с дополнительным слагаемым (1).

3°. Решение третьей краевой задачи для сферы радиуса R дается суммой решения, указанного в разд. 4.2.3-6, и выражения (1).

4.2.4-4. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. Различные краевые задачи.

1°. Решение первой краевой задачи для сферического слоя дается формулой из разд. 4.2.3-7 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t \int_{R_1}^{R_2} \Phi(\xi,\tau)G(r,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau, \tag{2}$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

2°. Решение второй краевой задачи для сферического слоя дается формулой из разд. 4.2.3-8 с дополнительным слагаемым (2).

3°. Решение третьей краевой задачи для сферического слоя дается суммой решения, указанного в разд. 4.2.3-9, и выражения (2).

4.2.5. Уравнение вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\Big) - bw + \Phi(r,t)$

Уравнение Клейна — Гордона (при $b > 0$ и $\Phi \equiv 0$), описывающее одномерные процессы с осевой симметрией. В рассматриваемых в разд. 4.2.5-1 — 4.2.5-3 задачах ищутся решения, ограниченные при $r = 0$ (в тексте это специально не оговаривается).

4.2.5-1. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(r) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ w &= g(t) &&\text{при}\quad r=R &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,t) = {}&\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R f_0(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi + \int_0^R f_1(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi -\\ &- a^2\int_0^t g(\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial \xi}G(r,\xi,t-\tau)\Big]_{\xi=R}\,d\tau + \int_0^t\int_0^R \Phi(\xi,\tau)G(r,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau. \end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\xi}{R^2 J_1^2(\mu_n)} J_0\Big(\frac{\mu_n r}{R}\Big) J_0\Big(\frac{\mu_n \xi}{R}\Big)\frac{\sin\big(t\sqrt{\lambda_n}\,\big)}{\sqrt{\lambda_n}}, \qquad \lambda_n = \frac{a^2\mu_n^2}{R^2} + b,$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $J_0(\mu) = 0$. Численные значения первых десяти μ_n приведены в разд. 1.2.1-3.

4.2.5-2. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Вторая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(r) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_r w &= g(t) &&\text{при}\quad r=R &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,t) = {}&\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R f_0(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi + \int_0^R f_1(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi +\\ &+ a^2\int_0^t g(\tau)G(r,R,t-\tau)\,d\tau + \int_0^t\int_0^R \Phi(\xi,\tau)G(r,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau. \end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,\xi,t) = \frac{2\xi\sin\big(t\sqrt{b}\,\big)}{R^2\sqrt{b}} + \frac{2}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi}{J_0^2(\mu_n)} J_0\Big(\frac{\mu_n r}{R}\Big) J_0\Big(\frac{\mu_n \xi}{R}\Big)\frac{\sin\big(t\sqrt{\lambda_n}\,\big)}{\sqrt{\lambda_n}}, \qquad \lambda_n = \frac{a^2\mu_n^2}{R^2} + b,$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $J_1(\mu) = 0$. Численные значения первых десяти μ_n приведены в разд. 1.2.1-4.

4.2.5-3. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Третья краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(r) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_r w + kw &= g(t) && \text{при} \quad r = R && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(r,t)$ определяется по формуле из разд. 4.2.5-2, где

$$G(r,\xi,t) = \frac{2}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2\xi}{(k^2R^2+\mu_n^2)J_0^2(\mu_n)}J_0\Bigl(\frac{\mu_n r}{R}\Bigr)J_0\Bigl(\frac{\mu_n \xi}{R}\Bigr)\frac{\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_n}\,\bigr)}{\sqrt{\lambda_n}}, \qquad \lambda_n = \frac{a^2\mu_n^2}{R^2} + b.$$

Здесь μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\mu J_1(\mu) - kRJ_0(\mu) = 0.$$

Численные значения первых шести корней μ_n приведены в книгах М. Абрамовица, И. Стиган (1979, стр. 232) и Г. Карслоу, Д. Егера (1964, стр. 482).

4.2.5-4. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(r) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(t) && \text{при} \quad r = R_1 && \text{(граничное условие)},\\ w &= g_2(t) && \text{при} \quad r = R_2 && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,t) &= \int_0^t\int_{R_1}^{R_2}\Phi(\xi,\tau)G(r,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau + \\ &+ \frac{\partial}{\partial t}\int_{R_1}^{R_2} f_0(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi + \int_{R_1}^{R_2} f_1(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi + \\ &+ a^2\int_0^t g_1(\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\xi,t-\tau)\Bigr]_{\xi=R_1}d\tau - a^2\int_0^t g_2(\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\xi,t-\tau)\Bigr]_{\xi=R_2}d\tau. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{gathered} G(r,\xi,t) = \frac{\pi^2}{2R_1^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2J_0^2(s\mu_n)\xi}{J_0^2(\mu_n)-J_0^2(s\mu_n)}\Psi_n(r)\Psi_n(\xi)\frac{\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_n}\,\bigr)}{\sqrt{\lambda_n}}, \qquad \lambda_n = \frac{a^2\mu_n^2}{R_1^2} + b,\\ \Psi_n(r) = Y_0(\mu_n)J_0\Bigl(\frac{\mu_n r}{R_1}\Bigr) - J_0(\mu_n)Y_0\Bigl(\frac{\mu_n r}{R_1}\Bigr), \qquad s = \frac{R_2}{R_1}, \end{gathered}$$

где $J_0(z)$ и $Y_0(z)$ — функции Бесселя, μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_0(\mu)Y_0(s\mu) - J_0(s\mu)Y_0(\mu) = 0.$$

Численные значения первых пяти корней $\mu_n = \mu_n(s)$ приведены в книгах М. Абрамовица, И. Стиган (1979, стр. 233) и Г. Карслоу, Д. Егера (1964, стр. 482).

4.2.5-5. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. Вторая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(r) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_r w &= g_1(t) && \text{при} \quad r = R_1 && \text{(граничное условие)},\\ \partial_r w &= g_2(t) && \text{при} \quad r = R_2 && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(r,t) = {} & \int_0^t \int_{R_1}^{R_2} \Phi(\xi,\tau) G(r,\xi,t-\tau)\, d\xi\, d\tau + \\
& + \frac{\partial}{\partial t} \int_{R_1}^{R_2} f_0(\xi) G(r,\xi,t)\, d\xi + \int_{R_1}^{R_2} f_1(\xi) G(r,\xi,t)\, d\xi - \\
& - a^2 \int_0^t g_1(\tau) G(r,R_1,t-\tau)\, d\tau + a^2 \int_0^t g_2(\tau) G(r,R_2,t-\tau)\, d\tau .
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
\begin{gathered}
G(r,\xi,t) = \frac{2\xi \sin\bigl(t\sqrt{b}\bigr)}{(R_2^2 - R_1^2)\sqrt{b}} + \frac{\pi^2}{2R_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2 J_1^2(s\mu_n)\xi}{J_1^2(\mu_n) - J_1^2(s\mu_n)} \Psi_n(r)\Psi_n(\xi) \frac{\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_n}\,\bigr)}{\sqrt{\lambda_n}}, \\
\Psi_n(r) = Y_1(\mu_n) J_0\Bigl(\frac{\mu_n r}{R_1}\Bigr) - J_1(\mu_n) Y_0\Bigl(\frac{\mu_n r}{R_1}\Bigr), \quad \lambda_n = \frac{a^2\mu_n^2}{R_1^2} + b, \quad s = \frac{R_2}{R_1},
\end{gathered}
$$

где $J_k(z)$ и $Y_k(z)$ — функции Бесселя ($k = 0,\ 1$); μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$
J_1(\mu) Y_1(s\mu) - J_1(s\mu) Y_1(\mu) = 0.
$$

Численные значения первых пяти корней $\mu_n = \mu_n(s)$ приведены в книге М. Абрамовица, И. Стиган (1979, стр. 233).

4.2.5-6. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. Третья краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f_0(r) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}, \\
\partial_t w &= f_1(r) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}, \\
\partial_r w - k_1 w &= g_1(t) && \text{при} \quad r = R_1 && \text{(граничное условие)}, \\
\partial_r w + k_2 w &= g_2(t) && \text{при} \quad r = R_2 && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение $w(r,t)$ определяется по формуле из разд. 4.2.5-5, где

$$
G(r,\xi,t) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{B_n \sqrt{a^2\beta_n^2 + b}} \bigl[k_2 J_0(\beta_n R_2) - \beta_n J_1(\beta_n R_2)\bigr]^2 \xi H_n(r) H_n(\xi) \sin\bigl(t\sqrt{a^2\beta_n^2 + b}\,\bigr).
$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
B_n &= (\beta_n^2 + k_2^2)\bigl[k_1 J_0(\beta_n R_1) + \beta_n J_1(\beta_n R_1)\bigr]^2 - (\beta_n^2 + k_1^2)\bigl[k_2 J_0(\beta_n R_2) - \beta_n J_1(\beta_n R_2)\bigr]^2, \\
H_n(r) &= \bigl[k_1 Y_0(\beta_n R_1) + \beta_n Y_1(\beta_n R_1)\bigr] J_0(\beta_n r) - \bigl[k_1 J_0(\beta_n R_1) + \beta_n J_1(\beta_n R_1)\bigr] Y_0(\beta_n r),
\end{aligned}
$$

где β_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$
\begin{aligned}
& \bigl[k_1 J_0(\beta R_1) + \beta J_1(\beta R_1)\bigr]\bigl[k_2 Y_0(\beta R_2) - \beta Y_1(\beta R_2)\bigr] - \\
& \qquad - \bigl[k_2 J_0(\beta R_2) - \beta J_1(\beta R_2)\bigr]\bigl[k_1 Y_0(\beta R_1) + \beta Y_1(\beta R_1)\bigr] = 0.
\end{aligned}
$$

4.2.6. Уравнение вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\Bigl(\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r}\Bigr) - bw + \Phi(r,t)$

Уравнение Клейна — Гордона (при $b > 0$ и $\Phi \equiv 0$), описывающее одномерные процессы с центральной симметрией. В рассматриваемых в разд. 4.2.6-1 — 4.2.6-3 задачах ищутся решения, ограниченные при $r = 0$ (в тексте это специально не оговаривается).

4.2.6-1. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f_0(r) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}, \\
\partial_t w &= f_1(r) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}, \\
w &= g(t) && \text{при} \quad r = R && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$w(r,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^R f_0(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi + \int_0^R f_1(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi -$$
$$- a^2\int_0^t g(\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\xi,t-\tau)\Big]_{\xi=R}\,d\tau + \int_0^t\int_0^R \Phi(\xi,\tau)G(r,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где

$$G(r,\xi,t) = \frac{2\xi}{Rr}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\Big(\frac{n\pi r}{R}\Big)\sin\Big(\frac{n\pi\xi}{R}\Big)\frac{\sin\big(t\sqrt{\lambda_n}\,\big)}{\sqrt{\lambda_n}}, \quad \lambda_n = \frac{a^2\pi^2n^2}{R^2} + b.$$

4.2.6-2. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Вторая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(r) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_r w &= g(t) &&\text{при}\quad r = R &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^R f_0(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi + \int_0^R f_1(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi +$$
$$+ a^2\int_0^t g(\tau)G(r,R,t-\tau)\,d\tau + \int_0^t\int_0^R \Phi(\xi,\tau)G(r,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где

$$G(r,\xi,t) = \frac{3\xi^2\sin\big(t\sqrt{b}\,\big)}{R^3\sqrt{b}} + \frac{2\xi}{Rr}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2+1}{\mu_n^2\sqrt{\lambda_n}}\sin\Big(\frac{\mu_n r}{R}\Big)\sin\Big(\frac{\mu_n\xi}{R}\Big)\sin\big(t\sqrt{\lambda_n}\,\big), \quad \lambda_n = \frac{a^2\mu_n^2}{R^2} + b.$$

Здесь μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\operatorname{tg}\mu - \mu = 0$. Численные значения первых пяти корней μ_n см. в разд. 1.2.3-5.

4.2.6-3. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Третья краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(r) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_r w + kw &= g(t) &&\text{при}\quad r = R &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(r,t)$ определяется по формуле из разд. 4.2.6-2, где

$$G(r,\xi,t) = \frac{2\xi}{Rr}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2+(kR-1)^2}{\mu_n^2+kR(kR-1)}\sin\Big(\frac{\mu_n r}{R}\Big)\sin\Big(\frac{\mu_n\xi}{R}\Big)\frac{\sin\big(t\sqrt{\lambda_n}\,\big)}{\sqrt{\lambda_n}}, \quad \lambda_n = \frac{a^2\mu_n^2}{R^2} + b.$$

Здесь μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\mu\operatorname{ctg}\mu + kR - 1 = 0$. Численные значения первых шести корней μ_n приведены в книге Г. Карслоу, Д. Егера (1964, стр. 481).

4.2.6-4. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(r) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(t) &&\text{при}\quad r = R_1 &&\text{(граничное условие)},\\ w &= g_2(t) &&\text{при}\quad r = R_2 &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,t) = \int_0^t\int_{R_1}^{R_2}\Phi(\xi,\tau)G(r,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial t}\int_{R_1}^{R_2} f_0(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi + \int_{R_1}^{R_2} f_1(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi +$$
$$+ a^2\int_0^t g_1(\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\xi,t-\tau)\Big]_{\xi=R_1}\,d\tau - a^2\int_0^t g_2(\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\xi,t-\tau)\Big]_{\xi=R_2}\,d\tau,$$

где

$$G(r,\xi,t)=\frac{2\xi}{(R_2-R_1)r}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left[\frac{\pi n(r-R_1)}{R_2-R_1}\right]\sin\left[\frac{\pi n(\xi-R_1)}{R_2-R_1}\right]\frac{\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_n}\bigr)}{\sqrt{\lambda_n}},\qquad \lambda_n=\frac{a^2\pi^2n^2}{(R_2-R_1)^2}+b.$$

4.2.6-5. Область: $R_1\leqslant r\leqslant R_2$. Вторая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w&=f_0(r) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w&=f_1(r) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_r w&=g_1(t) &&\text{при}\quad r=R_1 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_r w&=g_2(t) &&\text{при}\quad r=R_2 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(r,t)={}&\int_0^t\int_{R_1}^{R_2}\Phi(\xi,\tau)G(r,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau+\\
&+\frac{\partial}{\partial t}\int_{R_1}^{R_2}f_0(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi+\int_{R_1}^{R_2}f_1(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi-\\
&-a^2\int_0^t g_1(\tau)G(r,R_1,t-\tau)\,d\tau+a^2\int_0^t g_2(\tau)G(r,R_2,t-\tau)\,d\tau.
\end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,\xi,t)=\frac{3\xi^2\sin\bigl(t\sqrt{b}\bigr)}{(R_2^3-R_1^3)\sqrt{b}}+\frac{2\xi}{(R_2-R_1)r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+R_2^2\lambda_n^2)\Psi_n(r)\Psi_n(\xi)\sin\bigl(t\sqrt{a^2\lambda_n^2+b}\bigr)}{\lambda_n^2\left[R_1^2+R_2^2+R_1R_2(1+R_1R_2\lambda_n^2)\right]\sqrt{a^2\lambda_n^2+b}},$$

$$\Psi_n(r)=\sin[\lambda_n(r-R_1)]+R_1\lambda_n\cos[\lambda_n(r-R_1)],$$

где λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$(\lambda^2R_1R_2+1)\operatorname{tg}[\lambda(R_2-R_1)]-\lambda(R_2-R_1)=0.$$

4.2.6-6. Область: $R_1\leqslant r\leqslant R_2$. Третья краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w&=f_0(r) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w&=f_1(r) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_r w-k_1w&=g_1(t) &&\text{при}\quad r=R_1 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_r w+k_2w&=g_2(t) &&\text{при}\quad r=R_2 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение $w(r,t)$ определяется по формуле из разд. 4.2.6-5, где

$$G(r,\xi,t)=\frac{2\xi}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(b_2^2+R_2^2\lambda_n^2)\Psi_n(r)\Psi_n(\xi)\sin\bigl(t\sqrt{a^2\lambda_n^2+b}\bigr)}{\left[(R_2-R_1)(b_1^2+R_1^2\lambda_n^2)(b_2^2+R_2^2\lambda_n^2)+(b_1R_2+b_2R_1)(b_1b_2+R_1R_2\lambda_n^2)\right]\sqrt{a^2\lambda_n^2+b}},$$

$$\Psi_n(r)=b_1\sin[\lambda_n(r-R_1)]+R_1\lambda_n\cos[\lambda_n(r-R_1)],\qquad b_1=k_1R_1+1,\qquad b_2=k_2R_2-1.$$

Здесь λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$(b_1b_2-R_1R_2\lambda^2)\sin[\lambda(R_2-R_1)]+\lambda(R_1b_2+R_2b_1)\cos[\lambda(R_2-R_1)]=0.$$

4.3. Уравнения с произвольными параметрами, содержащие степенные функции

4.3.1. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=(ax+b)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+c\dfrac{\partial w}{\partial x}+kw+\Phi(x,t)$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(x\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)+\Phi(x,t).$

При $\Phi(x,t)\equiv 0$ это уравнение описывает малые свободные колебания тяжелой однородной нити (a^2 — ускорение силы тяжести, w — отклонение нити от вертикальной оси, x — вертикальная координата).

1°. Замена $x = \frac{1}{4}r^2$ приводит к уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\Big) + \Phi\big(\tfrac{1}{4}r^2, t\big),$$

которое рассматривается в разд. 4.2.1–4.2.2.

2°. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ w &= g(t) && \text{при} \quad x = l && \text{(граничное условие)},\\ w &\neq \infty && \text{при} \quad x = 0 && \text{(условие ограниченности)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l f_0(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^l f_1(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi -$$
$$- a^2 l\int_0^t g(\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial \xi}G(x,\xi,t-\tau)\Big]_{\xi=l}d\tau + \int_0^t\int_0^l \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{a\sqrt{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n J_1^2(\mu_n)}J_0\Big(\mu_n\sqrt{\frac{x}{l}}\Big)J_0\Big(\mu_n\sqrt{\frac{\xi}{l}}\Big)\sin\Big(\frac{\mu_n a t}{2\sqrt{l}}\Big).$$

Здесь μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $J_0(\mu) = 0$ (численные значения первых десяти корней μ_n указаны в разд. 1.2.1-3).

⊙ *Литература*: М. М. Смирнов (1975, стр. 30, 82).

3°. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Вторая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_x w &= g(t) && \text{при} \quad x = l && \text{(граничное условие)},\\ w &\neq \infty && \text{при} \quad x = 0 && \text{(условие ограниченности)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l f_0(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^l f_1(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi +$$
$$+ a^2 l\int_0^t g(\tau)G(x,l,t-\tau)\,d\tau + \int_0^t\int_0^l \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{t}{l} + \frac{2}{a\sqrt{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n J_0^2(\mu_n)}J_0\Big(\mu_n\sqrt{\frac{x}{l}}\Big)J_0\Big(\mu_n\sqrt{\frac{\xi}{l}}\Big)\sin\Big(\frac{\mu_n a t}{2\sqrt{l}}\Big).$$

Здесь μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $J_1(\mu) = 0$ (численные значения первых десяти корней μ_n указаны в разд. 1.2.1-4).

4°. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Третья краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_x w + kw &= g(t) && \text{при} \quad x = l && \text{(граничное условие)},\\ w &\neq \infty && \text{при} \quad x = 0 && \text{(условие ограниченности)}. \end{aligned}$$

Решение $w(x,t)$ дается формулой из п. 3°, где

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{a\sqrt{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n}{(4k^2 l + \mu_n^2)J_0^2(\mu_n)}J_0\Big(\mu_n\sqrt{\frac{x}{l}}\Big)J_0\Big(\mu_n\sqrt{\frac{\xi}{l}}\Big)\sin\Big(\frac{\mu_n a t}{2\sqrt{l}}\Big).$$

Здесь μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\mu J_1(\mu) - 2k\sqrt{l}\,J_0(\mu) = 0.$$

Численные значения первых шести корней μ_n приведены в книге Г. Карслоу, Д. Егера (1964, стр. 482).

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) - bw + \Phi(x,t).$

При $b < 0$ и $\Phi(x,t) \equiv 0$ это уравнение описывает малые колебания тяжелой однородной нити, вращающейся с постоянной угловой скоростью $\omega = \sqrt{|b|}$ вокруг оси (a^2 — ускорение силы тяжести).

1°. Замена $x = \frac{1}{4}r^2$ приводит к уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\Big) - bw + \Phi\big(\tfrac{1}{4}r^2, t\big),$$

которое рассматривается в разд. 4.2.5.

2°. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Первая краевая задача.
Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ w &= g(t) && \text{при} \quad x = l && \text{(граничное условие)},\\ w &\neq \infty && \text{при} \quad x = 0 && \text{(условие ограниченности)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l f_0(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^l f_1(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi -$$
$$- a^2 l\int_0^t g(\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial \xi}G(x,\xi,t-\tau)\Big]_{\xi=l}\,d\tau + \int_0^t\int_0^l \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau.$$

Здесь

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{J_1^2(\mu_n)}J_0\Big(\mu_n\sqrt{\frac{x}{l}}\Big)J_0\Big(\mu_n\sqrt{\frac{\xi}{l}}\Big)\frac{\sin\big(t\sqrt{\lambda_n}\big)}{\sqrt{\lambda_n}}, \qquad \lambda_n = \frac{a^2\mu_n^2}{4l} + b,$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $J_0(\mu) = 0$.

⊙ *Литература*: М. М. Смирнов (1975, стр. 30, 82).

3°. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Вторая краевая задача.
Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_x w &= g(t) && \text{при} \quad x = l && \text{(граничное условие)},\\ w &\neq \infty && \text{при} \quad x = 0 && \text{(условие ограниченности)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l f_0(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^l f_1(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi +$$
$$+ a^2 l\int_0^t g(\tau)G(x,l,t-\tau)\,d\tau + \int_0^t\int_0^l \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\xi,t) = \frac{\sin\big(t\sqrt{b}\big)}{l\sqrt{b}} + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{J_0^2(\mu_n)}J_0\Big(\mu_n\sqrt{\frac{x}{l}}\Big)J_0\Big(\mu_n\sqrt{\frac{\xi}{l}}\Big)\frac{\sin\big(t\sqrt{\lambda_n}\big)}{\sqrt{\lambda_n}}, \qquad \lambda_n = \frac{a^2\mu_n^2}{4l} + b,$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $J_1(\mu) = 0$. Численные значения первых десяти корней μ_n приведены в разд. 1.2.1-4.

4°. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Третья краевая задача.
Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_x w + kw &= g(t) && \text{при} \quad x = l && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(x,t)$ дается формулой из п. 3°, где

$$G(r,\xi,t)=\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2}{(4k^2l+\mu_n^2)J_0^2(\mu_n)}J_0\Bigl(\mu_n\sqrt{\frac{x}{l}}\Bigr)J_0\Bigl(\mu_n\sqrt{\frac{\xi}{l}}\Bigr)\frac{\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_n}\bigr)}{\sqrt{\lambda_n}},\qquad \lambda_n=\frac{a^2\mu_n^2}{4l}+b.$$

Здесь μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\mu J_1(\mu)-2k\sqrt{l}\,J_0(\mu)=0.$$

Численные значения первых шести корней μ_n приведены в книгах М. Абрамовица, И. Стиган (1979, стр. 232) и Г. Карслоу, Д. Егера (1964, стр. 482).

3. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial}{\partial x}\Bigl[(l-x)\frac{\partial w}{\partial x}\Bigr].$

Уравнение малых свободных колебаний тяжелой однородной нити длины l (a^2 — ускорение силы тяжести, w — отклонение нити от вертикальной оси, x — вертикальная координата). Замена $z=l-x$ приводит к частному случаю уравнения 4.3.1.1 при $b=0$ и $\Phi\equiv 0$.

4. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\Bigl(\frac{2}{2n+1}x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial x}\Bigr),\qquad n=1,\ 2,\ \dots$

Общее решение:

$$w(x,t)=\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\Biggl[\frac{\Phi(\sqrt{2(2n+1)x}+at)+\Psi(\sqrt{2(2n+1)x}-at)}{\sqrt{x}}\Biggr],$$

где Φ и Ψ — произвольные функции.

⦿ *Литература*: М. М. Смирнов (1975, стр. 10).

5. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=(ax+b)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+a\frac{\partial w}{\partial x}+cw+\Phi(x,t).$

Замена $z=ax+b$ приводит к уравнению вида 4.3.1.2:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial}{\partial z}\Bigl(z\frac{\partial w}{\partial z}\Bigr)+cw+\Phi\Bigl(\frac{z-b}{a},t\Bigr).$$

6. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=(ax+b)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\tfrac{1}{2}a\frac{\partial w}{\partial x}+cw+\Phi(x,t).$

Замена $z=2\sqrt{ax+b}$ приводит к уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+cw+\Phi\Bigl(\frac{z^2-4b}{4a},t\Bigr),$$

которое рассматривается в разд. 4.1.3.

7. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=(a_2x+b_2)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+(a_1x+b_1)\frac{\partial w}{\partial x}+(a_0x+b_0)w.$

Частный случай уравнения 4.5.3.2 при $f(x)=a_2x+b_2$, $g(x)=a_1x+b_1$, $h(x)=a_0x+b_0$, $\Phi\equiv 0$.

Частные решения:

$$w(x,t)=\exp(kx)F\Bigl(\frac{x+q}{p}\Bigr)\bigl[A\sin\bigl(t\sqrt{\mu}\bigr)+B\cos\bigl(t\sqrt{\mu}\bigr)\bigr]\quad\text{при}\quad \mu>0,$$
$$w(x,t)=\exp(kx)F\Bigl(\frac{x+q}{p}\Bigr)\bigl[A\,\mathrm{sh}\bigl(t\sqrt{-\mu}\bigr)+B\,\mathrm{ch}\bigl(t\sqrt{-\mu}\bigr)\bigr]\quad\text{при}\quad \mu<0.$$

Здесь A, B, μ — произвольные постоянные; коэффициенты k, p, q и функция $F=F(\xi)$ указаны в табл. 20, где функция

$$\mathcal{J}(\alpha,\beta;x)=C_1\Phi(\alpha,\beta;x)+C_2\Psi(\alpha,\beta;x),\qquad C_1,\ C_2\ \text{— любые},$$

является произвольным решением вырожденного гипергеометрического уравнения $xy''_{xx}+(\beta-x)y'_x-\alpha y=0$, а функция

$$Z_\nu(x)=C_1J_\nu(x)+C_2Y_\nu(x),\qquad C_1,\ C_2\ \text{— любые},$$

является произвольным решением уравнения Бесселя $x^2y''_{xx}+xy'_x+(x^2-\nu^2)y=0$.

О вырожденных гипергеометрических функциях $\Phi(a,b;x)$ и $\Psi(a,b;x)$ см. книги М. Абрамовица, И. Стиган (1979) и Г. Бейтмена, А. Эрдейи (1973, т. 1). О функциях Бесселя $J_\nu(x)$ и $Y_\nu(x)$ см. книги М. Абрамовица, И. Стиган (1979) и Г. Бейтмена, А. Эрдейи (1974, т. 2).

ТАБЛИЦА 20
Коэффициенты k, p, q и функция $F = F(\xi)$, определяющие вид частных решений уравнения 4.3.1.7. Обозначение: $E(k) = b_2k^2 + b_1k + b_0 + \mu$.

Условия	k	p	q	$F = F(\xi)$	Параметры
$a_2 \neq 0,\ D \neq 0$ $D \equiv a_1^2 - 4a_0a_2$	$\dfrac{\sqrt{D} - a_1}{2a_2}$	$-\dfrac{a_2}{2a_2k + a_1}$	$\dfrac{b_2}{a_2}$	$\mathcal{J}(\alpha, \beta; \xi)$	$\alpha = E(k)/(2a_2k + a_1)$, $\beta = (a_2b_1 - a_1b_2)a_2^{-2}$
$a_2 = 0$, $a_1 \neq 0$	$-\dfrac{a_0}{a_1}$	1	$\dfrac{2b_2k + b_1}{a_1}$	$\mathcal{J}(\alpha, \frac{1}{2}; \sigma\xi^2)$	$\alpha = E(k)/(2a_1)$, $\sigma = -a_1/(2b_2)$
$a_2 \neq 0$, $a_1^2 = 4a_0a_2$	$-\dfrac{a_1}{2a_2}$	a_2	$\dfrac{b_2}{a_2}$	$\xi^\alpha Z_{2\alpha}(\sigma\sqrt{\xi})$	$\alpha = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2b_2k + b_1}{2a_2}$, $\sigma = 2\sqrt{E(k)}$
$a_2 = a_1 = 0$, $a_0 \neq 0$	$-\dfrac{b_1}{2b_2}$	1	$\dfrac{4(b_0 + \mu)b_2 - b_1^2}{4a_0b_2}$	$\xi^{1/2}Z_{1/3}(\sigma\xi^{3/2})$	$\sigma = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{a_0}{b_2}\right)^{1/2}$

4.3.2. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (ax^2 + b)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + cx\dfrac{\partial w}{\partial x} + kw + \Phi(x, t)$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = x^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \Phi(x, t)$.

Частный случай уравнения 4.3.2.2 при $a = 1$, $b = c = 0$.

1°. Область: $1 \leqslant x \leqslant a$. Первая краевая задача.
Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(x) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(x) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(t) &&\text{при}\quad x = 1 &&\text{(граничное условие)},\\ w &= g_2(t) &&\text{при}\quad x = a &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t) = \int_0^t \int_1^a \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau + \frac{\partial}{\partial t}\int_1^a f_0(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_1^a f_1(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi +$$
$$+ \int_0^t g_1(\tau)\left[\frac{\partial}{\partial \xi}G(x,\xi,t-\tau)\right]_{\xi=1} d\tau - a^2\int_0^t g_2(\tau)\left[\frac{\partial}{\partial \xi}G(x,\xi,t-\tau)\right]_{\xi=a} d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{2\sqrt{x}}{\xi^{3/2}\ln a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\sin(\mu_n \ln x)\sin(\mu_n \ln \xi)\sin(\lambda_n t), \quad \mu_n = \frac{\pi n}{\ln a},\ \lambda_n = \sqrt{\mu_n^2 + \tfrac{1}{4}}.$$

2°. Область: $1 \leqslant x \leqslant a$. Вторая краевая задача.
Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(x) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(x) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_x w &= g_1(t) &&\text{при}\quad x = 1 &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_x w &= g_2(t) &&\text{при}\quad x = a &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t) = \int_0^t \int_1^a \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau + \frac{\partial}{\partial t}\int_1^a f_0(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_1^a f_1(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi -$$
$$- \int_0^t g_1(\tau)G(x,1,t-\tau)\,d\tau + a^2\int_0^t g_2(\tau)G(x,a,t-\tau)\,d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{at}{(a-1)\xi^2} + \frac{8\sqrt{x}}{\xi^{3/2}\ln a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2}{\lambda_n(1+\mu_n^2)}\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)\sin(\lambda_n t),$$

$$\varphi_n(x) = \cos(\mu_n \ln x) - \frac{1}{2\mu_n}\sin(\mu_n \ln x),\quad \mu_n = \frac{\pi n}{\ln a},\quad \lambda_n = \sqrt{\mu_n^2 + \tfrac{1}{4}}.$$

⊙ *Литература*: А. Г. Бутковский (1979, стр. 101–103).

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ax^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx\dfrac{\partial w}{\partial x} + cw + \Phi(x,t).$

Замена $x = ke^z$ $(k \neq 0)$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами, $\partial_{tt}w = a\partial_{zz}w + (b-a)\partial_z w + cw + \Phi(ke^z, t)$, которое рассматривается в разд. 4.1.5.

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (ax^2 + b)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ax\dfrac{\partial w}{\partial x} + cw.$

Замена $z = \displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+b}}$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_{tt}w = \partial_{zz}w + cw$, которое рассматривается в разд. 4.1.3.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[(l^2 - x^2)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big] + \Phi(x,t).$

Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} &w = f_0(x) && \text{при}\quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ &\partial_t w = f_1(x) && \text{при}\quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ &w = g(t) && \text{при}\quad x = 0 && \text{(граничное условие)},\\ &w \neq \infty && \text{при}\quad x = l && \text{(условие ограниченности)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l f_0(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^l f_1(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi +$$
$$+ a^2l^2\int_0^t g(\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,t-\tau)\Big]_{\xi=0}d\tau + \int_0^t\int_0^l \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau.$$

Здесь

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{al}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-1}{\lambda_n}P_{2n-1}\Big(\frac{x}{l}\Big)P_{2n-1}\Big(\frac{\xi}{l}\Big)\sin(\lambda_n at),\qquad \lambda_n = \sqrt{2n(2n-1)},$$

где $P_k(x) = \dfrac{1}{2^k k!}\dfrac{d^k}{dx^k}\big[(x^2-1)^k\big]$ — полиномы Лежандра.

⊙ *Литература*: М. М. Смирнов (1975, стр. 85).

4.3.3. Другие уравнения

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\Big[\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r} - \dfrac{n(n+1)}{r^2}w\Big],\qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

Общее решение:

$$w(t,r) = r^n\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big)^n\Big[\frac{\Phi(r+at) + \Psi(r-at)}{r}\Big],$$

где $\Phi(r_1)$ и $\Psi(r_2)$ — произвольные функции.

⊙ *Литература*: М. М. Смирнов (1975, стр. 10).

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{2a}{x}\dfrac{\partial w}{\partial x} + b^2 w, \qquad 0 < 2a < 1.$

Общее решение:

$$w(x,t) = \int_0^1 \frac{\Phi(t + x(2\xi - 1))}{[\xi(1-\xi)]^{1-a}} \bar{J}_{a-1}\Big(2bx\sqrt{\xi(1-\xi)}\,\Big)\, d\xi + {} \\ + x^{1-2a} \int_0^1 \frac{\Psi(t + x(2\xi - 1))}{[\xi(1-\xi)]^{a}} \bar{J}_{-a}\Big(2bx\sqrt{\xi(1-\xi)}\,\Big)\, d\xi,$$

где $\Phi(\xi_1)$ и $\Psi(\xi_2)$ — произвольные функции; $\bar{J}_{-\nu}(z) = \Gamma(1-\nu)2^{-\nu}z^{\nu}J_{-\nu}(z)$; $J_{-\nu}(z)$ — функция Бесселя.

⊙ *Литература*: М. М. Смирнов (1975, стр. 11–12).

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ax^4 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \Phi(x,t).$

Преобразование $z = 1/x$, $u = w/x$ приводит к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + z\Phi\Big(\frac{1}{z}, t\Big),$$

которое рассматривается в разд. 4.1.2.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (ax + b)^4 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

Преобразование

$$u = \frac{w}{ax+b}, \quad z = at + \frac{1}{ax+b}, \quad y = -at + \frac{1}{ax+b}$$

приводит к уравнению $\partial_{zy} u = 0$. Поэтому общее решение исходного уравнения имеет вид

$$w = (ax+b)\big[f(z) + g(y)\big],$$

где $f = f(z)$ и $g = g(y)$ — произвольные функции.

⊙ *Литература*: N. H. Ibragimov (1994, стр. 201).

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (a^2 - x^2)^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \Phi(x,t).$

Область: $-l \leqslant x \leqslant l$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= g(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ w &= 0 && \text{при} \quad x = l && \text{(граничное условие)},\\ w &= 0 && \text{при} \quad x = -l && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение при $0 < l < a$:

$$w(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_{-l}^{l} f(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_{-l}^{l} g(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^t\int_{-l}^{l} \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{2a}{k(\xi^2 - a^2)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)\sin(\lambda_n t),$$

$$\varphi_n(x) = \sqrt{a^2 - x^2}\,\sin\Big(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi n}{2k}\ln\frac{a+x}{a-x}\Big), \quad \lambda_n = \frac{a}{k}\sqrt{\pi^2 n^2 + k^2}, \quad k = \ln\frac{a+l}{a-l}.$$

⊙ *Литература*: А. Г. Бутковский (1979, стр. 107–108).

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (x - a_1)^2(x - a_2)^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad a_1 \neq a_2.$

Преобразование

$$w(x,t) = (x - a_2)u(\xi,\tau), \quad \xi = \ln\left|\frac{x - a_1}{x - a_2}\right|, \quad \tau = |a_1 - a_2|t$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial u}{\partial \xi},$$

которое рассматривается в разд. 4.1.4.

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (ax^2 + bx + c)^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

Преобразование

$$w(x,t) = u(z,t)\sqrt{ax^2+bx+c}, \qquad z = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (ac - \tfrac{1}{4}b^2)u,$$

которое рассматривается в разд. 4.1.3.

8. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + \Phi(x,t).$

1°. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

1.1. Случай $0 < m < 1$:

$$\begin{aligned} w &= f_0(x) &&\text{при} \quad t=0 \quad (\text{начальное условие}),\\ \partial_t w &= f_1(x) &&\text{при} \quad t=0 \quad (\text{начальное условие}),\\ w &= 0 &&\text{при} \quad x=0 \quad (\text{граничное условие}),\\ w &= g(t) &&\text{при} \quad x=l \quad (\text{граничное условие}). \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l f_0(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^l f_1(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi \\ - a^2 l^m \int_0^t g(\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial \xi}G(x,\xi,t-\tau)\Big]_{\xi=l}\,d\tau + \int_0^t\!\!\int_0^l \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь

$$G(x,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n(x)y_n(\xi)\sin(\lambda_n a t)}{a\|y_n\|^2\lambda_n}, \qquad \lambda_n = \frac{\mu_n}{2}(2-m)l^{\frac{m-2}{2}}, \tag{2}$$

где

$$y_n(x) = x^{\frac{1-m}{2}} J_p\bigg(\mu_n\Big(\frac{x}{l}\Big)^{\frac{2-m}{2}}\bigg), \qquad \|y_n\|^2 = \int_0^l y_n^2(x)\,dx, \qquad p = \left|\frac{1-m}{2-m}\right|;$$

μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $J_p(\mu) = 0$.

1.2. Случай $1 \leqslant m < 2$:

$$\begin{aligned} w &= f_0(x) &&\text{при} \quad t=0 \quad (\text{начальное условие}),\\ \partial_t w &= f_1(x) &&\text{при} \quad t=0 \quad (\text{начальное условие}),\\ w &\neq \infty &&\text{при} \quad x=0 \quad (\text{условие ограниченности}),\\ w &= g(t) &&\text{при} \quad x=l \quad (\text{граничное условие}). \end{aligned}$$

Решение дается формулами, приведенными выше в п. 1.1.

⊙ *Литература*: М. М. Смирнов (1975, стр. 31, 84).

2°. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Смешанная краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(x) &&\text{при} \quad t=0 \quad (\text{начальное условие}),\\ \partial_t w &= f_1(x) &&\text{при} \quad t=0 \quad (\text{начальное условие}),\\ (x^m\partial_x w) &= 0 &&\text{при} \quad x=0 \quad (\text{граничное условие}),\\ w &= g(t) &&\text{при} \quad x=l \quad (\text{граничное условие}). \end{aligned}$$

Решение при $0 < m < 1$ описывается формулами (1) и (2), где

$$y_n(x) = x^{\frac{1-m}{2}} J_{-p}\bigg(\mu_n\Big(\frac{x}{l}\Big)^{\frac{2-m}{2}}\bigg), \qquad \|y_n\|^2 = \int_0^l y_n^2(x)\,dx, \qquad p = \frac{1-m}{2-m};$$

μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $J_{-p}(\mu) = 0$.

3°. При $\Phi \equiv 0$ замена $z = x^{1-m}$ приводит к уравнению вида 4.3.3.9:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2(1-m)^2 z^{\frac{m}{m-1}} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$$

9. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 x^m \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

1°. Частные решения (A_1, A_2, B_1, B_2, μ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = \sqrt{x}\left[A_1 J_{\frac{1}{2q}}(\mu x^q) + A_2 Y_{\frac{1}{2q}}(\mu x^q)\right]\left[B_1 \sin(aq\mu t) + B_2 \cos(aq\mu t)\right],$$

$$w(x,t) = \sqrt{x}\left[A_1 I_{\frac{1}{2q}}(\mu x^q) + A_2 K_{\frac{1}{2q}}(\mu x^q)\right]\left[B_1 \operatorname{sh}(aq\mu t) + B_2 \operatorname{ch}(aq\mu t)\right],$$

где $q = \frac{1}{2}(2-m)$; $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ — функции Бесселя; $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ — модифицированные функции Бесселя.

2°. Укажем дискретные преобразования, сохраняющие вид исходного уравнения (при которых меняется параметр n).

2.1. Точечное преобразование

$$z = \frac{1}{x}, \quad u = \frac{w}{x} \qquad \text{(преобразование } \mathcal{P}\text{)}$$

приводит к уравнению аналогичного вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 z^{4-m} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Преобразование $\mathcal{P}$ меняет параметры уравнения по правилу $m \overset{\mathcal{P}}{\Longrightarrow} 4-m$. Повторное действие преобразования $\mathcal{P}$ приводит к исходному уравнению.

2.2. Пусть $w = w(x,t)$ — решение исходного уравнения. Тогда функция $v = v(\xi,\tau)$, которая связана с решением $w = w(x,t)$ преобразованием Беклунда

$$v(\xi,\tau) = \frac{\partial}{\partial x} w(x,t), \quad x = \xi^{\frac{1}{1-m}}, \quad \tau = |1-m|t \qquad \text{(преобразование } \mathcal{B}\text{)},$$

является решением уравнения аналогичного вида:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} = a^2 \xi^{\frac{m}{m-1}} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}.$$

Преобразование $\mathcal{B}$ меняет параметры уравнения по правилу $m \overset{\mathcal{B}}{\Longrightarrow} \dfrac{m}{m-1}$. Повторное действие преобразования $\mathcal{B}$ приводит к исходному уравнению.

2.3. Комбинация преобразований $\mathcal{F} = \mathcal{B} \circ \mathcal{P}$ меняет параметры уравнения так:

$$m \overset{\mathcal{F}}{\Longrightarrow} \frac{4-m}{3-m} \overset{\mathcal{F}}{\Longrightarrow} \frac{8-3m}{5-2m} \overset{\mathcal{F}}{\Longrightarrow} \frac{12-5m}{7-3m} \overset{\mathcal{F}}{\Longrightarrow} \frac{16-7m}{9-4m} \overset{\mathcal{F}}{\Longrightarrow} \cdots$$

В случае n-кратного применения преобразования $\mathcal{F}$ получим уравнение с параметром

$$m \overset{\mathcal{F}^n}{\Longrightarrow} \frac{4n-(2n-1)m}{2n+1-nm}. \tag{1}$$

2.4. Комбинация преобразований $\mathcal{G} = \mathcal{P} \circ \mathcal{B}$ меняет параметры уравнения так:

$$m \overset{\mathcal{G}}{\Longrightarrow} \frac{4-3m}{1-m} \overset{\mathcal{G}}{\Longrightarrow} \frac{8-5m}{3-2m} \overset{\mathcal{G}}{\Longrightarrow} \frac{12-7m}{5-3m} \overset{\mathcal{G}}{\Longrightarrow} \frac{16-9m}{7-4m} \overset{\mathcal{G}}{\Longrightarrow} \cdots$$

В случае n-кратного применения преобразования $\mathcal{G}$ получим уравнение с параметром

$$m \overset{\mathcal{G}^n}{\Longrightarrow} \frac{4n-(2n+1)m}{2n-1-nm}. \tag{2}$$

2.5. Полагая в (1) и (2) $m = 0$, получим два семейства уравнений

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 x^{\frac{4n}{2n+1}} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{при} \quad n = 1,\ 2,\ \ldots;$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 x^{\frac{4n}{2n-1}} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{при} \quad n = 1,\ 2,\ \ldots;$$

решения которых можно получать с помощью решений волнового уравнения (об этом уравнении с постоянными коэффициентами см. разд. 4.1.1).

3°. Укажем теперь полезные преобразования, приводящие к другим уравнениям.

3.1. Замена $\xi = x^{1-m}$ приводит к уравнению вида 4.3.3.8:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2(1-m)^2 \frac{\partial}{\partial \xi}\Big(\xi^{\frac{m}{m-1}} \frac{\partial w}{\partial \xi}\Big).$$

3.2. Преобразование $\tau = \frac{1}{2}a|2-m|t$, $\xi = x^{\frac{2-m}{2}}$ приводит к уравнению вида 4.3.3.2:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{m}{m-2}\frac{1}{\xi}\frac{\partial w}{\partial \xi}.$$

10. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = t^m \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

1°. Область: $-\infty < x < \infty$. Задача Коши.
Заданы начальные условия:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0,$$
$$\partial_t w = g(x) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Решение при $m > 0$:

$$w(x,t) = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)} \int_0^1 f\Big(x + \frac{2}{m+2} t^{\frac{m+2}{2}}(2\xi - 1)\Big)[\xi(1-\xi)]^{\beta-1} d\xi +$$
$$+ \frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)} t \int_0^1 g\Big(x + \frac{2}{m+2} t^{\frac{m+2}{2}}(2\xi - 1)\Big)[\xi(1-\xi)]^{-\beta} d\xi,$$

где

$$\beta = \frac{m}{2(m+2)}, \qquad \Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-s} s^{z-1} ds.$$

⊙ *Литература*: М. М. Смирнов (1975, стр. 14, 58).

2°. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Первая краевая задача.
Заданы следующие условия:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},$$
$$\partial_t w = g(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},$$
$$w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)},$$
$$w = 0 \quad \text{при} \quad x = l \quad \text{(граничное условие)}.$$

Решение при $m > -1$:

$$w(x,t) = \sqrt{t} \sum_{n=1}^{\infty} \Big[A_n J_{-p}\Big(2p\lambda_n t^{\frac{1}{2p}}\Big) + B_n J_p\Big(2p\lambda_n t^{\frac{1}{2p}}\Big)\Big] \sin(\lambda_n x),$$
$$A_n = \Gamma(1-p)(\lambda_n p)^p \frac{2}{l} \int_0^l f(x)\sin(\lambda_n x)\,dx, \quad p = \frac{1}{m+2},$$
$$B_n = \Gamma(1+p)(\lambda_n p)^{-p} \frac{2}{l} \int_0^l g(x)\sin(\lambda_n x)\,dx, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{l},$$

где $\Gamma(p)$ — гамма-функция.

⊙ *Литература*: М. М. Смирнов (1975, стр. 30, 81–82).

11. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = t^m \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bt^{\frac{m-2}{2}} \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad m \geqslant 2.$

Область: $-\infty < x < \infty$. Задача Коши.
Заданы начальные условия:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0,$$
$$\partial_t w = g(x) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

1°. Решение при $|b| < \frac{1}{2}m$:

$$w(x,t) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 f\Big(x + \frac{2}{m+2} t^{\frac{m+2}{2}}(2\xi - 1)\Big)\xi^{\beta-1}(1-\xi)^{\alpha-1} d\xi +$$
$$+ \frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} t \int_0^1 g\Big(x + \frac{2}{m+2} t^{\frac{m+2}{2}}(2\xi - 1)\Big)\xi^{-\alpha}(1-\xi)^{-\beta} d\xi,$$

где
$$\alpha = \frac{m-2b}{2(m+2)}, \quad \beta = \frac{m+2b}{2(m+2)}, \quad \Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-s} s^{z-1}\,ds.$$

2°. Решение при $b = \frac{1}{2}m$:
$$w(x,t) = f\Big(x + \frac{2}{m+2}t^{\frac{m+2}{2}}\Big) + \frac{2t}{m+2}\int_0^1 g\Big(x + \frac{2}{m+2}t^{\frac{m+2}{2}}(2\xi-1)\Big)(1-\xi)^{-\frac{m}{m+2}}\,d\xi.$$

3°. Решение при $b = -\frac{1}{2}m$:
$$w(x,t) = f\Big(x - \frac{2}{m+2}t^{\frac{m+2}{2}}\Big) + \frac{2t}{m+2}\int_0^1 g\Big(x + \frac{2}{m+2}t^{\frac{m+2}{2}}(2\xi-1)\Big)(1-\xi)^{-\frac{m}{m+2}}\,d\xi.$$

⊙ *Литература*: М. М. Смирнов (1975, стр. 14, 58–59).

12. $(b+x)^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[(b+x)^2 \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big].$

Общее решение:
$$w(x,t) = \frac{f(x+at) + g(x-at)}{b+x},$$
где $f(y)$ и $g(z)$ — произвольные функции.

4.4. Уравнения, содержащие первую производную по t

4.4.1. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial w}{\partial x} + cw + \Phi(x,t)$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \Phi(x,t).$

При $\Phi(x,t) \equiv 0$ это уравнение описывает свободные колебания струны и продольные колебания стержня, происходящие в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости.

1°. Замена $w(x,t) = \exp\big(-\frac{1}{2}kt\big)u(x,t)$ приводит к уравнению
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tfrac{1}{4}k^2 u + \exp\big(\tfrac{1}{2}kt\big)\Phi(x,t),$$
которое рассматривается в разд. 4.1.3.

2°. Фундаментальное решение:
$$\mathscr{E}(x,t) = \frac{1}{2a}\vartheta\big(at - |x|\big)\exp\big(-\tfrac{1}{2}kt\big) I_0\big(\tfrac{1}{2}k\sqrt{t^2 - x^2/a^2}\,\big),$$
где $\vartheta(z)$ — единичная функция Хевисайда, $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя.

⊙ *Литература*: В. С. Владимиров, В. П. Михайлов, А. А. Вашарин (1974, стр. 123).

3°. Область: $-\infty < x < \infty$. Задача Коши.
Заданы начальные условия:
$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0,$$
$$\partial_t w = g(x) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Решение:
$$\begin{aligned} w(x,t) = {} & \tfrac{1}{2}\exp\big(-\tfrac{1}{2}kt\big)\big[f(x+at) + f(x-at)\big] + \\ & + \frac{kt}{4a}\exp\big(-\tfrac{1}{2}kt\big)\int_{x-at}^{x+at} \frac{I_1\big(\frac{1}{2}k\sqrt{t^2 - (x-\xi)^2/a^2}\,\big)}{\sqrt{t^2 - (x-\xi)^2/a^2}} f(\xi)\,d\xi + \\ & + \frac{1}{2a}\exp\big(-\tfrac{1}{2}kt\big)\int_{x-at}^{x+at} I_0\big(\tfrac{1}{2}k\sqrt{t^2 - (x-\xi)^2/a^2}\,\big)\big[g(\xi) + \tfrac{1}{2}kf(\xi)\big]\,d\xi + \\ & + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \exp\big[-\tfrac{1}{2}k(t-\tau)\big] I_0\big(\tfrac{1}{2}k\sqrt{(t-\tau)^2 - (x-\xi)^2/a^2}\,\big)\Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \end{aligned}$$
где $I_0(z)$ и $I_1(z)$ — модифицированные функции Бесселя первого рода.

4°. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Первая краевая задача.
Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(x) \quad \text{при} \quad t=0 \quad \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(x) \quad \text{при} \quad t=0 \quad \text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(t) \quad \text{при} \quad x=0 \quad \text{(граничное условие)},\\ w &= g_2(t) \quad \text{при} \quad x=l \quad \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \int_0^t \int_0^l \Phi(\xi,\tau) G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau +\\ &+ \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l f_0(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^l \bigl[f_1(\xi)+kf_0(\xi)\bigr]G(x,\xi,t)\,d\xi +\\ &+ a^2\int_0^t g_1(\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,t-\tau)\Bigr]_{\xi=0}d\tau - a^2\int_0^t g_2(\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,t-\tau)\Bigr]_{\xi=l}d\tau, \end{aligned}$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l}\exp\Bigl(-\frac{kt}{2}\Bigr)\sum_{n=1}^{\infty}\sin\Bigl(\frac{\pi n x}{l}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{\pi n \xi}{l}\Bigr)\frac{\sin(\lambda_n t)}{\lambda_n}, \qquad \lambda_n = \sqrt{\frac{a^2\pi^2n^2}{l^2} - \frac{k^2}{4}}.$$

Пример. Рассмотрим однородное уравнение, $\Phi(x,t)=0$. Начальное форма струны — треугольник с основанием $0 \leqslant x \leqslant l$ и высотой h при $x=c$, т. е.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{hx}{c} & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant c,\\ \dfrac{h(l-x)}{l-c} & \text{при } c \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Начальные скорости точек струны равны нулю, $g(x)=0$.

Решение:

$$w(x,t) = \frac{2hl^2}{\pi^2 c(l-c)}\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}kt\bigr)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\Bigl(\frac{n\pi c}{l}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{n\pi x}{l}\Bigr)\Theta_n(t),$$

где

$$\Theta_n(t) = \begin{cases} \cos(\lambda_n t) + \dfrac{k}{2\lambda_n}\sin(\lambda_n t) & \text{для } k < \dfrac{2\pi n a}{l},\\ 1 + \dfrac{kt}{2} & \text{для } k = \dfrac{2\pi n a}{l},\\ \operatorname{ch}(\lambda_n t) + \dfrac{k}{2\lambda_n}\operatorname{sh}(\lambda_n t) & \text{для } k > \dfrac{2\pi n a}{l}, \end{cases} \qquad \lambda_n = \sqrt{\left|\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2} - \frac{k^2}{4}\right|}.$$

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972, стр. 230), М. М. Смирнов (1975, стр. 77).

5°. О второй и третьей краевых задачах в области $0 \leqslant x \leqslant l$ см. уравнение 4.4.1.2 (пп. 5°–6° при $b=0$).

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw + \Phi(x,t).$

Телеграфное уравнение [при $k>0$, $b<0$ и $\Phi(x,t)\equiv 0$].

1°. Замена $w(x,t) = \exp\bigl(-\frac{1}{2}kt\bigr)u(x,t)$ приводит к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \bigl(b+\tfrac{1}{4}k^2\bigr)u + \exp\bigl(\tfrac{1}{2}kt\bigr)\Phi(x,t),$$

которое рассматривается в разд. 4.1.3.

2°. Фундаментальные решения:

$$\begin{aligned} \mathscr{E}(x,t) &= \frac{1}{2a}\vartheta\bigl(at-|x|\bigr)\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}kt\bigr)I_0\bigl(c\sqrt{t^2-x^2/a^2}\bigr) \quad \text{при} \quad b+\frac{1}{4}k^2 = c^2 > 0,\\ \mathscr{E}(x,t) &= \frac{1}{2a}\vartheta\bigl(at-|x|\bigr)\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}kt\bigr)J_0\bigl(c\sqrt{t^2-x^2/a^2}\bigr) \quad \text{при} \quad b+\frac{1}{4}k^2 = -c^2 < 0, \end{aligned}$$

где $\vartheta(z)$ — единичная функция Хевисайда, $J_0(z)$ и $J_1(z)$ — функции Бесселя, $I_0(z)$ и $I_1(z)$ — модифицированные функции Бесселя.

3°. Область: $-\infty < x < \infty$. Задача Коши.
Заданы начальные условия:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0,$$
$$\partial_t w = g(x) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Решение при $b + \frac{1}{4}k^2 = c^2 > 0$:

$$\begin{aligned}
w(x,t) = \tfrac{1}{2}\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}kt\bigr)\bigl[f(x+at) + f(x-at)\bigr] &+ \\
+ \frac{ct}{2a}\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}kt\bigr)\int_{x-at}^{x+at} \frac{I_1\bigl(c\sqrt{t^2-(x-\xi)^2/a^2}\,\bigr)}{\sqrt{t^2-(x-\xi)^2/a^2}} f(\xi)\,d\xi &+ \\
+ \frac{1}{2a}\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}kt\bigr)\int_{x-at}^{x+at} I_0\bigl(c\sqrt{t^2-(x-\xi)^2/a^2}\,\bigr)\bigl[g(\xi) + \tfrac{1}{2}kf(\xi)\bigr]\,d\xi &+ \\
+ \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \exp\bigl[-\tfrac{1}{2}k(t-\tau)\bigr] I_0\bigl(c\sqrt{(t-\tau)^2-(x-\xi)^2/a^2}\,\bigr)\Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau.
\end{aligned}$$

Решение при $b + \frac{1}{4}k^2 = -c^2 < 0$:

$$\begin{aligned}
w(x,t) = \tfrac{1}{2}\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}kt\bigr)\bigl[f(x+at) + f(x-at)\bigr] &- \\
- \frac{ct}{2a}\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}kt\bigr)\int_{x-at}^{x+at} \frac{J_1\bigl(c\sqrt{t^2-(x-\xi)^2/a^2}\,\bigr)}{\sqrt{t^2-(x-\xi)^2/a^2}} f(\xi)\,d\xi &+ \\
+ \frac{1}{2a}\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}kt\bigr)\int_{x-at}^{x+at} J_0\bigl(c\sqrt{t^2-(x-\xi)^2/a^2}\,\bigr)\bigl[g(\xi) + \tfrac{1}{2}kf(\xi)\bigr]\,d\xi &+ \\
+ \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \exp\bigl[-\tfrac{1}{2}k(t-\tau)\bigr] J_0\bigl(c\sqrt{(t-\tau)^2-(x-\xi)^2/a^2}\,\bigr)\Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau.
\end{aligned}$$

4°. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Первая краевая задача.
Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(t) && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(t) && \text{при} \quad x = l && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(x,t) = \int_0^t \int_0^l \Phi(\xi,\tau) G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau &+ \\
+ \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l f_0(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^l \bigl[f_1(\xi) + kf_0(\xi)\bigr]G(x,\xi,t)\,d\xi &+ \\
+ a^2\int_0^t g_1(\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,t-\tau)\Bigr]_{\xi=0} d\tau - a^2\int_0^t g_2(\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,t-\tau)\Bigr]_{\xi=l} d\tau.
\end{aligned}$$

Пусть $a^2\pi^2 - bl^2 - \frac{1}{4}k^2l^2 > 0$. Тогда

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l}\exp\Bigl(-\frac{kt}{2}\Bigr)\sum_{n=1}^{\infty} \sin\Bigl(\frac{\pi nx}{l}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{\pi n\xi}{l}\Bigr)\frac{\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_n}\,\bigr)}{\sqrt{\lambda_n}}, \qquad \lambda_n = \frac{a^2\pi^2n^2}{l^2} - b - \frac{k^2}{4}.$$

Пусть $a^2\pi^2n^2 - bl^2 - \frac{1}{4}k^2l^2 \leqslant 0$ при $n = 1, \dots, m$ и $a^2\pi^2n^2 - bl^2 - \frac{1}{4}k^2l^2 > 0$ при $n = m+1, m+2, \dots$ Тогда

$$\begin{aligned}
G(x,\xi,t) = \frac{2}{l}\exp\Bigl(-\frac{kt}{2}\Bigr)\sum_{n=1}^{m} \sin\Bigl(\frac{\pi nx}{l}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{\pi n\xi}{l}\Bigr)\frac{\operatorname{sh}\bigl(t\sqrt{\beta_n}\,\bigr)}{\sqrt{\beta_n}} &+ \\
+ \frac{2}{l}\exp\Bigl(-\frac{kt}{2}\Bigr)\sum_{n=m+1}^{\infty} \sin\Bigl(\frac{\pi nx}{l}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{\pi n\xi}{l}\Bigr)\frac{\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_n}\,\bigr)}{\sqrt{\lambda_n}}&,
\end{aligned}$$
$$\beta_n = b + \frac{k^2}{4} - \frac{a^2\pi^2n^2}{l^2}, \qquad \lambda_n = \frac{a^2\pi^2n^2}{l^2} - b - \frac{k^2}{4}.$$

5°. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Вторая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(x) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(x) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_x w &= g_1(t) && \text{при} \quad x=0 && \text{(граничное условие)},\\ \partial_x w &= g_2(t) && \text{при} \quad x=l && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(x,t) = &\int_0^t\int_0^l \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau+\\ &+\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l f_0(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi+\int_0^l\bigl[f_1(\xi)+kf_0(\xi)\bigr]G(x,\xi,t)\,d\xi-\\ &-a^2\int_0^t g_1(\tau)G(x,0,t-\tau)\,d\tau+a^2\int_0^t g_2(\tau)G(x,l,t-\tau)\,d\tau. \end{aligned}$$

При $p=b+\frac14k^2<0$:

$$G(x,\xi,t)=\exp\bigl(-\tfrac12kt\bigr)\left[\frac{\sin\bigl(t\sqrt{|p|}\,\bigr)}{l\sqrt{|p|}}+\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(\mu_n x)\cos(\mu_n\xi)\frac{\sin\bigl(t\sqrt{a^2\mu_n^2-p}\,\bigr)}{\sqrt{a^2\mu_n^2-p}}\right],\quad \mu_n=\frac{\pi n}{l}.$$

При $p=b+\frac14k^2>0$:

$$G(x,\xi,t)=\exp\bigl(-\tfrac12kt\bigr)\left[\frac{\operatorname{sh}\bigl(t\sqrt{p}\,\bigr)}{l\sqrt{p}}+\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(\mu_n x)\cos(\mu_n\xi)\frac{\sin\bigl(t\sqrt{a^2\mu_n^2-p}\,\bigr)}{\sqrt{a^2\mu_n^2-p}}\right],\quad \mu_n=\frac{\pi n}{l}.$$

Если для нескольких первых значений $n=1,\dots,m$ выполняется неравенство $a^2\mu_n^2-p<0$, то в соответствующих членах ряда выражения $\sqrt{a^2\mu_n^2-p}$ следует заменить на $\sqrt{|a^2\mu_n^2-p|}$, а синусы — на гиперболические синусы.

6°. Область: $0\leqslant x\leqslant l$. Третья краевая задача.
Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(x) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(x) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_x w - s_1 w &= g_1(t) && \text{при} \quad x=0 && \text{(граничное условие)},\\ \partial_x w + s_2 w &= g_2(t) && \text{при} \quad x=l && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(x,t)$ определяется по формуле из п. 5°, где

$$G(x,\xi,t)=\exp\bigl(-\tfrac12kt\bigr)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n(x)y_n(\xi)\sin\bigl(t\sqrt{a^2\mu_n^2-p}\,\bigr)}{B_n\sqrt{a^2\mu_n^2-p}},\qquad p=b+\tfrac14k^2,$$

$$y_n(x)=\cos(\mu_n x)+\frac{s_1}{\mu_n}\sin(\mu_n x),\quad B_n=\frac{s_2}{2\mu_n^2}\frac{\mu_n^2+s_1^2}{\mu_n^2+s_2^2}+\frac{s_1}{2\mu_n^2}+\frac{l}{2}\Bigl(1+\frac{s_1^2}{\mu_n^2}\Bigr).$$

Здесь μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\dfrac{\operatorname{tg}(\mu l)}{\mu}=\dfrac{s_1+s_2}{\mu^2-s_1s_2}$.

Если для нескольких первых значений $n=1,\dots,m$ выполняется неравенство $a^2\mu_n^2-p<0$, то в соответствующих членах ряда выражения $\sqrt{a^2\mu_n^2-p}$ следует заменить на $\sqrt{|a^2\mu_n^2-p|}$, а синусы — на гиперболические синусы.

3. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+k\frac{\partial w}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+b\frac{\partial w}{\partial x}+cw+\Phi(x,t).$

1°. Замена $w(x,t)=\exp\bigl(-\frac12a^{-2}bx-\frac12kt\bigr)u(x,t)$ приводит к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\bigl(c+\tfrac14k^2-\tfrac14a^{-2}b^2\bigr)u+\exp\bigl(\tfrac12a^{-2}bx+\tfrac12kt\bigr)\Phi(x,t),$$

которое рассматривается в разд. 4.1.3.

$2°$. Фундаментальные решения:

$$\mathscr{E}(x,t) = \frac{1}{2a}\vartheta\bigl(at-|x|\bigr)\exp\Bigl(-\frac{bx}{2a^2}-\frac{kt}{2}\Bigr)I_0\Bigl(\sigma\sqrt{t^2-\frac{x^2}{a^2}}\Bigr) \quad \text{при} \quad c+\frac{k^2}{4}-\frac{b^2}{4a^2}=\sigma^2>0,$$

$$\mathscr{E}(x,t) = \frac{1}{2a}\vartheta\bigl(at-|x|\bigr)\exp\Bigl(-\frac{bx}{2a^2}-\frac{kt}{2}\Bigr)J_0\Bigl(\sigma\sqrt{t^2-\frac{x^2}{a^2}}\Bigr) \quad \text{при} \quad c+\frac{k^2}{4}-\frac{b^2}{4a^2}=-\sigma^2<0,$$

где $\vartheta(z)$ — единичная функция Хевисайда, $J_0(z)$ и $J_1(z)$ — функции Бесселя, $I_0(z)$ и $I_1(z)$ — модифицированные функции Бесселя.

$3°$. Область: $-\infty < x < \infty$. Задача Коши.
Заданы начальные условия:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t=0,$$
$$\partial_t w = g(x) \quad \text{при} \quad t=0.$$

Решение при $c+\frac{1}{4}k^2-\frac{1}{4}a^{-2}b^2=\sigma^2>0$:

$$\begin{aligned} w(x,t) = {} & \frac{1}{2}\exp\Bigl(-\frac{kt}{2}\Bigr)\Bigl[f(x+at)\exp\Bigl(\frac{bt}{2a}\Bigr)+f(x-at)\exp\Bigl(-\frac{bt}{2a}\Bigr)\Bigr]+ \\ & +\frac{\sigma t}{2a}\exp\Bigl(-\frac{bx}{2a^2}-\frac{kt}{2}\Bigr)\int_{x-at}^{x+at}\exp\Bigl(\frac{b\xi}{2a^2}\Bigr)\frac{I_1\bigl(\sigma\sqrt{t^2-(x-\xi)^2/a^2}\bigr)}{\sqrt{t^2-(x-\xi)^2/a^2}}f(\xi)\,d\xi+ \\ & +\frac{1}{2a}\exp\Bigl(-\frac{bx}{2a^2}-\frac{kt}{2}\Bigr)\int_{x-at}^{x+at}\exp\Bigl(\frac{b\xi}{2a^2}\Bigr)I_0\bigl(\sigma\sqrt{t^2-(x-\xi)^2/a^2}\bigr)\bigl[g(\xi)+\tfrac{1}{2}kf(\xi)\bigr]\,d\xi+ \\ & +\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\exp\Bigl[\frac{b(\xi-x)}{2a^2}-\frac{k(t-\tau)}{2}\Bigr]I_0\bigl(\sigma\sqrt{(t-\tau)^2-(x-\xi)^2/a^2}\bigr)\Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau. \end{aligned}$$

Решение при $c+\frac{1}{4}k^2-\frac{1}{4}a^{-2}b^2=-\sigma^2<0$:

$$\begin{aligned} w(x,t) = {} & \frac{1}{2}\exp\Bigl(-\frac{kt}{2}\Bigr)\Bigl[f(x+at)\exp\Bigl(\frac{bt}{2a}\Bigr)+f(x-at)\exp\Bigl(-\frac{bt}{2a}\Bigr)\Bigr]- \\ & -\frac{\sigma t}{2a}\exp\Bigl(-\frac{bx}{2a^2}-\frac{kt}{2}\Bigr)\int_{x-at}^{x+at}\exp\Bigl(\frac{b\xi}{2a^2}\Bigr)\frac{J_1\bigl(\sigma\sqrt{t^2-(x-\xi)^2/a^2}\bigr)}{\sqrt{t^2-(x-\xi)^2/a^2}}f(\xi)\,d\xi+ \\ & +\frac{1}{2a}\exp\Bigl(-\frac{bx}{2a^2}-\frac{kt}{2}\Bigr)\int_{x-at}^{x+at}\exp\Bigl(\frac{b\xi}{2a^2}\Bigr)J_0\bigl(\sigma\sqrt{t^2-(x-\xi)^2/a^2}\bigr)\bigl[g(\xi)+\tfrac{1}{2}kf(\xi)\bigr]\,d\xi+ \\ & +\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\exp\Bigl[\frac{b(\xi-x)}{2a^2}-\frac{k(t-\tau)}{2}\Bigr]J_0\bigl(\sigma\sqrt{(t-\tau)^2-(x-\xi)^2/a^2}\bigr)\Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau. \end{aligned}$$

⊙ *Литература*: А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972, стр. 136–138).

$4°$. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Первая краевая задача.
Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(x) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)}, \\ \partial_t w &= f_1(x) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)}, \\ w &= g_1(t) && \text{при} \quad x=0 && \text{(граничное условие)}, \\ w &= g_2(t) && \text{при} \quad x=l && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(x,t) = {} & \int_0^t\int_0^l \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau+ \\ & +\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l f_0(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi+\int_0^l\bigl[f_1(\xi)+kf_0(\xi)\bigr]G(x,\xi,t)\,d\xi+ \\ & +a^2\int_0^t g_1(\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,t-\tau)\Bigr]_{\xi=0}d\tau-a^2\int_0^t g_2(\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,t-\tau)\Bigr]_{\xi=l}d\tau. \end{aligned}$$

Пусть $a^2\pi^2+\frac{1}{4}a^{-2}b^2l^2-cl^2-\frac{1}{4}k^2l^2>0$. Тогда

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l}\exp\Bigl[\frac{b(\xi-x)}{2a^2}-\frac{kt}{2}\Bigr]\sum_{n=1}^{\infty}\sin\Bigl(\frac{\pi nx}{l}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{\pi n\xi}{l}\Bigr)\frac{\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_n}\bigr)}{\sqrt{\lambda_n}},$$

$$\lambda_n = \frac{a^2\pi^2n^2}{l^2}+\frac{b^2}{4a^2}-c-\frac{k^2}{4}.$$

Пусть

$$a^2\pi^2 n^2 + \tfrac{1}{4}a^{-2}b^2 l^2 - cl^2 - \tfrac{1}{4}k^2 l^2 \leqslant 0 \quad \text{при} \quad n = 1, \ldots, m;$$
$$a^2\pi^2 n^2 + \tfrac{1}{4}a^{-2}b^2 l^2 - cl^2 - \tfrac{1}{4}k^2 l^2 > 0 \quad \text{при} \quad n = m+1, m+2, \ldots$$

Тогда

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l}\exp\Bigl[\frac{b(\xi - x)}{2a^2} - \frac{kt}{2}\Bigr] \sum_{n=1}^{m} \sin\Bigl(\frac{\pi n x}{l}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{\pi n \xi}{l}\Bigr)\frac{\operatorname{sh}\bigl(t\sqrt{\beta_n}\,\bigr)}{\sqrt{\beta_n}} +$$
$$+ \frac{2}{l}\exp\Bigl[\frac{b(\xi - x)}{2a^2} - \frac{kt}{2}\Bigr] \sum_{n=m+1}^{\infty} \sin\Bigl(\frac{\pi n x}{l}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{\pi n \xi}{l}\Bigr)\frac{\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_n}\,\bigr)}{\sqrt{\lambda_n}},$$

где $\beta_n = c + \dfrac{k^2}{4} - \dfrac{a^2\pi^2 n^2}{l^2} - \dfrac{b^2}{4a^2}$, $\lambda_n = \dfrac{a^2\pi^2 n^2}{l^2} + \dfrac{b^2}{4a^2} - c - \dfrac{k^2}{4}$.

⊙ *Литература*: А. Г. Бутковский (1979, стр. 98).

5°. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Вторая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_x w &= g_1(t) && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)},\\ \partial_x w &= g_2(t) && \text{при} \quad x = l && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t) = \int_0^t\!\int_0^l \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l f_0(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^l \bigl[f_1(\xi) + kf_0(\xi)\bigr]G(x,\xi,t)\,d\xi -$$
$$- a^2\int_0^t g_1(\tau)G(x,0,t-\tau)\,d\tau + a^2\int_0^t g_2(\tau)G(x,l,t-\tau)\,d\tau.$$

При $p = c + \frac{1}{4}k^2 < 0$:

$$G(x,\xi,t) = A\exp\Bigl(\frac{b\xi}{a^2} - \frac{kt}{2}\Bigr)\frac{\sin\bigl(t\sqrt{|p|}\,\bigr)}{\sqrt{|p|}} + \frac{2}{l}\exp\Bigl[\frac{b(\xi - x)}{2a^2} - \frac{kt}{2}\Bigr]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n(x)y_n(\xi)}{1+\mu_n^2}\,\frac{\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_n}\,\bigr)}{\sqrt{\lambda_n}},$$

где

$$A = \frac{b}{a^2\bigl(e^{bl/a^2} - 1\bigr)}, \quad \lambda_n = \frac{a^2\pi^2 n^2}{l^2} + \frac{b^2}{4a^2} - c - \frac{k^2}{4},$$
$$y_n(x) = \cos\Bigl(\frac{\pi n x}{l}\Bigr) + \mu_n\sin\Bigl(\frac{\pi n x}{l}\Bigr), \quad \mu_n = \frac{bl}{2a^2\pi n}.$$

При $p = c + \frac{1}{4}k^2 > 0$:

$$G(x,\xi,t) = A\exp\Bigl(\frac{b\xi}{a^2} - \frac{kt}{2}\Bigr)\frac{\operatorname{sh}\bigl(t\sqrt{p}\,\bigr)}{\sqrt{p}} + \frac{2}{l}\exp\Bigl[\frac{b(\xi - x)}{2a^2} - \frac{kt}{2}\Bigr]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n(x)y_n(\xi)}{1+\mu_n^2}\,\frac{\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_n}\,\bigr)}{\sqrt{\lambda_n}},$$

где коэффициенты A, λ_n, μ_n и функции $y_n(x)$ остаются прежними. Если для нескольких первых значений $n = 1, \ldots, m$ выполняется неравенство $\lambda_n < 0$, то в соответствующих членах ряда выражения $\sqrt{\lambda_n}$ следует заменить на $\sqrt{|\lambda_n|}$, а синусы — на гиперболические синусы.

6°. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Третья краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_x w - s_1 w &= g_1(t) && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)},\\ \partial_x w + s_2 w &= g_2(t) && \text{при} \quad x = l && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(x,t)$ определяется по формуле из п. 5°, где

$$G(x,\xi,t) = \exp\Bigl[\frac{b(\xi - x)}{2a^2} - \frac{kt}{2}\Bigr]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n(x)y_n(\xi)\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_n}\bigr)}{B_n\sqrt{\lambda_n}}.$$

Здесь

$$y_n(x) = \cos(\mu_n x) + \frac{2a^2 s_1 + b}{2a^2\mu_n}\sin(\mu_n x), \qquad \lambda_n = a^2\mu_n^2 + \frac{b^2}{4a^2} - c - \frac{k^2}{4},$$

$$B_n = \frac{2a^2 s_2 - b}{4a^2\mu_n^2}\,\frac{4a^4\mu_n^2 + (2a^2 s_1 + b)^2}{4a^4\mu_n^2 + (2a^2 s_2 - b)^2} + \frac{2a^2 s_1 + b}{4a^2\mu_n^2} + \frac{l}{2} + \frac{l(2a^2 s_1 + b)^2}{8a^4\mu_n^2},$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\frac{\operatorname{tg}(\mu l)}{\mu} = \frac{4a^4(s_1 + s_2)}{4a^4\mu^2 - (2a^2 s_1 + b)(2a^2 s_2 - b)}.$$

4.4.2. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(x)w + \Phi(x,t)$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r}\Big).$

Это уравнение описывает колебания круглой мембраны в среде, которая оказывает сопротивление пропорциональное скорости.

1°. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f(r) && \text{при}\quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= g(r) && \text{при}\quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ w &= 0 && \text{при}\quad x = R && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp\big(-\tfrac{1}{2}kt\big)\big[A_n\cos(\lambda_n t) + B_n\sin(\lambda_n t)\big]J_0\Big(\frac{\mu_n r}{R}\Big), \qquad \lambda_n = \sqrt{\frac{a^2\mu_n^2}{R^2} - \frac{k^2}{4}}.$$

Здесь

$$A_n = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)}\int_0^R f(r)J_0\Big(\frac{\mu_n r}{R}\Big)r\,dr, \quad B_n = \frac{A_n k}{2\lambda_n} + \frac{2}{\lambda_n R^2 J_1^2(\mu_n)}\int_0^R g(r)J_0\Big(\frac{\mu_n r}{R}\Big)r\,dr,$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $J_0(\mu) = 0$.

2°. О решении второй и третьей краевой задачи см. уравнение 4.4.2.2 (пп. 3°–4° при $b = 0$).

◉ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 536–537).

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r}\Big) - bw + \Phi(r,t).$

1°. Замена $w(r,t) = \exp\big(-\frac{1}{2}kt\big)u(r,t)$ приводит к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\Big) - \big(b - \tfrac{1}{4}k^2\big)u + \exp\big(\tfrac{1}{2}kt\big)\Phi(r,t),$$

которое рассматривается в разд. 4.2.5.

2°. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r) && \text{при}\quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(r) && \text{при}\quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ w &= g(t) && \text{при}\quad r = R && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,t) = {}& \frac{\partial}{\partial t}\int_0^R f_0(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi + \int_0^R \big[f_1(\xi) + kf_0(\xi)\big]G(r,\xi,t)\,d\xi - \\ &- a^2\int_0^t g(\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\xi,t-\tau)\Big]_{\xi=R}d\tau + \int_0^t\int_0^R \Phi(\xi,\tau)G(r,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau. \end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,\xi,t) = \exp\big(-\tfrac{1}{2}kt\big)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\xi}{R^2 J_1^2(\mu_n)}J_0\Big(\frac{\mu_n r}{R}\Big)J_0\Big(\frac{\mu_n\xi}{R}\Big)\frac{\sin\big(t\sqrt{\lambda_n}\,\big)}{\sqrt{\lambda_n}}, \qquad \lambda_n = \frac{a^2\mu_n^2}{R^2} + b - \frac{k^2}{4},$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $J_0(\mu) = 0$. Численные значения первых десяти μ_n приведены в разд. 1.2.1-3.

3°. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Вторая краевая задача.
Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}, \\ \partial_t w &= f_1(r) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}, \\ \partial_r w &= g(t) && \text{при} \quad r = R && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^R f_0(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi + \int_0^R \bigl[f_1(\xi) + kf_0(\xi)\bigr]G(r,\xi,t)\,d\xi + \\ + a^2\int_0^t g(\tau)G(r,R,t-\tau)\,d\tau + \int_0^t\int_0^R \Phi(\xi,\tau)G(r,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\xi,t) = \exp\bigl(-\tfrac{1}{2}kt\bigr)\left[\frac{2\xi\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_0}\,\bigr)}{R^2\sqrt{\lambda_0}} + \frac{2}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi}{J_0^2(\mu_n)}J_0\Bigl(\frac{\mu_n r}{R}\Bigr)J_0\Bigl(\frac{\mu_n \xi}{R}\Bigr)\frac{\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_n}\,\bigr)}{\sqrt{\lambda_n}}\right],$$

где $\lambda_0 = b - \frac{1}{4}k^2$, $\lambda_n = a^2\mu_n^2 R^{-2} + b - \frac{1}{4}k^2$, μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $J_1(\mu) = 0$. Численные значения первых десяти корней μ_n приведены в разд. 1.2.1-4.

4°. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Третья краевая задача.
Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}, \\ \partial_t w &= f_1(r) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}, \\ \partial_r w + sw &= g(t) && \text{при} \quad r = R && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(r,t)$ дается формулой из п. 3°, где

$$G(r,\xi,t) = \frac{2}{R^2}\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}kt\bigr)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2\xi}{(s^2R^2 + \mu_n^2)J_0^2(\mu_n)}J_0\Bigl(\frac{\mu_n r}{R}\Bigr)J_0\Bigl(\frac{\mu_n \xi}{R}\Bigr)\frac{\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_n}\,\bigr)}{\sqrt{\lambda_n}}.$$

Здесь $\lambda_n = a^2\mu_n^2 R^{-2} + b - \frac{1}{4}k^2$, μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\mu J_1(\mu) - sRJ_0(\mu) = 0.$$

Численные значения первых шести корней μ_n приведены в книгах М. Абрамовица, И. Стиган (1979, стр. 232) и Г. Карслоу, Д. Егера (1964, стр. 482).

3. $\displaystyle \boldsymbol{\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k\frac{\partial w}{\partial t} = a^2\Bigl(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\Bigr) - bw + \Phi(r,t).}$

1°. Замена $w(r,t) = \exp\bigl(-\frac{1}{2}kt\bigr)u(r,t)$ приводит к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Bigl(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\Bigr) - \bigl(b - \tfrac{1}{4}k^2\bigr)u + \exp\bigl(\tfrac{1}{2}kt\bigr)\Phi(r,t),$$

которое рассматривается в разд. 4.2.6.

2°. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Первая краевая задача.
Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}, \\ \partial_t w &= f_1(r) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}, \\ w &= g(t) && \text{при} \quad r = R && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^R f_0(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi \int_0^R \bigl[f_1(\xi) + kf_0(\xi)\bigr]G(r,\xi,t)\,d\xi - \\ - a^2\int_0^t g(\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\xi,t-\tau)\Bigr]_{\xi=R}d\tau + \int_0^t\int_0^R \Phi(\xi,\tau)G(r,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где

$$G(r,\xi,t) = \frac{2\xi}{Rr}\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}kt\bigr)\sum_{n=1}^{\infty}\sin\Bigl(\frac{n\pi r}{R}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{n\pi\xi}{R}\Bigr)\frac{\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_n}\,\bigr)}{\sqrt{\lambda_n}}, \qquad \lambda_n = \frac{a^2\pi^2n^2}{R^2} + b - \frac{k^2}{4}.$$

3°. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Вторая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(r) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_r w &= g(t) &&\text{при}\quad r = R &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^R f_0(\xi)G(r,\xi,t)\,d\xi \int_0^R \bigl[f_1(\xi) + kf_0(\xi)\bigr]G(r,\xi,t)\,d\xi + \\ + a^2\int_0^t g(\tau)G(r,R,t-\tau)\,d\tau + \int_0^t\!\!\int_0^R \Phi(\xi,\tau)G(r,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где

$$G(r,\xi,t) = \exp\bigl(-\tfrac{1}{2}kt\bigr)\left[\frac{3\xi^2\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_0}\bigr)}{R^3\sqrt{\lambda_0}} + \frac{2\xi}{Rr}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2+1}{\mu_n^2\sqrt{\lambda_n}}\sin\Bigl(\frac{\mu_n r}{R}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{\mu_n\xi}{R}\Bigr)\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_n}\bigr)\right].$$

Здесь $\lambda_0 = b - \frac{1}{4}k^2$, $\lambda_n = a^2\mu_n^2R^{-2} + b - \frac{1}{4}k^2$, μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\operatorname{tg}\mu - \mu = 0$. Численные значения первых пяти корней μ_n см. в разд. 1.2.3-5.

4°. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Третья краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(r) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_r w + sw &= g(t) &&\text{при}\quad r = R &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(r,t)$ дается формулой из п. 3°, где

$$G(r,\xi,t) = \frac{2\xi}{Rr}\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}kt\bigr)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2 + (sR-1)^2}{\mu_n^2 + sR(sR-1)}\sin\Bigl(\frac{\mu_n r}{R}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{\mu_n\xi}{R}\Bigr)\frac{\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_n}\bigr)}{\sqrt{\lambda_n}}.$$

Здесь $\lambda_n = a^2\mu_n^2R^{-2} + b - \frac{1}{4}k^2$, μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\mu\operatorname{ctg}\mu + sR - 1 = 0$. Численные значения первых шести корней μ_n приведены в книге Г. Карслоу, Д. Егера (1964, стр. 481).

4. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k\frac{\partial w}{\partial t} = a^2\frac{\partial}{\partial x}\Bigl(x\frac{\partial w}{\partial x}\Bigr) - bw + \Phi(x,t).$

1°. Замена $w(r,t) = \exp\bigl(-\frac{1}{2}kt\bigr)u(r,t)$ приводит к уравнению вида 4.3.1.2:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial}{\partial x}\Bigl(x\frac{\partial u}{\partial x}\Bigr) - \bigl(b - \tfrac{1}{4}k^2\bigr)u + \exp\bigl(\tfrac{1}{2}kt\bigr)\Phi(x,t).$$

2°. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(x) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(x) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\ w &= g(t) &&\text{при}\quad x = l &&\text{(граничное условие)},\\ w &\neq \infty &&\text{при}\quad x = 0 &&\text{(условие ограниченности)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l f_0(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^l \bigl[f_1(\xi) + kf_0(\xi)\bigr]G(x,\xi,t)\,d\xi - \\ - a^2 l\int_0^t g(\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,t-\tau)\Bigr]_{\xi=l}\,d\tau + \int_0^t\!\!\int_0^l \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{l}\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}kt\bigr)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{J_1^2(\mu_n)}J_0\Bigl(\mu_n\sqrt{\frac{x}{l}}\Bigr)J_0\Bigl(\mu_n\sqrt{\frac{\xi}{l}}\Bigr)\frac{\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_n}\bigr)}{\sqrt{\lambda_n}}.$$

Здесь $\lambda_n = \frac{1}{4}a^2\mu_n^2 l^{-1} + b - \frac{1}{4}k^2$, μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $J_0(\mu) = 0$.

3°. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Вторая краевая задача.
Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}, \\ \partial_t w &= f_1(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}, \\ \partial_x w &= g(t) && \text{при} \quad x = l && \text{(граничное условие)}, \\ w &\neq \infty && \text{при} \quad x = 0 && \text{(условие ограниченности)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l f_0(\xi) G(x,\xi,t)\, d\xi + \int_0^l \bigl[f_1(\xi) + k f_0(\xi)\bigr]\, d\xi + \\ + a^2 l \int_0^t g(\tau) G(x,l,t-\tau)\, d\tau + \int_0^t \int_0^l \Phi(\xi,\tau) G(x,\xi,t-\tau)\, d\xi\, d\tau,$$

где

$$G(r,\xi,t) = \exp\bigl(-\tfrac{1}{2}kt\bigr) \left[\frac{\sin(t\sqrt{\lambda_0})}{l\sqrt{\lambda_0}} + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_0^2(\mu_n)} J_0\Bigl(\mu_n \sqrt{\frac{x}{l}}\Bigr) J_0\Bigl(\mu_n \sqrt{\frac{\xi}{l}}\Bigr) \frac{\sin(t\sqrt{\lambda_n})}{\sqrt{\lambda_n}} \right].$$

Здесь $\lambda_0 = b - \frac{1}{4}k^2$, $\lambda_n = \frac{1}{4}a^2\mu_n^2 l^{-1} + b - \frac{1}{4}k^2$, μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $J_1(\mu) = 0$. Численные значения первых десяти корней μ_n приведены в разд. 1.2.1-4.

4°. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Третья краевая задача.
Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}, \\ \partial_t w &= f_1(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}, \\ \partial_x w + kw &= g(t) && \text{при} \quad x = l && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(x,t)$ дается формулой из п. 3°, где

$$G(r,\xi,t) = \frac{1}{l} \exp\bigl(-\tfrac{1}{2}kt\bigr) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2}{(4k^2 l + \mu_n^2) J_0^2(\mu_n)} J_0\Bigl(\mu_n \sqrt{\frac{x}{l}}\Bigr) J_0\Bigl(\mu_n \sqrt{\frac{\xi}{l}}\Bigr) \frac{\sin(t\sqrt{\lambda_n})}{\sqrt{\lambda_n}}.$$

Здесь $\lambda_n = \frac{1}{4}a^2\mu_n^2 l^{-1} + b - \frac{1}{4}k^2$, μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\mu J_1(\mu) - 2k\sqrt{l}\, J_0(\mu) = 0.$$

Численные значения первых шести корней μ_n приведены в книгах М. Абрамовица, И. Стиган (1979, стр. 232) и Г. Карслоу, Д. Егера (1964, стр. 482).

5. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k\frac{\partial w}{\partial t} = (ax^m + b)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \tfrac{1}{2}amx^{m-1}\frac{\partial w}{\partial x} + cw.$

Замена $z = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^m + b}}$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами вида 4.4.1.2: $\partial_{tt} w + k\partial_t w = \partial_{zz} w + cw$.

4.4.3. Другие уравнения

1. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{k-1}{t}\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

Уравнение Дарбу. Область: $-\infty < x < \infty$. Задача Коши.
Заданы начальные условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x) && \text{при} \quad t = 0, \\ \partial_t w &= 0 && \text{при} \quad t = 0. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t) = \frac{\Gamma\bigl(\frac{k}{2}\bigr)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\bigl(\frac{k}{2} - \frac{1}{2}\bigr)} \int_{-1}^{1} f(x + t\xi)(1 - \xi^2)^{\frac{k-3}{2}}\, d\xi \qquad (k > 1).$$

⊙ *Литература*: Р. Курант (1964, стр. 695).

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \dfrac{2a}{t}\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - b^2 w.$

Область: $-\infty < x < \infty$. Задача Коши.
Заданы начальные условия:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0,$$
$$t^{2a}\partial_t w = g(x) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Решение при $0 < 2a < 1$:

$$w(x,t) = \frac{\Gamma(2a)}{\Gamma^2(a)}\int_0^1 f\big(x + t(2\xi - 1)\big)\bar{J}_{a-1}\big(2bt\sqrt{\xi(1-\xi)}\,\big)\xi^{a-1}(1-\xi)^{a-1}d\xi +$$
$$+ \frac{\Gamma(2-2a)}{(1-2a)\Gamma^2(1-a)}t^{1-2a}\int_0^1 g\big(x + t(2\xi - 1)\big)\bar{J}_{-a}\big(2bt\sqrt{\xi(1-\xi)}\,\big)\xi^{-a}(1-\xi)^{-a}d\xi,$$

где

$$\bar{J}_\nu(z) = 2^\nu\Gamma(1+\nu)z^{-\nu}J_\nu(z), \quad \Gamma(\nu) = \int_0^\infty e^{-s}s^{\nu-1}ds.$$

⊙ *Литература*: М. М. Смирнов (1975, стр. 15, 60).

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \dfrac{2a}{t}\dfrac{\partial w}{\partial t} = t^m\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

Область: $-\infty < x < \infty$. Задача Коши.
Заданы начальные условия:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0,$$
$$t^{2a}\partial_t w = g(x) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Решение при $0 \leqslant 2a < 1$ и $m > 0$:

$$w(x,t) = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}\int_0^1 f\Big(x + \frac{2}{2+m}t^{\frac{2+m}{2}}(2\xi - 1)\Big)\xi^{\beta-1}(1-\xi)^{\beta-1}d\xi +$$
$$+ \frac{\Gamma(2-2\beta)}{(1-2a)\Gamma^2(1-\beta)}t^{1-2a}\int_0^1 g\Big(x + \frac{2}{2+m}t^{\frac{2+m}{2}}(2\xi - 1)\Big)\xi^{-\beta}(1-\xi)^{-\beta}d\xi,$$

где

$$\beta = \frac{m+4a}{2(m+2)}, \quad \Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-s}s^{z-1}ds.$$

⊙ *Литература*: М. М. Смирнов (1975, стр. 15, 60).

4. $t^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + kt\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial w}{\partial x} + cw.$

Замена $t = Ae^\tau$ $(A \neq 0)$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами вида 4.4.1.3:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + (k-1)\frac{\partial w}{\partial \tau} = a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\frac{\partial w}{\partial x} + cw.$$

5. $t^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + kt\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2x^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx\dfrac{\partial w}{\partial x} + cw.$

Преобразование

$$t = Ae^\tau, \quad x = Be^\xi \qquad (A \neq 0,\ B \neq 0)$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами вида 4.4.1.3:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + (k-1)\frac{\partial w}{\partial \tau} = a^2\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + (b-a^2)\frac{\partial w}{\partial \xi} + cw.$$

6. $t^m\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + at^{m-1}\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad 0 < m < 2.$

Область: $-\infty < x < \infty$. Задача Коши.
Заданы начальные условия:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0,$$
$$t^a\partial_t w = g(x) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

1°. Решение при $\frac{1}{2}m < a < 1$:

$$w(x,t) = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)} \int_0^1 f\Big(x + \frac{2}{2-m} t^{\frac{2-m}{2}}(2\xi - 1)\Big)\xi^{\beta-1}(1-\xi)^{\beta-1} d\xi +$$
$$+ \frac{\Gamma(2-2\beta)}{(1-a)\Gamma^2(1-\beta)} t^{1-a} \int_0^1 g\Big(x + \frac{2}{2-m} t^{\frac{2-m}{2}}(2\xi - 1)\Big)\xi^{-\beta}(1-\xi)^{-\beta} d\xi,$$

где

$$\beta = \frac{2a-m}{2(2-m)}, \quad \Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-s} s^{z-1} ds.$$

2°. Решение при $a = \frac{1}{2}m$:

$$w(x,t) = \frac{f(y)+f(z)}{2} + \frac{1}{2}\int_z^y g(\xi)\,d\xi,$$
$$y = x - \frac{2}{2-m} t^{\frac{2-m}{2}}, \quad z = x + \frac{2}{2-m} t^{\frac{2-m}{2}}.$$

⊙ *Литература*: М. М. Смирнов (1975, стр. 14–15, 59–60).

7. $\boldsymbol{(t^m + k)\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1}{2} m t^{m-1}\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial w}{\partial x} + cw.}$

Замена $\tau = \displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{t^m + k}}$ приводит к уравнению $\partial_{\tau\tau} w = a\partial_{xx} w + b\partial_x w + cw$, которое рассматривается в разд. 4.1.5.

4.5. Уравнения, содержащие произвольные функции

4.5.1. Уравнение вида $s(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[p(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big] - q(x)w + \Phi(x,t)$

Считаем, что функции s, p, p'_x, q — непрерывны и выполняются неравенства $s > 0$, $p > 0$ при $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$.

4.5.1-1. Общие формулы для решения линейных неоднородных краевых задач.

Решение данного уравнения с общими начальными условиями

$$w = f_0(x) \quad \text{при} \quad t = 0, \qquad \partial_t w = f_1(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \tag{1}$$

и произвольными линейными неоднородными граничными условиями

$$a_1 \partial_x w + b_1 w = g_1(t) \quad \text{при} \quad x = x_1, \qquad a_2 \partial_x w + b_2 w = g_2(t) \quad \text{при} \quad x = x_2 \tag{2}$$

можно записать в виде суммы

$$w(x,t) = \int_0^t \int_{x_1}^{x_2} \Phi(\xi,\tau)\mathcal{G}(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial t}\int_{x_1}^{x_2} s(\xi) f_0(\xi)\mathcal{G}(x,\xi,t)\,d\xi + \int_{x_1}^{x_2} s(\xi) f_1(\xi)\mathcal{G}(x,\xi,t)\,d\xi +$$
$$+ p(x_1)\int_0^t g_1(\tau)\Lambda_1(x,t-\tau)\,d\tau + p(x_2)\int_0^t g_2(\tau)\Lambda_2(x,t-\tau)\,d\tau. \tag{3}$$

Здесь модифицированная функция Грина определяется по формуле

$$\mathcal{G}(x,\xi,t) = \sum_{n=1}^\infty \frac{y_n(x)y_n(\xi)\sin\big(t\sqrt{\lambda_n}\big)}{\|y_n\|^2\sqrt{\lambda_n}}, \qquad \|y_n\|^2 = \int_{x_1}^{x_2} s(x) y_n^2(x)\,dx, \tag{4}$$

где λ_n и $y_n(x)$ — собственные значения и собственные функции задачи Штурма — Лиувилля для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$[p(x)y'_x]'_x + [\lambda s(x) - q(x)]y = 0, \qquad a_1 y'_x + b_1 y = 0 \quad \text{при} \quad x = x_1, \qquad a_2 y'_x + b_2 y = 0 \quad \text{при} \quad x = x_2. \tag{5}$$

Функции $\Lambda_1(x,t)$ и $\Lambda_2(x,t)$, входящие в подынтегральные выражения двух последних слагаемых в решении (3), выражаются через функцию Грина (4). Соответствующие формулы будут указаны далее при исследовании конкретных краевых задач.

Общие свойства задачи Штурма — Лиувилля (5):

1°. Существует бесконечное множество собственных значений $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots$, причем $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$ (поэтому может быть лишь конечное число отрицательных собственных значений).

2°. Собственные функции $y_n(x)$ и $y_m(x)$ при $n \neq m$ ортогональны между собой с весом $s(x)$ на отрезке $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$:

$$\int_{x_1}^{x_2} s(x)y_n(x)y_m(x)\,dx = 0 \quad \text{при} \quad n \neq m.$$

3°. При выполнении условий

$$q(x) \geqslant 0, \quad a_1 b_1 \leqslant 0, \quad a_2 b_2 \geqslant 0 \tag{6}$$

отрицательных собственных значений нет. Если $q \equiv 0$, $b_1 = b_2 = 0$, то наименьшим собственным значением будет $\lambda_1 = 0$, которому отвечает собственная функция $\varphi_1 = \text{const}$. В остальных случаях при выполнении условий (6) все собственные значения положительны.

Замечание. Более подробно свойства задачи Штурма — Лиувилля (5) описаны в разд. 1.8.9. Там же приведены асимптотические и приближенные формулы для собственных значений и собственных функций.

4.5.1-2. Первая краевая задача (случай $a_1 = a_2 = 0$, $b_1 = b_2 = 1$).

Решение первой краевой задачи для данного уравнения с начальными условиями (1) и граничными условиями

$$w = g_1(t) \quad \text{при} \quad x = x_1,$$
$$w = g_2(t) \quad \text{при} \quad x = x_2$$

дается формулами (3)–(4), где

$$\Lambda_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial \xi}\mathcal{G}(x,\xi,t)\Big|_{\xi=x_1}, \quad \Lambda_2(x,t) = -\frac{\partial}{\partial \xi}\mathcal{G}(x,\xi,t)\Big|_{\xi=x_2}.$$

4.5.1-3. Вторая краевая задача (случай $a_1 = a_2 = 1$, $b_1 = b_2 = 0$).

Решение второй краевой задачи для данного уравнения с начальными условиями (1) и граничными условиями

$$\partial_x w = g_1(t) \quad \text{при} \quad x = x_1,$$
$$\partial_x w = g_2(t) \quad \text{при} \quad x = x_2$$

дается формулами (3)–(4), где

$$\Lambda_1(x,t) = -\mathcal{G}(x,x_1,t), \quad \Lambda_2(x,t) = \mathcal{G}(x,x_2,t).$$

4.5.1-4. Третья краевая задача (случай $a_1 = a_2 = 1$, $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$).

Решение третьей краевой задачи для данного уравнения с начальными условиями (1) и граничными условиями (2) при $a_1 = a_2 = 1$ дается формулами (3)–(4), где

$$\Lambda_1(x,t) = -\mathcal{G}(x,x_1,t), \quad \Lambda_2(x,t) = \mathcal{G}(x,x_2,t).$$

4.5.1-5. Смешанная краевая задача (случай $a_1 = b_2 = 0$, $a_2 = b_1 = 1$).

Решение смешанной краевой задачи для данного уравнения с начальными условиями (1) и граничными условиями

$$w = g_1(t) \quad \text{при} \quad x = x_1,$$
$$\partial_x w = g_2(t) \quad \text{при} \quad x = x_2$$

дается формулами (3)–(4), где

$$\Lambda_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial \xi}\mathcal{G}(x,\xi,t)\Big|_{\xi=x_1}, \quad \Lambda_2(x,t) = \mathcal{G}(x,x_2,t).$$

4.5.1-6. Смешанная краевая задача (случай $a_1 = b_2 = 1$, $a_2 = b_1 = 0$).

Решение смешанной краевой задачи для данного уравнения с начальными условиями (1) и граничными условиями

$$\partial_x w = g_1(t) \quad \text{при} \quad x = x_1,$$
$$w = g_2(t) \quad \text{при} \quad x = x_2$$

дается формулами (3)–(4), где

$$\Lambda_1(x,t) = -\mathcal{G}(x, x_1, t), \quad \Lambda_2(x,t) = -\frac{\partial}{\partial \xi}\mathcal{G}(x,\xi,t)\Big|_{\xi=x_2}.$$

⊙ *Литература к разделу 4.5.1*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 48–51, 191–194), В. С. Владимиров (1971, стр. 471–473), А. Д. Полянин (2000*a*).

4.5.2. Уравнение вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a(t)\frac{\partial w}{\partial t} = b(t)\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial w}{\partial x}\right] - q(x)w\right\} + \Phi(x,t)$

Считаем, что функции p, p'_x, q — непрерывны и $p > 0$ при $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$.

4.5.2-1. Общие формулы для решения линейных неоднородных краевых задач.

Решение данного уравнения с общими начальными условиями

$$w = f_0(x) \quad \text{при} \quad t = 0,$$
$$\partial_t w = f_1(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \tag{1}$$

и произвольными линейными неоднородными граничными условиями

$$s_1 \partial_x w + k_1 w = g_1(t) \quad \text{при} \quad x = x_1,$$
$$s_2 \partial_x w + k_2 w = g_2(t) \quad \text{при} \quad x = x_2 \tag{2}$$

можно записать в виде суммы

$$w(x,t) = \int_0^t \int_{x_1}^{x_2} \Phi(\xi,\tau) G(x,\xi,t,\tau)\, d\xi\, d\tau -$$
$$- \int_{x_1}^{x_2} f_0(\xi)\left[\frac{\partial}{\partial \tau} G(x,\xi,t,\tau)\right]_{\tau=0} d\xi + \int_{x_1}^{x_2} \bigl[f_1(\xi) + a(0) f_0(\xi)\bigr] G(x,\xi,t,0)\, d\xi +$$
$$+ p(x_1)\int_0^t g_1(\tau) b(\tau) \Lambda_1(x,t,\tau)\, d\tau + p(x_2)\int_0^t g_2(\tau) b(\tau)\Lambda_2(x,t,\tau)\, d\tau. \tag{3}$$

Здесь функция Грина определяется по формуле

$$G(x,\xi,t,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n(x) y_n(\xi)}{\|y_n\|^2} U_n(t,\tau), \qquad \|y_n\|^2 = \int_{x_1}^{x_2} y_n^2(x)\, dx, \tag{4}$$

где $y_n(x)$ — собственные функции, соответствующие собственным значениям $\lambda = \lambda_n$, задачи Штурма — Лиувилля для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с однородными граничными условиями:

$$[p(x)y'_x]'_x + [\lambda - q(x)]y = 0,$$
$$s_1 y'_x + k_1 y = 0 \quad \text{при} \quad x = x_1, \tag{5}$$
$$s_2 y'_x + k_2 y = 0 \quad \text{при} \quad x = x_2.$$

Функции $U_n = U_n(t,\tau)$ определяются путем решения задачи Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения

$$U''_n + a(t) U'_n + \lambda_n b(t) U_n = 0,$$
$$U_n|_{t=\tau} = 0, \quad U'_n|_{t=\tau} = 1. \tag{6}$$

Здесь штрихи обозначают производные по переменной t, а τ входит в начальные условия как свободный параметр.

Функции $\Lambda_1(x,t)$ и $\Lambda_2(x,t)$, входящие в подынтегральные выражения двух последних слагаемых в решении (3), выражаются через функцию Грина (4). Соответствующие формулы будут указаны далее при исследовании конкретных краевых задач.

Свойства задачи Штурма — Лиувилля (5) подробно описаны в разд. 1.8.9. Там же приведены асимптотические и приближенные формулы для собственных значений и собственных функций.

4.5.2-2. Первая, вторая, третья и смешанные краевые задачи.

1°. *Первая краевая задача.* Решение данного уравнения с начальными условиями (1) и граничными условиями (2) при $s_1 = s_2 = 0$, $k_1 = k_2 = 1$ дается формулами (3)–(4), где

$$\Lambda_1(x,t,\tau) = \frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,t,\tau)\Big|_{\xi=x_1}, \quad \Lambda_2(x,t,\tau) = -\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,t,\tau)\Big|_{\xi=x_2}.$$

2°. *Вторая краевая задача.* Решение данного уравнения с начальными условиями (1) и граничными условиями (2) при $s_1 = s_2 = 1$, $k_1 = k_2 = 0$ дается формулами (3)–(4), где

$$\Lambda_1(x,t,\tau) = -G(x,x_1,t,\tau), \quad \Lambda_2(x,t,\tau) = G(x,x_2,t,\tau).$$

3°. *Третья краевая задача.* Решение данного уравнения с начальными условиями (1) и граничными условиями (2) при $s_1 = s_2 = 1$, $k_1k_2 \neq 0$ дается формулами (3)–(4), где

$$\Lambda_1(x,t,\tau) = -G(x,x_1,t,\tau), \quad \Lambda_2(x,t,\tau) = G(x,x_2,t,\tau).$$

4°. *Смешанная краевая задача.* Решение данного уравнения с начальными условиями (1) и граничными условиями (2) при $s_1 = k_2 = 0$, $s_2 = k_1 = 1$ дается формулами (3)–(4), где

$$\Lambda_1(x,t,\tau) = \frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,t,\tau)\Big|_{\xi=x_1}, \quad \Lambda_2(x,t,\tau) = G(x,x_2,t,\tau).$$

5°. *Смешанная краевая задача.* Решение данного уравнения с начальными условиями (1) и граничными условиями (2) при $s_1 = k_2 = 1$, $s_2 = k_1 = 0$ дается формулами (3)–(4), где

$$\Lambda_1(x,t,\tau) = -G(x,x_1,t,\tau), \quad \Lambda_2(x,t,\tau) = -\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,t,\tau)\Big|_{\xi=x_2}.$$

⊙ *Литература*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 54–55), А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко (1985, стр. 96–101), А. Д. Полянин (2000*a*).

4.5.3. Другие уравнения

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + \Phi(x,t), \qquad 0 < f(x) < \infty.$

Это уравнение можно представить в виде уравнения из разд. 4.5.1:

$$s(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + s(x)\Phi(x,t),$$

где

$$s(x) = \frac{1}{f(x)}\exp\left[\int\frac{g(x)}{f(x)}dx\right], \quad p(x) = \exp\left[\int\frac{g(x)}{f(x)}dx\right], \quad q(x) \equiv 0.$$

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(x)w + \Phi(x,t).$

Это уравнение можно представить в виде уравнения из разд. 4.5.1:

$$s(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial w}{\partial x}\right] - q(x)w + s(x)\Phi(x,t),$$

где

$$s(x) = \frac{1}{f(x)}\exp\left[\int\frac{g(x)}{f(x)}\,dx\right], \quad p(x) = \exp\left[\int\frac{g(x)}{f(x)}\,dx\right], \quad q(x) = -\frac{h(x)}{f(x)}\exp\left[\int\frac{g(x)}{f(x)}\,dx\right].$$

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + \big[h_1(x) + h_2(t)\big]w.$

1°. Существуют решения в виде произведения $w(x,t) = \varphi(x)\psi(t)$, где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям (λ — произвольная постоянная):

$$f(x)\varphi''_{xx} + g(x)\varphi'_x + \big[\lambda + h_1(x)\big]\varphi = 0, \qquad \psi''_{tt} + \big[\lambda - h_2(t)\big]\psi = 0.$$

2°. О решении различных краевых задач для исходного уравнения см. разд. 0.4.1–0.4.2.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \tfrac{1}{2}f'(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + bw.$

Замена $z = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_{tt}w = \partial_{zz}w + bw$, которое рассматривается в разд. 4.1.3.

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(f'_x + 2g)\dfrac{\partial w}{\partial x} + (fg'_x + g^2)w, \quad f = f(x),\ g = g(x).$

Преобразование

$$w(x,t) = u(\xi,t)\exp\Bigl(-\int \frac{g}{f}\,dx\Bigr), \quad \xi = \int \frac{dx}{f(x)}$$

приводит к волновому уравнению $\partial_{tt}u = \partial_{\xi\xi}u$, которое рассматривается в разд. 4.1.1.

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \tfrac{1}{2}f'(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + bw.$

Замена $z = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами вида 4.4.1.2: $\partial_{tt}w + a\partial_t w = \partial_{zz}w + bw$.

7. $f(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \tfrac{1}{2}f'(t)\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial w}{\partial x} + cw.$

Замена $\tau = \displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{f(t)}}$ приводит к уравнению $\partial_{\tau\tau}w = a\partial_{xx}w + b\partial_x w + cw$, которое рассматривается в разд. 4.1.5.

8. $f(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \tfrac{1}{2}f'(t)\dfrac{\partial w}{\partial t} = g(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \tfrac{1}{2}g'(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + cw.$

Преобразование $\tau = \displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{f(t)}}$, $z = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{g(x)}}$ уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_{\tau\tau}w = \partial_{zz}w + cw$, которое рассматривается в разд. 4.1.3.

5. Уравнения гиперболического типа с двумя пространственными переменными

5.1. Волновое уравнение $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 w$

5.1.1. Задачи в декартовой системе координат

Волновое уравнение с двумя пространственными переменными в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right).$$

5.1.1-1. Частные решения и некоторые формулы.

1°. Частные решения, которые выражаются через решения более простых уравнений:

$$w(x,y,t) = \big[A\cos(ky) + B\sin(ky)\big]u(x,t), \quad \text{где} \quad \partial_{tt}u = a^2\partial_{xx}u - a^2k^2u, \tag{1}$$

$$w(x,y,t) = \big[A\operatorname{ch}(ky) + B\operatorname{sh}(ky)\big]u(x,t), \quad \text{где} \quad \partial_{tt}u = a^2\partial_{xx}u + a^2k^2u, \tag{2}$$

$$w(x,y,t) = \big[A\cos(kt) + B\sin(kt)\big]u(x,y), \quad \text{где} \quad \partial_{xx}u + \partial_{yy}u = -(k/a)^2u, \tag{3}$$

$$w(x,y,t) = \big[A\operatorname{ch}(kt) + B\operatorname{sh}(kt)\big]u(x,y), \quad \text{где} \quad \partial_{xx}u + \partial_{yy}u = (k/a)^2u, \tag{4}$$

$$w(x,y,t) = \exp\left(\frac{at \pm y}{2b}\right)u(x,\tau), \quad \tau = \frac{at \mp y}{2}, \quad \text{где} \quad \partial_\tau u = b\partial_{xx}u. \tag{5}$$

О частных решениях уравнений (1) и (2) для функции $u(x,t)$ см. уравнение Клейна — Гордона 4.1.3; о частных решениях уравнений Гельмгольца (3) и (4) для функции $u(x,y)$ см. разд. 7.3.2; о частных решениях уравнения теплопроводности (5) для функции $u(x,\tau)$ см. разд. 1.1.1.

2°. Фундаментальное решение:

$$\mathscr{E}(x,y,t) = \frac{\theta(at-r)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2 - r^2}}, \qquad \theta(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } z \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } z < 0, \end{cases}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3°. Решения в виде бесконечных рядов, содержащие произвольные функции пространственных переменных:

$$w(x,y,t) = f(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(at)^{2n}}{(2n)!}\Delta^n f(x,y), \qquad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$w(x,y,t) = tg(x,y) + t\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(at)^{2n}}{(2n+1)!}\Delta^n g(x,y),$$

где $f(x,y)$ и $g(x,y)$ — любые бесконечно дифференцируемые функции. Первое решение удовлетворяет начальным условиям $w(x,y,0) = f(x,y)$, $\partial_t w(x,y,0) = 0$, а второе — начальным условиям $w(x,y,0) = 0$, $\partial_t w(x,y,0) = g(x,y)$. Суммы будут конечными, если $f(x,y)$ и $g(x,y)$ являются полиномами.

⊙ *Литература*: А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко (1985, стр. 63).

4°. Широкий класс решений волнового уравнения с двумя пространственными переменными задается формулами

$$w(x,y,t) = \operatorname{Re} F(\theta) \qquad \text{и} \qquad w(x,y,t) = \operatorname{Im} F(\theta). \tag{6}$$

Здесь $F(\theta)$ — произвольная аналитическая функция комплексного аргумента θ, связанного с переменными (x, y, t) неявным соотношением

$$at - (x - x_0)\theta + (y - y_0)\sqrt{1-\theta^2} = G(\theta), \tag{7}$$

где $G(\theta)$ — любая аналитическая функция, x_0 и y_0 — произвольные постоянные. Решения вида (6), (7) имеют обширные приложения в теории дифракции. Если аргумент θ, полученный разрешением (7) для заданной $G(\theta)$, будет действительным в некоторой области D, то в формуле (6) в области D следует положить $\operatorname{Re} F(\theta) = F(\theta)$.

⊙ *Литература*: В. И. Смирнов (1974, т. 3, ч. 2, стр. 196–201).

5°. Пусть $w = w(x, y, t)$ — некоторое решение волнового уравнения. Тогда функции

$$\begin{aligned}
w_1 &= Aw(\pm\lambda x + b_1,\ \pm\lambda y + b_2,\ \pm\lambda t + b_3),\\
w_2 &= Aw\left(\frac{x - vt}{\sqrt{1-(v/a)^2}},\ y,\ \frac{t - va^{-2}x}{\sqrt{1-(v/a)^2}}\right),\\
w_3 &= \frac{A}{\sqrt{|r^2 - a^2t^2|}}\,w\left(\frac{x}{r^2 - a^2t^2},\ \frac{y}{r^2 - a^2t^2},\ \frac{t}{r^2 - a^2t^2}\right),\\
w_4 &= \frac{A}{\sqrt{\Xi}}\,w\left(\frac{x + b_1(a^2t^2 - r^2)}{\Xi},\ \frac{y + b_2(a^2t^2 - r^2)}{\Xi},\ \frac{at + b_3(a^2t^2 - r^2)}{a\Xi}\right),\\
r^2 &= x^2 + y^2, \quad \Xi = 1 - 2(b_1x + b_2y - ab_3t) + (b_1^2 + b_2^2 - b_3^2)(r^2 - a^2t^2),
\end{aligned}$$

где A, v, b_1, b_2, b_3, λ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения. Знаки при λ в формуле для w_1 выбираются произвольно независимо друг от друга. Функция w_2 получена как следствие инвариантности волнового уравнения по отношению к преобразованию Лоренца.

Более подробную информацию о частных решениях и преобразованиях волнового уравнения с двумя пространственными переменными можно найти в работах указанных ниже.

⊙ *Литература*: E. Kalnins, W. Miller (1975, 1976), У. Миллер (1981, стр. 273–280).

5.1.1-2. Область: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$. Задача Коши.

Заданы начальные условия:

$$\begin{aligned}
w &= f(x, y) \quad \text{при} \quad t = 0,\\
\partial_t w &= g(x, y) \quad \text{при} \quad t = 0.
\end{aligned}$$

Решение (формула Пуассона):

$$w(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{C_{at}} \frac{f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{a^2t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} + \frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{C_{at}} \frac{g(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{a^2t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}},$$

где интегрирование проводится по внутренности круга радиуса at с центром в точке (x, y).

⊙ *Литература*: А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972, стр. 409), Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов (1970, стр. 103).

5.1.1-3. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$. Первая краевая задача.

Рассматривается прямоугольная область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(x, y) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(x, y) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(y, t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(y, t) \quad \text{при} \quad x = l_1 \quad \text{(граничное условие)},\\
w &= g_3(x, t) \quad \text{при} \quad y = 0 \quad \text{(граничное условие)},\\
w &= g_4(x, t) \quad \text{при} \quad y = l_2 \quad \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,y,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} f_0(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\eta\,d\xi + \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} f_1(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\eta\,d\xi +$$
$$+ a^2\int_0^t\int_0^{l_2} g_1(\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\xi=0} d\eta\,d\tau -$$
$$- a^2\int_0^t\int_0^{l_2} g_2(\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\xi=l_1} d\eta\,d\tau +$$
$$+ a^2\int_0^t\int_0^{l_1} g_3(\xi,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\eta=0} d\xi\,d\tau -$$
$$- a^2\int_0^t\int_0^{l_1} g_4(\xi,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\eta=l_2} d\xi\,d\tau,$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta,t) = \frac{4}{al_1l_2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{nm}}\sin(p_nx)\sin(q_my)\sin(p_n\xi)\sin(q_m\eta)\sin(a\lambda_{nm}t),$$
$$p_n = \frac{n\pi}{l_1},\quad q_m = \frac{m\pi}{l_2},\quad \lambda_{nm} = \sqrt{p_n^2+q_m^2}.$$

Задача о колебаниях прямоугольной мембраны со сторонами l_1 и l_2, жестко закрепленной по контуру, характеризуется однородными граничными условиями, $g_s \equiv 0$ ($s = 1, 2, 3, 4$).

⊙ *Литература*: М. М. Смирнов (1964, стр. 111–114), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 572), А. Г. Бутковский (1979, стр. 141).

5.1.1-4. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$. Вторая краевая задача.

Рассматривается прямоугольная область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(x,y) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(x,y) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_x w &= g_1(y,t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_x w &= g_2(y,t) &&\text{при}\quad x=l_1 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_3(x,t) &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_4(x,t) &&\text{при}\quad y=l_2 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,y,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} f_0(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\eta\,d\xi + \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} f_1(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\eta\,d\xi -$$
$$- a^2\int_0^t\int_0^{l_2} g_1(\eta,\tau)G(x,y,0,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau +$$
$$+ a^2\int_0^t\int_0^{l_2} g_2(\eta,\tau)G(x,y,l_1,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau -$$
$$- a^2\int_0^t\int_0^{l_1} g_3(\xi,\tau)G(x,y,\xi,0,t-\tau)\,d\xi\,d\tau +$$
$$+ a^2\int_0^t\int_0^{l_1} g_4(\xi,\tau)G(x,y,\xi,l_2,t-\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta,t) = \frac{t}{l_1l_2} + \frac{2}{al_1l_2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_{nm}}{\lambda_{nm}}\cos(p_nx)\cos(q_my)\cos(p_n\xi)\cos(q_m\eta)\sin(a\lambda_{nm}t),$$
$$p_n = \frac{n\pi}{l_1},\quad q_m = \frac{m\pi}{l_2},\quad \lambda_{nm} = \sqrt{p_n^2+q_m^2},\quad A_{nm} = \begin{cases} 0 & \text{при } n=m=0,\\ 1 & \text{при } n\cdot m = 0\ (n\neq m),\\ 2 & \text{при } n\cdot m\neq 0,\end{cases}$$

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 572), А. Г. Бутковский (1979, стр. 144).

5.1.1-5. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$. Третья краевая задача.

Рассматривается прямоугольная область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(x,y) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(x,y) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_x w - k_1 w &= g_1(y,t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_x w + k_2 w &= g_2(y,t) &&\text{при}\quad x=l_1 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_y w - k_3 w &= g_3(x,t) &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_y w + k_4 w &= g_4(x,t) &&\text{при}\quad y=l_2 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение $w(x,y,t)$ определяется по формуле из разд. 5.1.1-4, где

$$G(x,y,\xi,\eta,t)=\frac{4}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{E_{nm}\sqrt{\mu_n^2+\nu_m^2}}\sin(\mu_n x+\varepsilon_n)\sin(\nu_m y+\sigma_m)\times$$
$$\times\sin(\mu_n\xi+\varepsilon_n)\sin(\nu_m\eta+\sigma_m)\sin\bigl(at\sqrt{\mu_n^2+\nu_m^2}\,\bigr),$$
$$\varepsilon_n=\operatorname{arctg}\frac{\mu_n}{l_1},\quad \sigma_m=\operatorname{arctg}\frac{\nu_m}{l_2},\quad E_{nm}=\left[l_1+\frac{(k_1k_2+\mu_n^2)(k_1+k_2)}{(k_1^2+\mu_n^2)(k_2^2+\mu_n^2)}\right]\left[l_2+\frac{(k_3k_4+\nu_m^2)(k_3+k_4)}{(k_3^2+\nu_m^2)(k_4^2+\nu_m^2)}\right],$$

где μ_n и ν_m — положительные корни трансцендентных уравнений

$$\mu^2-k_1k_2=(k_1+k_2)\mu\operatorname{ctg}(l_1\mu),$$
$$\nu^2-k_3k_4=(k_3+k_4)\nu\operatorname{ctg}(l_2\nu).$$

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 572–573).

5.1.1-6. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$. Смешанные краевые задачи.

1°. Рассматривается прямоугольная область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(x,y) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(x,y) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(y,t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(y,t) &&\text{при}\quad x=l_1 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_3(x,t) &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_4(x,t) &&\text{при}\quad y=l_2 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(x,y,t)={}&\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{l_1}\!\!\int_0^{l_2} f_0(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\eta\,d\xi+\int_0^{l_1}\!\!\int_0^{l_2} f_1(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\eta\,d\xi+\\
&+a^2\int_0^t\!\!\int_0^{l_2} g_1(\eta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=0}d\eta\,d\tau-\\
&-a^2\int_0^t\!\!\int_0^{l_2} g_2(\eta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=l_1}d\eta\,d\tau-\\
&-a^2\int_0^t\!\!\int_0^{l_1} g_3(\xi,\tau)G(x,y,\xi,0,t-\tau)\,d\xi\,d\tau+\\
&+a^2\int_0^t\!\!\int_0^{l_1} g_4(\xi,\tau)G(x,y,\xi,l_2,t-\tau)\,d\xi\,d\tau,
\end{aligned}$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta,t)=\frac{2}{al_1l_2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_m}{\lambda_{nm}}\sin(p_nx)\cos(q_my)\sin(p_n\xi)\cos(q_m\eta)\sin(a\lambda_{nm}t),$$
$$p_n=\frac{n\pi}{l_1},\quad q_m=\frac{m\pi}{l_2},\quad \lambda_{nm}=\sqrt{p_n^2+q_m^2},\quad A_m=\begin{cases}1 & \text{при } m=0,\\ 2 & \text{при } m\neq 0.\end{cases}$$

2°. Рассматривается прямоугольная область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(x,y) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(x,y) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(y,t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_x w &= g_2(y,t) &&\text{при}\quad x=l_1 &&\text{(граничное условие)},\\ w &= g_3(x,t) &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_y w &= g_4(x,t) &&\text{при}\quad y=l_2 &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(x,y,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{l_1}\!\!\int_0^{l_2} f_0(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\eta\,d\xi + \int_0^{l_1}\!\!\int_0^{l_2} f_1(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\eta\,d\xi +\\ &+ a^2\int_0^t\!\!\int_0^{l_2} g_1(\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\xi=0}\,d\eta\,d\tau +\\ &+ a^2\int_0^t\!\!\int_0^{l_2} g_2(\eta,\tau)G(x,y,l_1,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau +\\ &+ a^2\int_0^t\!\!\int_0^{l_1} g_3(\xi,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\eta=0}\,d\xi\,d\tau +\\ &+ a^2\int_0^t\!\!\int_0^{l_1} g_4(\xi,\tau)G(x,y,\xi,l_2,t-\tau)\,d\xi\,d\tau, \end{aligned}$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta,t) = \frac{4}{al_1l_2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{nm}}\sin(p_nx)\sin(q_my)\sin(p_n\xi)\sin(q_m\eta)\sin(a\lambda_{nm}t),$$
$$p_n = \frac{\pi(2n+1)}{2l_1},\quad q_m = \frac{\pi(2m+1)}{2l_2},\quad \lambda_{nm} = \sqrt{p_n^2+q_m^2}.$$

5.1.2. Задачи в полярной системе координат

Волновое уравнение с двумя пространственными переменными в полярной системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\Big),\qquad r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Одномерные решения $w = w(r,t)$, которые не зависят от угловой координаты φ, рассматриваются в разд. 4.2.1.

5.1.2-1. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Первая краевая задача.

Рассматривается круг. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r,\varphi) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(r,\varphi) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ w &= g(\varphi,t) &&\text{при}\quad r=R &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,\varphi,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{R} f_0(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta + \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{R} f_1(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta -\\ &- a^2R\int_0^t\!\!\int_0^{2\pi} g(\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\xi=R}\,d\eta\,d\tau. \end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{1}{\pi aR^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_n}{\mu_{nm}[J_n'(\mu_{nm}R)]^2}J_n(\mu_{nm}r)J_n(\mu_{nm}\xi)\cos[n(\varphi-\eta)]\sin(\mu_{nm}at),$$
$$A_0=1,\quad A_n=2\quad (n=1,\,2,\,\ldots),$$

где $J_n(\xi)$ — функции Бесселя (штрих означает производную по аргументу), μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_n(\mu R) = 0$.

Задача о колебаниях круглой мембраны радиуса R, жестко закрепленной по контуру, характеризуется однородным граничным условием, $g(\varphi, t) \equiv 0$.

⊙ *Литература:* Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов (1970, стр. 214–217), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 573), А. Г. Бутковский (1979, стр. 142).

5.1.2-2. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Вторая краевая задача.

Рассматривается круг. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r, \varphi) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}, \\ \partial_t w &= f_1(r, \varphi) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}, \\ \partial_r w &= g(\varphi, t) && \text{при} \quad r = R && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(r, \varphi, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} \int_0^R f_0(\xi, \eta) G(r, \varphi, \xi, \eta, t) \xi \, d\xi \, d\eta + \int_0^{2\pi} \int_0^R f_1(\xi, \eta) G(r, \varphi, \xi, \eta, t) \xi \, d\xi \, d\eta + {}$$
$$+ a^2 R \int_0^t \int_0^{2\pi} g(\eta, \tau) G(r, \varphi, R, \eta, t - \tau) \, d\eta \, d\tau.$$

Здесь

$$G(r, \varphi, \xi, \eta, t) = \frac{t}{\pi R^2} + \frac{1}{\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_n \mu_{nm} J_n(\mu_{nm} r) J_n(\mu_{nm} \xi)}{(\mu_{nm}^2 R^2 - n^2)[J_n(\mu_{nm} R)]^2} \cos\bigl[n(\varphi - \eta)\bigr] \sin(\mu_{nm} a t),$$
$$A_0 = 1, \quad A_n = 2 \quad (n = 1,\, 2,\, \ldots),$$

где $J_n(\xi)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_n'(\mu R) = 0$.

⊙ *Литература:* Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 573), А. Г. Бутковский (1979, стр. 142).

5.1.2-3. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Третья краевая задача.

Рассматривается круг. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r, \varphi) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}, \\ \partial_t w &= f_1(r, \varphi) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}, \\ \partial_r w + kw &= g(\varphi, t) && \text{при} \quad r = R && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(r, \varphi, t)$ определяется по формуле из разд. 5.1.2-2, где

$$G(r, \varphi, \xi, \eta, t) = \frac{1}{\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_n \mu_{nm} J_n(\mu_{nm} r) J_n(\mu_{nm} \xi)}{(\mu_{nm}^2 R^2 + k^2 R^2 - n^2)[J_n(\mu_{nm} R)]^2} \cos\bigl[n(\varphi - \eta)\bigr] \sin(\mu_{nm} a t),$$
$$A_0 = 1, \quad A_n = 2 \quad (n = 1,\, 2,\, \ldots).$$

Здесь $J_n(\xi)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\mu J_n'(\mu R) + k J_n(\mu R) = 0.$$

5.1.2-4. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Первая краевая задача.

Рассматривается кольцевая область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r, \varphi) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}, \\ \partial_t w &= f_1(r, \varphi) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}, \\ w &= g_1(\varphi, t) && \text{при} \quad r = R_1 && \text{(граничное условие)}, \\ w &= g_2(\varphi, t) && \text{при} \quad r = R_2 && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,\varphi,t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} f_0(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta+\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} f_1(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta+$$
$$+a^2R_1\int_0^t\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=R_1}d\eta\,d\tau-$$
$$-a^2R_2\int_0^t\int_0^{2\pi} g_2(\eta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=R_2}d\eta\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\varphi,\xi,\eta,t)=\frac{\pi}{2a}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_nB_{nm}Z_n(\mu_{nm}r)Z_n(\mu_{nm}\xi)\cos\bigl[n(\varphi-\eta)\bigr]\sin(\mu_{nm}at),$$
$$A_n=\begin{cases}1/2 & \text{при } n=0,\\ 1 & \text{при } n\neq 0,\end{cases}\qquad B_{nm}=\frac{\mu_{nm}J_n^2(\mu_{nm}R_2)}{J_n^2(\mu_{nm}R_1)-J_n^2(\mu_{nm}R_2)},$$
$$Z_n(\mu_{nm}r)=J_n(\mu_{nm}R_1)Y_n(\mu_{nm}r)-Y_n(\mu_{nm}R_1)J_n(\mu_{nm}r),$$

где $J_n(r)$ и $Y_n(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_n(\mu R_1)Y_n(\mu R_2)-Y_n(\mu R_1)J_n(\mu R_2)=0.$$

5.1.2-5. Область: $R_1\leqslant r\leqslant R_2$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$. Вторая краевая задача.

Рассматривается кольцевая область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w&=f_0(r,\varphi) &&\text{при } t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_t w&=f_1(r,\varphi) &&\text{при } t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_r w&=g_1(\varphi,t) &&\text{при } r=R_1 &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_r w&=g_2(\varphi,t) &&\text{при } r=R_2 &&\text{(граничное условие)}.\end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,\varphi,t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} f_0(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta+\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} f_1(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta-$$
$$-a^2R_1\int_0^t\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\tau)G(r,\varphi,R_1,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau+$$
$$+a^2R_2\int_0^t\int_0^{2\pi} g_2(\eta,\tau)G(r,\varphi,R_2,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\varphi,\xi,\eta,t)=\frac{t}{\pi(R_2^2-R_1^2)}+\frac{1}{\pi a}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_n\mu_{nm}Z_n(\mu_{nm}r)Z_n(\mu_{nm}\xi)\cos\bigl[n(\varphi-\eta)\bigr]\sin(\mu_{nm}at)}{(\mu_{nm}^2R_2^2-n^2)Z_n^2(\mu_{nm}R_2)-(\mu_{nm}^2R_1^2-n^2)Z_n^2(\mu_{nm}R_1)},$$
$$Z_n(\mu_{nm}r)=J_n'(\mu_{nm}R_1)Y_n(\mu_{nm}r)-Y_n'(\mu_{nm}R_1)J_n(\mu_{nm}r),$$

где $A_0=1$, $A_n=2$ при $n=1,\ 2,\ \ldots$; $J_n(r)$ и $Y_n(r)$ — функции Бесселя; μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_n'(\mu R_1)Y_n'(\mu R_2)-Y_n'(\mu R_1)J_n'(\mu R_2)=0.$$

5.1.2-6. Область: $R_1\leqslant r\leqslant R_2$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$. Третья краевая задача.

Рассматривается кольцевая область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w&=f_0(r,\varphi) &&\text{при } t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_t w&=f_1(r,\varphi) &&\text{при } t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_r w-k_1w&=g_1(\varphi,t) &&\text{при } r=R_1 &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_r w+k_2w&=g_2(\varphi,t) &&\text{при } r=R_2 &&\text{(граничное условие)}.\end{aligned}$$

Решение $w(r,\varphi,t)$ определяется по формуле из разд. 5.1.2-5, где

$$G(r,\varphi,\xi,\eta,t)=\frac{1}{\pi a}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_n\mu_{nm}Z_n(\mu_{nm}r)Z_n(\mu_{nm}\xi)\cos[n(\varphi-\eta)]\sin(\mu_{nm}at)}{(k_2^2R_2^2+\mu_{nm}^2R_2^2-n^2)Z_n^2(\mu_{nm}R_2)-(k_1^2R_1^2+\mu_{nm}^2R_1^2-n^2)Z_n^2(\mu_{nm}R_1)},$$

$$Z_n(\mu_{nm}r)=\left[\mu_{nm}J_n'(\mu_{nm}R_1)-k_1J_n(\mu_{nm}R_1)\right]Y_n(\mu_{nm}r)-$$
$$-\left[\mu_{nm}Y_n'(\mu_{nm}R_1)-k_1Y_n(\mu_{nm}R_1)\right]J_n(\mu_{nm}r).$$

Здесь $A_0=1$, $A_n=2$ при $n=1,2,\ldots$; $J_n(r)$ и $Y_n(r)$ — функции Бесселя; μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\left[\mu J_n'(\mu R_1)-k_1J_n(\mu R_1)\right]\left[\mu Y_n'(\mu R_2)+k_2Y_n(\mu R_2)\right]=$$
$$=\left[\mu Y_n'(\mu R_1)-k_1Y_n(\mu R_1)\right]\left[\mu J_n'(\mu R_2)+k_2J_n(\mu R_2)\right].$$

5.1.2-7. Область: $0\leqslant r\leqslant R$, $0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0$. Первая краевая задача.

Рассматривается сектор круга. Заданы следующие условия:

$$\begin{array}{llll} w=f_0(r,\varphi) & \text{при} & t=0 & \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w=f_1(r,\varphi) & \text{при} & t=0 & \text{(начальное условие)},\\ w=g_1(\varphi,t) & \text{при} & r=R & \text{(граничное условие)},\\ w=g_2(r,t) & \text{при} & \varphi=0 & \text{(граничное условие)},\\ w=g_3(r,t) & \text{при} & \varphi=\varphi_0 & \text{(граничное условие)}. \end{array}$$

Решение:

$$w(r,\varphi,t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\varphi_0}\!\!\int_0^R f_0(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta+\int_0^{\varphi_0}\!\!\int_0^R f_1(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta-$$
$$-a^2R\int_0^t\!\!\int_0^{\varphi_0} g_1(\eta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\right]_{\xi=R}d\eta\,d\tau+$$
$$+a^2\int_0^t\!\!\int_0^R g_2(\xi,\tau)\frac{1}{\xi}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\right]_{\eta=0}d\xi\,d\tau-$$
$$-a^2\int_0^t\!\!\int_0^R g_3(\xi,\tau)\frac{1}{\xi}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\right]_{\eta=\varphi_0}d\xi\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\varphi,\xi,\eta,t)=\frac{4}{aR^2\varphi_0}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}r)J_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}\xi)}{\mu_{nm}[J_{n\pi/\varphi_0}'(\mu_{nm}R)]^2}\sin\left(\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\right)\sin\left(\frac{n\pi\eta}{\varphi_0}\right)\sin(\mu_{nm}at),$$

где $J_{n\pi/\varphi_0}(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_{n\pi/\varphi_0}(\mu R)=0$.

5.1.2-8. Область: $0\leqslant r\leqslant R$, $0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0$. Вторая краевая задача.

Рассматривается сектор круга. Заданы следующие условия:

$$\begin{array}{llll} w=f_0(r,\varphi) & \text{при} & t=0 & \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w=f_1(r,\varphi) & \text{при} & t=0 & \text{(начальное условие)},\\ \partial_r w=g_1(\varphi,t) & \text{при} & r=R & \text{(граничное условие)},\\ r^{-1}\partial_\varphi w=g_2(r,t) & \text{при} & \varphi=0 & \text{(граничное условие)},\\ r^{-1}\partial_\varphi w=g_3(r,t) & \text{при} & \varphi=\varphi_0 & \text{(граничное условие)}. \end{array}$$

Решение:

$$w(r,\varphi,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\varphi_0}\int_0^R f_0(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta + \int_0^{\varphi_0}\int_0^R f_1(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta +$$
$$+ a^2 R\int_0^t\int_0^{\varphi_0} g_1(\eta,\tau)G(r,\varphi,R,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau -$$
$$- a^2\int_0^t\int_0^R g_2(\xi,\tau)G(r,\varphi,\xi,0,t-\tau)\,d\xi\,d\tau +$$
$$+ a^2\int_0^t\int_0^R g_3(\xi,\tau)G(r,\varphi,\xi,\varphi_0,t-\tau)\,d\xi\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{2t}{R^2\varphi_0} + \frac{4\varphi_0}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu_{nm}J_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}r)J_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}\xi)}{(R^2\varphi_0^2\mu_{nm}^2 - n^2\pi^2)\left[J_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}R)\right]^2}\times$$
$$\times\cos\left(\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\right)\cos\left(\frac{n\pi\eta}{\varphi_0}\right)\sin(\mu_{nm}at),$$

где $J_{n\pi/\varphi_0}(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J'_{n\pi/\varphi_0}(\mu R) = 0$.

5.1.2-9. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$. Смешанная краевая задача.

Рассматривается сектор круга. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r,\varphi) && \text{при}\quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(r,\varphi) && \text{при}\quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_r w - kw &= g(\varphi,t) && \text{при}\quad r=R && \text{(граничное условие)},\\ \partial_\varphi w &= 0 && \text{при}\quad \varphi=0 && \text{(граничное условие)},\\ \partial_\varphi w &= 0 && \text{при}\quad \varphi=\varphi_0 && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,\varphi,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\varphi_0}\int_0^R f_0(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta + \int_0^{\varphi_0}\int_0^R f_1(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta +$$
$$+ a^2 R\int_0^t\int_0^{\varphi_0} g(\eta,\tau)G(r,\varphi,R,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}J_{s_n}(\mu_{nm}r)J_{s_n}(\mu_{nm}\xi)\cos(s_n\varphi)\cos(s_n\eta)\sin(\mu_{nm}at),$$
$$s_n = \frac{n\pi}{\varphi_0},\qquad A_{nm} = \frac{4\mu_{nm}}{a\varphi_0(\mu_{nm}^2R^2 + k^2R^2 - s_n^2)\left[J_{s_n}(\mu_{nm}R)\right]^2},$$

где $J_{s_n}(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\mu J'_{s_n}(\mu R) + kJ_{s_n}(\mu R) = 0.$$

5.1.3. Осесимметричные задачи

В осесимметричном случае волновое уравнение в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right),\qquad r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Одномерные задачи с осевой симметрией, имеющие решения $w = w(r,t)$, рассматриваются в разд. 4.2.1.

В решениях рассматриваемых ниже задач для удобства использована модифицированная функция Грина $\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t) = 2\pi\xi G(r,z,\xi,\eta,t)$.

5.1.3-1. Область: $0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant z \leqslant l$. Первая краевая задача.

Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f_0(r,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(z,t) && \text{при} \quad r=R && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(r,t) && \text{при} \quad z=0 && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_3(r,t) && \text{при} \quad z=l && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(r,z,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\!\int_0^R f_0(\xi,\eta)\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta + \int_0^l\!\int_0^R f_1(\xi,\eta)\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta\, -\\
- a^2\int_0^t\!\int_0^l g_1(\eta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=R}\,d\eta\,d\tau\, +\\
+ a^2\int_0^t\!\int_0^R g_2(\xi,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta}\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\Bigr]_{\eta=0}\,d\xi\,d\tau\, -\\
- a^2\int_0^t\!\int_0^R g_3(\xi,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta}\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\Bigr]_{\eta=l}\,d\xi\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t) = \frac{4\xi}{R^2 l}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{J_1^2(\mu_n)}J_0\Bigl(\frac{\mu_n r}{R}\Bigr)J_0\Bigl(\frac{\mu_n\xi}{R}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{m\pi z}{l}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{m\pi\eta}{l}\Bigr)\frac{\sin\bigl(at\sqrt{\lambda_{nm}}\bigr)}{a\sqrt{\lambda_{nm}}},
$$

$$
\lambda_{nm} = \frac{\mu_n^2}{R^2} + \frac{\pi^2 m^2}{l^2},
$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $J_0(\mu) = 0$.

5.1.3-2. Область: $0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant z \leqslant l$. Вторая краевая задача.

Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f_0(r,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_r w &= g_1(z,t) && \text{при} \quad r=R && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_2(r,t) && \text{при} \quad z=0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_3(r,t) && \text{при} \quad z=l && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(r,z,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\!\int_0^R f_0(\xi,\eta)\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta + \int_0^l\!\int_0^R f_1(\xi,\eta)\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta\, +\\
+ a^2\int_0^t\!\int_0^l g_1(\eta,\tau)\mathcal{G}(r,z,R,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau\, -\\
- a^2\int_0^t\!\int_0^R g_2(\xi,\tau)\mathcal{G}(r,z,\xi,0,t-\tau)\,d\xi\,d\tau\, +\\
+ a^2\int_0^t\!\int_0^R g_3(\xi,\tau)\mathcal{G}(r,z,\xi,l,t-\tau)\,d\xi\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t) = \frac{2t\xi}{R^2 l} + \frac{2\xi}{R^2 l}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_{nm}}{J_0^2(\mu_n)}J_0\Bigl(\frac{\mu_n r}{R}\Bigr)J_0\Bigl(\frac{\mu_n\xi}{R}\Bigr)\times\\
\times\cos\Bigl(\frac{m\pi z}{l}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{m\pi\eta}{l}\Bigr)\frac{\sin\bigl(at\sqrt{\lambda_{nm}}\bigr)}{a\sqrt{\lambda_{nm}}},
\end{aligned}
$$

$$
\lambda_{nm} = \frac{\mu_n^2}{R^2} + \frac{\pi^2 m^2}{l^2}, \qquad A_{nm} = \begin{cases} 0 & \text{при } m=0,\ n=0,\\ 1 & \text{при } m=0,\ n>0,\\ 2 & \text{при } m>0,\end{cases}
$$

где μ_n — корни трансцендентного уравнения $J_1(\mu) = 0$ $(\mu_0 = 0)$.

5.1.3-3. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Третья краевая задача.

Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(r,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_r w - k_1 w &= g_1(z,t) &&\text{при}\quad r=R &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w - k_2 w &= g_2(r,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w + k_3 w &= g_3(r,t) &&\text{при}\quad z=l &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение $w(r,z,t)$ определяется по формуле из разд. 5.1.3-2, где

$$\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t) = \frac{2\xi}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2}{(k_1^2R^2+\mu_n^2)J_0^2(\mu_n)}J_0\Bigl(\frac{\mu_n r}{R}\Bigr)J_0\Bigl(\frac{\mu_n\xi}{R}\Bigr)\frac{\varphi_m(z)\varphi_m(\eta)}{\|\varphi_m\|^2}\,\frac{\sin\bigl(at\sqrt{\lambda_{nm}}\bigr)}{a\sqrt{\lambda_{nm}}},$$

$$\lambda_{nm} = \frac{\mu_n^2}{R^2}+\beta_m^2,\qquad \varphi_m(z)=\cos(\beta_m z)+\frac{k_2}{\beta_m}\sin(\beta_m z),$$

$$\|\varphi_m\|^2 = \frac{k_3}{2\beta_m^2}\,\frac{\beta_m^2+k_2^2}{\beta_m^2+k_3^2}+\frac{k_2}{2\beta_m^2}+\frac{l}{2}\Bigl(1+\frac{k_2^2}{\beta_m^2}\Bigr).$$

Здесь μ_n и β_m — положительные корни трансцендентных уравнений

$$\mu J_1(\mu) - k_1 R J_0(\mu) = 0,\qquad \frac{\operatorname{tg}(\beta l)}{\beta} = \frac{k_2+k_3}{\beta^2-k_2k_3}.$$

5.1.3-4. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Смешанные краевые задачи.

1°. Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(r,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(z,t) &&\text{при}\quad r=R &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_2(r,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_3(r,t) &&\text{при}\quad z=l &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(r,z,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\!\!\int_0^R f_0(\xi,\eta)\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta + \int_0^l\!\!\int_0^R f_1(\xi,\eta)\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta\,-\\
&\quad - a^2\int_0^t\!\!\int_0^l g_1(\eta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=R}d\eta\,d\tau\,-\\
&\quad - a^2\int_0^t\!\!\int_0^R g_2(\xi,\tau)\mathcal{G}(r,z,\xi,0,t-\tau)\,d\xi\,d\tau\,+\\
&\quad + a^2\int_0^t\!\!\int_0^R g_3(\xi,\tau)\mathcal{G}(r,z,\xi,l,t-\tau)\,d\xi\,d\tau.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t) = \frac{2\xi}{R^2 l}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_m}{J_1^2(\mu_n)}J_0\Bigl(\frac{\mu_n r}{R}\Bigr)J_0\Bigl(\frac{\mu_n\xi}{R}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{m\pi z}{l}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{m\pi\eta}{l}\Bigr)\frac{\sin\bigl(at\sqrt{\lambda_{nm}}\bigr)}{a\sqrt{\lambda_{nm}}},$$

$$\lambda_{nm} = \frac{\mu_n^2}{R^2}+\frac{\pi^2m^2}{l^2},\qquad A_m = \begin{cases}1 & \text{при}\ m=0,\\ 2 & \text{при}\ m>0,\end{cases}$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $J_0(\mu)=0$.

2°. Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(r,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_r w &= g_1(z,t) &&\text{при}\quad r=R &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(r,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_3(r,t) &&\text{при}\quad z=l &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,z,t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\int_0^R f_0(\xi,\eta)\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta+\int_0^l\int_0^R f_1(\xi,\eta)\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta+$$
$$+a^2\int_0^t\int_0^l g_1(\eta,\tau)\mathcal{G}(r,z,R,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau+$$
$$+a^2\int_0^t\int_0^R g_2(\xi,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\eta=0}\,d\xi\,d\tau-$$
$$-a^2\int_0^t\int_0^R g_3(\xi,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\eta=l}\,d\xi\,d\tau.$$

Здесь

$$\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t)=\frac{4\xi}{R^2l}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{J_0^2(\mu_n)}J_0\Big(\frac{\mu_n r}{R}\Big)J_0\Big(\frac{\mu_n\xi}{R}\Big)\sin\Big(\frac{m\pi z}{l}\Big)\sin\Big(\frac{m\pi\eta}{l}\Big)\frac{\sin\big(at\sqrt{\lambda_{nm}}\big)}{a\sqrt{\lambda_{nm}}},$$
$$\lambda_{nm}=\frac{\mu_n^2}{R^2}+\frac{\pi^2m^2}{l^2},$$

где μ_n — корни трансцендентного уравнения $J_1(\mu)=0$ $(\mu_0=0)$.

5.1.3-5. Область: $R_1\leqslant r\leqslant R_2$, $0\leqslant z\leqslant l$. Первая краевая задача.

Рассматривается полый круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w&=f_0(r,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w&=f_1(r,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
w&=g_1(z,t) &&\text{при}\quad r=R_1 &&\text{(граничное условие)},\\
w&=g_2(z,t) &&\text{при}\quad r=R_2 &&\text{(граничное условие)},\\
w&=g_3(r,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\
w&=g_4(r,t) &&\text{при}\quad z=l &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,z,t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\int_{R_1}^{R_2} f_0(\xi,\eta)\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta+\int_0^l\int_{R_1}^{R_2} f_1(\xi,\eta)\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta+$$
$$+a^2\int_0^t\int_0^l g_1(\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\xi=R_1}\,d\eta\,d\tau-$$
$$-a^2\int_0^t\int_0^l g_2(\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\xi=R_2}\,d\eta\,d\tau+$$
$$+a^2\int_0^t\int_{R_1}^{R_2} g_3(\xi,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\eta=0}\,d\xi\,d\tau-$$
$$-a^2\int_0^t\int_{R_1}^{R_2} g_4(\xi,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\eta=l}\,d\xi\,d\tau.$$

Здесь

$$\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t)=\frac{\pi^2\xi}{R_1^2l}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2J_0^2(s\mu_n)}{J_0^2(\mu_n)-J_0^2(s\mu_n)}\Psi_n(r)\Psi_n(\xi)\sin\Big(\frac{m\pi z}{l}\Big)\sin\Big(\frac{m\pi\eta}{l}\Big)\frac{\sin\big(at\sqrt{\lambda_{nm}}\big)}{a\sqrt{\lambda_{nm}}},$$
$$\Psi_n(r)=Y_0(\mu_n)J_0\Big(\frac{\mu_n r}{R_1}\Big)-J_0(\mu_n)Y_0\Big(\frac{\mu_n r}{R_1}\Big),\quad s=\frac{R_2}{R_1},\quad \lambda_{nm}=\frac{\mu_n^2}{R_1^2}+\frac{\pi^2m^2}{l^2},$$

где $J_0(\mu)$ и $Y_0(\mu)$ — функции Бесселя, μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_0(\mu)Y_0(s\mu)-J_0(s\mu)Y_0(\mu)=0.$$

5.1.3-6. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Вторая краевая задача.

Рассматривается полый круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$
\begin{array}{lll}
w = f_0(r,z) & \text{при} \quad t = 0 & \text{(начальное условие)}, \\
\partial_t w = f_1(r,z) & \text{при} \quad t = 0 & \text{(начальное условие)}, \\
\partial_r w = g_1(z,t) & \text{при} \quad r = R_1 & \text{(граничное условие)}, \\
\partial_r w = g_2(z,t) & \text{при} \quad r = R_2 & \text{(граничное условие)}, \\
\partial_z w = g_3(r,t) & \text{при} \quad z = 0 & \text{(граничное условие)}, \\
\partial_z w = g_4(r,t) & \text{при} \quad z = l & \text{(граничное условие)}.
\end{array}
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(r,z,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\int_{R_1}^{R_2} f_0(\xi,\eta)\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta + \int_0^l\int_{R_1}^{R_2} f_1(\xi,\eta)\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta - \\
- a^2\int_0^t\int_0^l g_1(\eta,\tau)\mathcal{G}(r,z,R_1,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau + \\
+ a^2\int_0^t\int_0^l g_2(\eta,\tau)\mathcal{G}(r,z,R_2,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau - \\
- a^2\int_0^t\int_{R_1}^{R_2} g_3(\xi,\tau)\mathcal{G}(r,z,\xi,0,t-\tau)\,d\xi\,d\tau + \\
+ a^2\int_0^t\int_{R_1}^{R_2} g_4(\xi,\tau)\mathcal{G}(r,z,\xi,l,t-\tau)\,d\xi\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t) = \frac{2t\xi}{(R_2^2-R_1^2)l} + \frac{4\xi}{\pi a(R_2^2-R_1^2)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\cos\Bigl(\frac{m\pi z}{l}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{m\pi\eta}{l}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{m\pi at}{l}\Bigr) + \\
+ \frac{\pi^2\xi}{2R_1^2 l}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_m\mu_n^2 J_1^2(s\mu_n)}{J_1^2(\mu_n)-J_1^2(s\mu_n)}\Psi_n(r)\Psi_n(\xi)\cos\Bigl(\frac{m\pi z}{l}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{m\pi\eta}{l}\Bigr)\frac{\sin\bigl(at\sqrt{\lambda_{nm}}\bigr)}{a\sqrt{\lambda_{nm}}},
\end{aligned}
$$

где

$$
\Psi_n(r) = Y_1(\mu_n)J_0\Bigl(\frac{\mu_n r}{R_1}\Bigr) - J_1(\mu_n)Y_0\Bigl(\frac{\mu_n r}{R_1}\Bigr), \qquad s = \frac{R_2}{R_1},
$$

$$
A_m = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad m = 0, \\ 2 & \text{при} \quad m > 1, \end{cases} \qquad \lambda_{nm} = \frac{\mu_n^2}{R_1^2} + \frac{\pi^2 m^2}{l^2};
$$

$J_k(\mu)$ и $Y_k(\mu)$ — функции Бесселя ($k = 0,\ 1$); μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$
J_1(\mu)Y_1(s\mu) - J_1(s\mu)Y_1(\mu) = 0.
$$

5.2. Неоднородное волновое уравнение $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\Delta_2 w + \Phi(x,y,t)$

5.2.1. Задачи в декартовой системе координат

5.2.1-1. Область: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$. Задача Коши.

Заданы начальные условия:

$$
\begin{array}{lll}
w = f(x,y) & \text{при} \quad t = 0, \\
\partial_t w = g(x,y) & \text{при} \quad t = 0.
\end{array}
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{\rho\leqslant at}\frac{f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{a^2t^2-\rho^2}} + \frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{\rho\leqslant at}\frac{g(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{a^2t^2-\rho^2}} + \\
+ \frac{1}{2\pi a}\int_0^t\Biggl[\iint\limits_{\rho\leqslant a(t-\tau)}\frac{\Phi(\xi,\eta,\tau)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-\rho^2}}\Biggr]d\tau, \qquad \rho^2 = (\xi-x)^2 + (\eta-y)^2.
\end{aligned}
$$

⊙ *Литература*: Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов (1970, стр. 107).

5.2.1-2. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$. Первая краевая задача.

Рассматривается прямоугольная область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(x,y) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(x,y) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(y,t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(y,t) &&\text{при}\quad x=l_1 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_3(x,t) &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_4(x,t) &&\text{при}\quad y=l_2 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение $w(x,y,t)$ дается формулой из разд. 5.1.1-3 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \Phi(\xi,\eta,\tau) G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\, d\eta\, d\xi\, d\tau,$$

которое учитывает неоднородность уравнения (это слагаемое является решением неоднородного уравнения с однородными начальными и граничными условиями).

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 572), А. Г. Бутковский (1979, стр. 141).

5.2.1-3. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$. Вторая краевая задача.

Рассматривается прямоугольная область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_1(x,y) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_2(x,y) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_x w &= g_1(y,t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_x w &= g_2(y,t) &&\text{при}\quad x=l_1 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_3(x,t) &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_4(x,t) &&\text{при}\quad y=l_2 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение $w(x,y,t)$ дается формулой из разд. 5.1.1-4 с дополнительным слагаемым, указанным в разд. 5.2.1-2 (функция Грина берется из разд. 5.1.1-4).

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 572), А. Г. Бутковский (1979, стр. 144).

5.2.1-4. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$. Третья краевая задача.

Рассматривается прямоугольная область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_1(x,y) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_2(x,y) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_x w - k_1 w &= g_1(y,t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_x w + k_2 w &= g_2(y,t) &&\text{при}\quad x=l_1 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_y w - k_3 w &= g_3(x,t) &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_y w + k_4 w &= g_4(x,t) &&\text{при}\quad y=l_2 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение $w(x,y,t)$ является суммой решения однородного уравнения с неоднородными начальными и граничными условиями (см. разд. 5.1.1-5) и решения неоднородного уравнения с однородными начальными и граничными условиями (это решение дается формулой из разд. 5.2.1-2, в которую следует подставить функцию Грина из разд. 5.1.1-5).

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 572–573), А. Г. Бутковский (1979, стр. 140–141).

5.2.1-5. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$. Смешанные краевые задачи.

1°. Рассматривается прямоугольная область. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f_1(x,y) \quad &&\text{при} \quad t=0 \quad &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_2(x,y) \quad &&\text{при} \quad t=0 \quad &&\text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(y,t) \quad &&\text{при} \quad x=0 \quad &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(y,t) \quad &&\text{при} \quad x=l_1 \quad &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_3(x,t) \quad &&\text{при} \quad y=0 \quad &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_4(x,t) \quad &&\text{при} \quad y=l_2 \quad &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение $w(x,y,t)$ дается формулой из разд. 5.1.1-6, п. 1° с дополнительным слагаемым, указанным в разд. 5.2.1-2.

2°. Рассматривается прямоугольная область. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f_1(x,y) \quad &&\text{при} \quad t=0 \quad &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_2(x,y) \quad &&\text{при} \quad t=0 \quad &&\text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(y,t) \quad &&\text{при} \quad x=0 \quad &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_x w &= g_2(y,t) \quad &&\text{при} \quad x=l_1 \quad &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_3(x,t) \quad &&\text{при} \quad y=0 \quad &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_4(x,t) \quad &&\text{при} \quad y=l_2 \quad &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение $w(x,y,t)$ дается формулой из разд. 5.1.1-6, п. 2°, с дополнительным слагаемым, указанным в разд. 5.2.1-2.

5.2.2. Задачи в полярной системе координат

Неоднородное волновое уравнение в полярной системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right) + \Phi(r,\varphi,t), \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Одномерные краевые задачи, которые не зависят от угловой координаты φ, рассматриваются в разд. 4.2.2.

5.2.2-1. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Первая краевая задача.

Рассматривается круг. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f_0(r,\varphi) \quad &&\text{при} \quad t=0 \quad &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,\varphi) \quad &&\text{при} \quad t=0 \quad &&\text{(начальное условие)},\\
w &= g(\varphi,t) \quad &&\text{при} \quad r=R \quad &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение $w(r,\varphi,t)$ дается формулой из разд. 5.1.2-1 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^R \Phi(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau, \tag{1}$$

которое учитывает неоднородность уравнения (это слагаемое является решением неоднородного уравнения с однородными начальными и граничными условиями).

⊙ *Литература*: Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов (1970, стр. 214–217), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 573), А. Г. Бутковский (1979, стр. 142).

5.2.2-2. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Вторая краевая задача.

Рассматривается круг. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f_0(r,\varphi) \quad &&\text{при} \quad t=0 \quad &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,\varphi) \quad &&\text{при} \quad t=0 \quad &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_r w &= g(\varphi,t) \quad &&\text{при} \quad r=R \quad &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение $w(r,\varphi,t)$ дается формулой из разд. 5.1.2-2 с дополнительным слагаемым (1).

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 573), А. Г. Бутковский (1979, стр. 142).

5.2.2-3. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Третья краевая задача.

Рассматривается круг. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r,\varphi) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(r,\varphi) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_r w + kw &= g(\varphi,t) &&\text{при}\quad r=R &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(r,\varphi,t)$ является суммой решения однородного уравнения с неоднородными начальными и граничными условиями (см. разд. 5.1.2-3) и решения неоднородного уравнения с однородными начальными и граничными условиями [это решение дается формулой (1), в которую следует подставить функцию Грина из разд. 5.1.2-3].

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 573), А. Г. Бутковский (1979, стр. 142–143).

5.2.2-4. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Первая краевая задача.

Рассматривается кольцевая область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r,\varphi) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(r,\varphi) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(\varphi,t) &&\text{при}\quad r=R_1 &&\text{(граничное условие)},\\ w &= g_2(\varphi,t) &&\text{при}\quad r=R_2 &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(r,\varphi,t)$ дается формулой из разд. 5.1.2-4 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \Phi(\xi,\eta,\tau) G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\xi \, d\xi \, d\eta \, d\tau, \tag{2}$$

которое учитывает неоднородность уравнения (это слагаемое является решением неоднородного уравнения с однородными начальными и граничными условиями).

5.2.2-5. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Вторая краевая задача.

Рассматривается кольцевая область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r,\varphi) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(r,\varphi) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_r w &= g_1(\varphi,t) &&\text{при}\quad r=R_1 &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_r w &= g_2(\varphi,t) &&\text{при}\quad r=R_2 &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(r,\varphi,t)$ дается формулой из разд. 5.1.2-5 с дополнительным слагаемым (2).

5.2.2-6. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Третья краевая задача.

Рассматривается кольцевая область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r,\varphi) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(r,\varphi) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_r w - k_1 w &= g_1(\varphi,t) &&\text{при}\quad r=R_1 &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_r w + k_2 w &= g_2(\varphi,t) &&\text{при}\quad r=R_2 &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(r,\varphi,t)$ является суммой решения однородного уравнения с неоднородными начальными и граничными условиями (см. разд. 5.1.2-6) и решения неоднородного уравнения с однородными начальными и граничными условиями [это решение дается формулой (2), в которую следует подставить функцию Грина из разд. 5.1.2-6].

5.2.2-7. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$. Первая краевая задача.

Рассматривается сектор круга. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r,\varphi) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}, \\ \partial_t w &= f_1(r,\varphi) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}, \\ w &= g_1(\varphi,t) && \text{при} \quad r = R && \text{(граничное условие)}, \\ w &= g_2(r,t) && \text{при} \quad \varphi = 0 && \text{(граничное условие)}, \\ w &= g_3(r,t) && \text{при} \quad \varphi = \varphi_0 && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(r,\varphi,t)$ дается формулой из разд. 5.1.2-7 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t \int_0^{\varphi_0} \int_0^R \Phi(\xi,\eta,\tau) G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\xi \, d\xi \, d\eta \, d\tau, \tag{3}$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

5.2.2-8. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$. Вторая краевая задача.

Рассматривается сектор круга. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r,\varphi) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}, \\ \partial_t w &= f_1(r,\varphi) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}, \\ \partial_r w &= g_1(\varphi,t) && \text{при} \quad r = R && \text{(граничное условие)}, \\ r^{-1}\partial_\varphi w &= g_2(r,t) && \text{при} \quad \varphi = 0 && \text{(граничное условие)}, \\ r^{-1}\partial_\varphi w &= g_3(r,t) && \text{при} \quad \varphi = \varphi_0 && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(r,\varphi,t)$ дается формулой из разд. 5.1.2-8 с дополнительным слагаемым (3).

5.2.2-9. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$. Смешанная краевая задача.

Рассматривается сектор круга. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r,\varphi) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}, \\ \partial_t w &= f_1(r,\varphi) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}, \\ \partial_r w - kw &= g(\varphi,t) && \text{при} \quad r = R && \text{(граничное условие)}, \\ \partial_\varphi w &= 0 && \text{при} \quad \varphi = 0 && \text{(граничное условие)}, \\ \partial_\varphi w &= 0 && \text{при} \quad \varphi = \varphi_0 && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(r,\varphi,t)$ дается формулой из разд. 5.1.2-9 с дополнительным слагаемым (3).

5.2.3. Осесимметричные задачи

В осесимметричном случае неоднородное волновое уравнение в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \Phi(r,z,t), \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

5.2.3-1. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Первая краевая задача.

Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r,z) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}, \\ \partial_t w &= f_1(r,z) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}, \\ w &= g_1(z,t) && \text{при} \quad r = R && \text{(граничное условие)}, \\ w &= g_2(r,t) && \text{при} \quad z = 0 && \text{(граничное условие)}, \\ w &= g_3(r,t) && \text{при} \quad z = l && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(r,z,t)$ дается формулой из разд. 5.1.3-1 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t \int_0^l \int_0^R \Phi(\xi,\eta,\tau)\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\, d\xi \, d\eta \, d\tau, \tag{1}$$

которое учитывает неоднородность уравнения (это слагаемое является решением неоднородного уравнения с однородными начальными и граничными условиями).

5.2.3-2. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Вторая краевая задача.

Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)}, \\ \partial_t w &= f_1(r,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)}, \\ \partial_r w &= g_1(z,t) && \text{при} \quad r=R && \text{(граничное условие)}, \\ \partial_z w &= g_2(r,t) && \text{при} \quad z=0 && \text{(граничное условие)}, \\ \partial_z w &= g_3(r,t) && \text{при} \quad z=l && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(r,z,t)$ дается формулой из разд. 5.1.3-2 с дополнительным слагаемым (1).

5.2.3-3. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Третья краевая задача.

Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)}, \\ \partial_t w &= f_1(r,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)}, \\ \partial_r w - k_1 w &= g_1(z,t) && \text{при} \quad r=R && \text{(граничное условие)}, \\ \partial_z w - k_2 w &= g_2(r,t) && \text{при} \quad z=0 && \text{(граничное условие)}, \\ \partial_z w + k_3 w &= g_3(r,t) && \text{при} \quad z=l && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(r,z,t)$ является суммой решения однородного уравнения с неоднородными начальными и граничными условиями (см. разд. 5.1.3-3) и решения неоднородного уравнения с однородными начальными и граничными условиями [это решение дается формулой (1), в которую следует подставить функцию Грина из разд. 5.1.3-3].

5.2.3-4. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Смешанные краевые задачи.

1°. Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)}, \\ \partial_t w &= f_1(r,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)}, \\ w &= g_1(z,t) && \text{при} \quad r=R && \text{(граничное условие)}, \\ \partial_z w &= g_2(r,t) && \text{при} \quad z=0 && \text{(граничное условие)}, \\ \partial_z w &= g_3(r,t) && \text{при} \quad z=l && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(r,z,t)$ дается формулой из разд. 5.1.3-4 (см. п. 1°) с дополнительным слагаемым (1).

2°. Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)}, \\ \partial_t w &= f_1(r,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)}, \\ \partial_r w &= g_1(z,t) && \text{при} \quad r=R && \text{(граничное условие)}, \\ w &= g_2(r,t) && \text{при} \quad z=0 && \text{(граничное условие)}, \\ w &= g_3(r,t) && \text{при} \quad z=l && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(r,z,t)$ дается формулой из разд. 5.1.3-4 (см. п. 2°) с дополнительным слагаемым (1).

5.2.3-5. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Первая краевая задача.

Рассматривается полый круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)}, \\ \partial_t w &= f_1(r,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)}, \\ w &= g_1(z,t) && \text{при} \quad r=R_1 && \text{(граничное условие)}, \\ w &= g_2(z,t) && \text{при} \quad r=R_2 && \text{(граничное условие)}, \\ w &= g_3(r,t) && \text{при} \quad z=0 && \text{(граничное условие)}, \\ w &= g_4(r,t) && \text{при} \quad z=l && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(r,z,t)$ дается формулой из разд. 5.1.3-5 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t \int_0^l \int_{R_1}^{R_2} \Phi(\xi,\eta,\tau)\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau, \tag{2}$$

которое учитывает неоднородность уравнения (это слагаемое является решением неоднородного уравнения с однородными начальными и граничными условиями).

5.2.3-6. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Вторая краевая задача.

Рассматривается полый круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(r,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_r w &= g_1(z,t) &&\text{при}\quad r=R_1 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_r w &= g_2(z,t) &&\text{при}\quad r=R_2 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_3(r,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_4(r,t) &&\text{при}\quad z=l &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение $w(r,z,t)$ дается формулой из разд. 5.1.3-6 с дополнительным слагаемым (2).

5.3. Уравнение вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\Delta_2 w - bw + \Phi(x,y,t)$

5.3.1. Задачи в декартовой системе координат

Двумерное неоднородное уравнение Клейна—Гордона с двумя пространственными переменными в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - bw + \Phi(x,y,t).$$

5.3.1-1. Фундаментальные решения.

1°. Случай $b = -\sigma^2 < 0$:

$$\mathscr{E}(x,y,t) = \frac{\vartheta(at-r)}{2\pi a^2}\frac{\operatorname{ch}\left(\sigma\sqrt{t^2-r^2/a^2}\right)}{\sqrt{t^2-r^2/a^2}}, \qquad r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

2°. Случай $b = \sigma^2 > 0$:

$$\mathscr{E}(x,y,t) = \frac{\vartheta(at-r)}{2\pi a^2}\frac{\cos\left(\sigma\sqrt{t^2-r^2/a^2}\right)}{\sqrt{t^2-r^2/a^2}}, \qquad r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 124, 572), В. С. Владимиров, В. П. Михайлов, А. А. Вашарин и др. (1974, стр. 122).

5.3.1-2. Область: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$. Задача Коши.

Заданы начальные условия:

$$\begin{aligned}
w &= f(x,y) &&\text{при}\quad t=0,\\
\partial_t w &= g(x,y) &&\text{при}\quad t=0.
\end{aligned}$$

1°. Решение при $b = -a^2c^2 < 0$:

$$w(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{\rho\leqslant at} f(\xi,\eta)\frac{\operatorname{ch}\left(c\sqrt{a^2t^2-\rho^2}\right)}{\sqrt{a^2t^2-\rho^2}}\,d\xi\,d\eta + \frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{\rho\leqslant at} g(\xi,\eta)\frac{\operatorname{ch}\left(c\sqrt{a^2t^2-\rho^2}\right)}{\sqrt{a^2t^2-\rho^2}}\,d\xi\,d\eta +$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\int_0^t d\tau \iint\limits_{\rho\leqslant a(t-\tau)} \Phi(\xi,\eta,\tau)\frac{\operatorname{ch}\left(c\sqrt{a^2(t-\tau)^2-\rho^2}\right)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-\rho^2}}\,d\xi\,d\eta, \qquad \rho=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}.$$

2°. Решение при $b = a^2c^2 > 0$:

$$w(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{\rho\leqslant at} f(\xi,\eta)\frac{\cos\left(c\sqrt{a^2t^2-\rho^2}\right)}{\sqrt{a^2t^2-\rho^2}}\,d\xi\,d\eta + \frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{\rho\leqslant at} g(\xi,\eta)\frac{\cos\left(c\sqrt{a^2t^2-\rho^2}\right)}{\sqrt{a^2t^2-\rho^2}}\,d\xi\,d\eta +$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\int_0^t d\tau \iint\limits_{\rho\leqslant a(t-\tau)} \Phi(\xi,\eta,\tau)\frac{\cos\left(c\sqrt{a^2(t-\tau)^2-\rho^2}\right)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-\rho^2}}\,d\xi\,d\eta, \qquad \rho = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}.$$

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 520).

5.3.1-3. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$. Первая краевая задача.

Рассматривается прямоугольная область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(x,y) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(x,y) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(y,t) && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(y,t) && \text{при} \quad x = l_1 && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_3(x,t) && \text{при} \quad y = 0 && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_4(x,t) && \text{при} \quad y = l_2 && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(x,y,t) = {}& \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{l_1}\!\!\int_0^{l_2} f_0(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\eta\,d\xi + \int_0^{l_1}\!\!\int_0^{l_2} f_1(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\eta\,d\xi +\\
&+ a^2\int_0^t\!\!\int_0^{l_2} g_1(\eta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\right]_{\xi=0} d\eta\,d\tau -\\
&- a^2\int_0^t\!\!\int_0^{l_2} g_2(\eta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\right]_{\xi=l_1} d\eta\,d\tau +\\
&+ a^2\int_0^t\!\!\int_0^{l_1} g_3(\xi,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\right]_{\eta=0} d\xi\,d\tau -\\
&- a^2\int_0^t\!\!\int_0^{l_1} g_4(\xi,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\right]_{\eta=l_2} d\xi\,d\tau +\\
&+ \int_0^t\!\!\int_0^{l_1}\!\!\int_0^{l_2} \Phi(\xi,\eta,\tau)G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\xi\,d\tau,
\end{aligned}$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta,t) = \frac{4}{l_1 l_2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{nm}}\sin(p_n x)\sin(q_m y)\sin(p_n\xi)\sin(q_m\eta)\sin(\lambda_{nm}t),$$

$$p_n = \frac{n\pi}{l_1}, \quad q_m = \frac{m\pi}{l_2}, \quad \lambda_{nm} = \sqrt{a^2p_n^2 + a^2q_m^2 + b}.$$

5.3.1-4. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$. Вторая краевая задача.

Рассматривается прямоугольная область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(x,y) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(x,y) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_x w &= g_1(y,t) && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_x w &= g_2(y,t) && \text{при} \quad x = l_1 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_3(x,t) && \text{при} \quad y = 0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_4(x,t) && \text{при} \quad y = l_2 && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,y,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} f_0(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\eta\,d\xi + \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} f_1(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\eta\,d\xi -$$

$$- a^2\int_0^t\int_0^{l_2} g_1(\eta,\tau)G(x,y,0,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau +$$

$$+ a^2\int_0^t\int_0^{l_2} g_2(\eta,\tau)G(x,y,l_1,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau -$$

$$- a^2\int_0^t\int_0^{l_1} g_3(\xi,\tau)G(x,y,\xi,0,t-\tau)\,d\xi\,d\tau +$$

$$+ a^2\int_0^t\int_0^{l_1} g_4(\xi,\tau)G(x,y,\xi,l_2,t-\tau)\,d\xi\,d\tau +$$

$$+ \int_0^t\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \Phi(\xi,\eta,\tau)G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\xi\,d\tau,$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta,t) = \frac{\sin(t\sqrt{b})}{l_1 l_2\sqrt{b}} + \frac{2}{l_1 l_2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_{nm}}{\lambda_{nm}}\cos(p_n x)\cos(q_m y)\cos(p_n\xi)\cos(q_m\eta)\sin(\lambda_{nm}t),$$

$$p_n = \frac{n\pi}{l_1},\quad q_m = \frac{m\pi}{l_2},\quad \lambda_{nm} = \sqrt{a^2p_n^2 + a^2q_m^2 + b},\quad A_{nm} = \begin{cases} 0 & \text{при } n = m = 0,\\ 1 & \text{при } n\cdot m = 0\ (n\neq m),\\ 2 & \text{при } n\cdot m \neq 0.\end{cases}$$

5.3.1-5. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$. Третья краевая задача.

Рассматривается прямоугольная область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(x,y) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(x,y) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_x w - k_1 w &= g_1(y,t) &&\text{при}\quad x = 0 &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_x w + k_2 w &= g_2(y,t) &&\text{при}\quad x = l_1 &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_y w - k_3 w &= g_3(x,t) &&\text{при}\quad y = 0 &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_y w + k_4 w &= g_4(x,t) &&\text{при}\quad y = l_2 &&\text{(граничное условие)}.\end{aligned}$$

Решение $w(x,y,t)$ определяется по формуле из разд. 5.3.1-3, где

$$G(x,y,\xi,\eta,t) = 4\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{E_{nm}\sqrt{a^2\mu_n^2 + a^2\nu_m^2 + b}}\sin(\mu_n x + \varepsilon_n)\sin(\nu_m y + \sigma_m)\times$$

$$\times\sin(\mu_n\xi + \varepsilon_n)\sin(\nu_m\eta + \sigma_m)\sin\bigl(t\sqrt{a^2\mu_n^2 + a^2\nu_m^2 + b}\bigr),$$

$$\varepsilon_n = \operatorname{arctg}\frac{\mu_n}{l_1},\quad \sigma_m = \operatorname{arctg}\frac{\nu_m}{l_2},\quad E_{nm} = \left[l_1 + \frac{(k_1k_2 + \mu_n^2)(k_1 + k_2)}{(k_1^2 + \mu_n^2)(k_2^2 + \mu_n^2)}\right]\left[l_2 + \frac{(k_3k_4 + \nu_m^2)(k_3 + k_4)}{(k_3^2 + \nu_m^2)(k_4^2 + \nu_m^2)}\right].$$

Здесь μ_n и ν_m — положительные корни трансцендентных уравнений

$$\mu^2 - k_1k_2 = (k_1 + k_2)\mu\operatorname{ctg}(l_1\mu),$$

$$\nu^2 - k_3k_4 = (k_3 + k_4)\nu\operatorname{ctg}(l_2\nu).$$

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 572–573), А. Г. Бутковский (1979, стр. 140–141).

5.3.1-6. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$. Смешанные краевые задачи.

1°. Рассматривается прямоугольная область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(x,y) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(x,y) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(y,t) &&\text{при}\quad x = 0 &&\text{(граничное условие)},\\ w &= g_2(y,t) &&\text{при}\quad x = l_1 &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_y w &= g_3(x,t) &&\text{при}\quad y = 0 &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_y w &= g_4(x,t) &&\text{при}\quad y = l_2 &&\text{(граничное условие)}.\end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,y,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} f_0(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\eta\,d\xi + \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} f_1(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\eta\,d\xi +$$
$$+ a^2\int_0^t\int_0^{l_2} g_1(\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\xi=0}\,d\eta\,d\tau -$$
$$- a^2\int_0^t\int_0^{l_2} g_2(\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\xi=l_1}\,d\eta\,d\tau -$$
$$- a^2\int_0^t\int_0^{l_1} g_3(\xi,\tau)G(x,y,\xi,0,t-\tau)\,d\xi\,d\tau +$$
$$+ a^2\int_0^t\int_0^{l_1} g_4(\xi,\tau)G(x,y,\xi,l_2,t-\tau)\,d\xi\,d\tau +$$
$$+ \int_0^t\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \Phi(\xi,\eta,\tau)G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\xi\,d\tau,$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta,t) = \frac{2}{l_1 l_2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_m}{\lambda_{nm}}\sin(p_n x)\cos(q_m y)\sin(p_n\xi)\cos(q_m\eta)\sin(\lambda_{nm}t),$$
$$p_n = \frac{n\pi}{l_1},\quad q_m = \frac{m\pi}{l_2},\quad \lambda_{nm} = \sqrt{a^2p_n^2 + a^2q_m^2 + b},\quad A_m = \begin{cases} 1 & \text{при } m = 0,\\ 2 & \text{при } m \neq 0.\end{cases}$$

2°. Рассматривается прямоугольная область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(x,y) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(x,y) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(y,t) &&\text{при}\quad x = 0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_x w &= g_2(y,t) &&\text{при}\quad x = l_1 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_3(x,t) &&\text{при}\quad y = 0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_4(x,t) &&\text{при}\quad y = l_2 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,y,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} f_0(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\eta\,d\xi + \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} f_1(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\eta\,d\xi +$$
$$+ a^2\int_0^t\int_0^{l_2} g_1(\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\xi=0}\,d\eta\,d\tau +$$
$$+ a^2\int_0^t\int_0^{l_2} g_2(\eta,\tau)G(x,y,l_1,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau +$$
$$+ a^2\int_0^t\int_0^{l_1} g_3(\xi,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\eta=0}\,d\xi\,d\tau +$$
$$+ a^2\int_0^t\int_0^{l_1} g_4(\xi,\tau)G(x,y,\xi,l_2,t-\tau)\,d\xi\,d\tau +$$
$$+ \int_0^t\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \Phi(\xi,\eta,\tau)G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\xi\,d\tau,$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta,t) = \frac{4}{l_1 l_2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{nm}}\sin(p_n x)\sin(q_m y)\sin(p_n\xi)\sin(q_m\eta)\sin(\lambda_{nm}t),$$
$$p_n = \frac{\pi(2n+1)}{2l_1},\quad q_m = \frac{\pi(2m+1)}{2l_2},\quad \lambda_{nm} = \sqrt{a^2p_n^2 + a^2q_m^2 + b}.$$

5.3.2. Задачи в полярной системе координат

Неоднородное уравнение Клейна — Гордона с двумя пространственными переменными в полярной системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right) - bw + \Phi(r,\varphi,t), \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Одномерные решения $w = w(r,t)$, которые не зависят от угловой координаты φ, рассматриваются в разд. 4.2.5.

5.3.2-1. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Первая краевая задача.

Рассматривается круг. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r,\varphi) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(r,\varphi) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ w &= g(\varphi,t) && \text{при} \quad r=R && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,\varphi,t) = {}& \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^R f_0(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta + \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^R f_1(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta - \\ & - a^2R\int_0^t\!\!\int_0^{2\pi} g(\eta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\right]_{\xi=R} d\eta\,d\tau + \\ & + \int_0^t\!\!\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^R \Phi(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau. \end{aligned}$$

Здесь*

$$G(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{1}{\pi R^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_n}{[J_n'(\mu_{nm}R)]^2}J_n(\mu_{nm}r)J_n(\mu_{nm}\xi)\cos[n(\varphi-\eta)]\,\frac{\sin\bigl(t\sqrt{a^2\mu_{nm}^2+b}\bigr)}{\sqrt{a^2\mu_{nm}^2+b}},$$

$$A_0=1, \quad A_n=2 \quad (n=1,\,2,\,\ldots),$$

где $J_n(\xi)$ — функции Бесселя (штрих означает производную по аргументу), μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_n(\mu R)=0$.

5.3.2-2. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Вторая краевая задача.

Рассматривается круг. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r,\varphi) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(r,\varphi) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_r w &= g(\varphi,t) && \text{при} \quad r=R && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,\varphi,t) = {}& \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^R f_0(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta + \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^R f_1(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta + \\ & + a^2R\int_0^t\!\!\int_0^{2\pi} g(\eta,\tau)G(r,\varphi,R,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau + \\ & + \int_0^t\!\!\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^R \Phi(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau. \end{aligned}$$

* В выражениях для функций Грина, которые указаны в разд. 5.3.2, при $a^2\mu_{nm}^2+b<0$ соответствующие отношения $\dfrac{\sin\bigl(t\sqrt{a^2\mu_{nm}^2+b}\bigr)}{\sqrt{a^2\mu_{nm}^2+b}}$ следует заменить на $\dfrac{\operatorname{sh}\bigl(t\sqrt{|a^2\mu_{nm}^2+b|}\bigr)}{\sqrt{|a^2\mu_{nm}^2+b|}}$.

Здесь

$$G(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{\sin(t\sqrt{b})}{\pi R^2\sqrt{b}} + \\ + \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_n\mu_{nm}^2 J_n(\mu_{nm}r)J_n(\mu_{nm}\xi)}{(\mu_{nm}^2R^2-n^2)[J_n(\mu_{nm}R)]^2}\cos[n(\varphi-\eta)]\frac{\sin\left(t\sqrt{a^2\mu_{nm}^2+b}\right)}{\sqrt{a^2\mu_{nm}^2+b}},$$

где $A_0 = 1$, $A_n = 2$ при $n = 1, 2, \ldots$; $J_n(\xi)$ — функции Бесселя; μ_m — положительные корни трансцендентного уравнения $J_n'(\mu R) = 0$.

5.3.2-3. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Третья краевая задача.

Рассматривается круг. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r,\varphi) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(r,\varphi) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_r w + kw &= g(\varphi,t) &&\text{при}\quad r=R &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(r,\varphi,t)$ определяется по формуле из разд. 5.3.2-2, где

$$G(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_n\mu_{nm}^2 J_n(\mu_{nm}r)J_n(\mu_{nm}\xi)}{(\mu_{nm}^2R^2+k^2R^2-n^2)[J_n(\mu_{nm}R)]^2}\cos[n(\varphi-\eta)]\frac{\sin\left(t\sqrt{a^2\mu_{nm}^2+b}\right)}{\sqrt{a^2\mu_{nm}^2+b}},$$

$$A_0=1,\quad A_n=2\quad (n=1,\,2,\,\ldots).$$

Здесь $J_n(\xi)$ — функции Бесселя, μ_m — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\mu J_n'(\mu R) + kJ_n(\mu R) = 0.$$

5.3.2-4. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Первая краевая задача.

Рассматривается кольцевая область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r,\varphi) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(r,\varphi) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(\varphi,t) &&\text{при}\quad r=R_1 &&\text{(граничное условие)},\\ w &= g_2(\varphi,t) &&\text{при}\quad r=R_2 &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,\varphi,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\!\!\int_{R_1}^{R_2} f_0(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta + \int_0^{2\pi}\!\!\int_{R_1}^{R_2} f_1(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta + \\ + a^2R_1\int_0^t\!\!\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\right]_{\xi=R_1}d\eta\,d\tau - \\ - a^2R_2\int_0^t\!\!\int_0^{2\pi} g_2(\eta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\right]_{\xi=R_2}d\eta\,d\tau + \\ + \int_0^t\!\!\int_0^{2\pi}\!\!\int_{R_1}^{R_2}\Phi(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_nB_{nm}Z_n(\mu_{nm}r)Z_n(\mu_{nm}\xi)\cos[n(\varphi-\eta)]\frac{\sin\left(t\sqrt{a^2\mu_{nm}^2+b}\right)}{\sqrt{a^2\mu_{nm}^2+b}},$$

$$A_n = \begin{cases} 1/2 & \text{при}\ n=0,\\ 1 & \text{при}\ n\neq 0,\end{cases}\qquad B_{nm} = \frac{\mu_{nm}^2J_n^2(\mu_{nm}R_2)}{J_n^2(\mu_{nm}R_1)-J_n^2(\mu_{nm}R_2)},$$

$$Z_n(\mu_{nm}r) = J_n(\mu_{nm}R_1)Y_n(\mu_{nm}r) - Y_n(\mu_{nm}R_1)J_n(\mu_{nm}r),$$

где $J_n(r)$ и $Y_n(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_n(\mu R_1)Y_n(\mu R_2) - Y_n(\mu R_1)J_n(\mu R_2) = 0.$$

5.3.2-5. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Вторая краевая задача.

Рассматривается кольцевая область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(r,\varphi) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,\varphi) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_r w &= g_1(\varphi,t) && \text{при} \quad r=R_1 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_r w &= g_2(\varphi,t) && \text{при} \quad r=R_2 && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(r,\varphi,t) = {} & \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\!\!\int_{R_1}^{R_2} f_0(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta + \int_0^{2\pi}\!\!\int_{R_1}^{R_2} f_1(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta -\\
&-a^2R_1\int_0^t\!\!\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\tau)G(r,\varphi,R_1,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau +\\
&+a^2R_2\int_0^t\!\!\int_0^{2\pi} g_2(\eta,\tau)G(r,\varphi,R_2,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau +\\
&+\int_0^t\!\!\int_0^{2\pi}\!\!\int_{R_1}^{R_2} \Phi(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
G(r,\varphi,\xi,\eta,t) = {} & \frac{\sin\left(t\sqrt{b}\right)}{\pi(R_2^2-R_1^2)\sqrt{b}} +\\
&+\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_n\mu_{nm}^2 Z_n(\mu_{nm}r)Z_n(\mu_{nm}\xi)\cos\left[n(\varphi-\eta)\right]\sin\left(t\sqrt{a^2\mu_{nm}^2+b}\right)}{\left[(\mu_{nm}^2R_2^2-n^2)Z_n^2(\mu_{nm}R_2)-(\mu_{nm}^2R_1^2-n^2)Z_n^2(\mu_{nm}R_1)\right]\sqrt{a^2\mu_{nm}^2+b}},
\end{aligned}$$

где

$$Z_n(\mu_{nm}r) = J_n'(\mu_{nm}R_1)Y_n(\mu_{nm}r) - Y_n'(\mu_{nm}R_1)J_n(\mu_{nm}r), \qquad A_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n=0,\\ 2 & \text{при } n>0,\end{cases}$$

$J_n(r)$ и $Y_n(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_n'(\mu R_1)Y_n'(\mu R_2) - Y_n'(\mu R_1)J_n'(\mu R_2) = 0.$$

5.3.2-6. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Третья краевая задача.

Рассматривается кольцевая область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(r,\varphi) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,\varphi) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_r w - k_1 w &= g_1(\varphi,t) && \text{при} \quad r=R_1 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_r w + k_2 w &= g_2(\varphi,t) && \text{при} \quad r=R_2 && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение $w(r,\varphi,t)$ определяется по формуле из разд. 5.3.2-5, где

$$\begin{aligned}
G(r,\varphi,\xi,\eta,t) &= \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_n\mu_{nm}^2 Z_{nm}(r)Z_{nm}(\xi)\cos\left[n(\varphi-\eta)\right]\sin(\lambda_{nm}t)}{\lambda_{nm}\left[(k_2^2R_2^2+\mu_{nm}^2R_2^2-n^2)Z_{nm}^2(R_2)-(k_1^2R_1^2+\mu_{nm}^2R_1^2-n^2)Z_{nm}^2(R_1)\right]},\\
Z_{nm}(r) &= \left[\mu_{nm}J_n'(\mu_{nm}R_1)-k_1J_n(\mu_{nm}R_1)\right]Y_n(\mu_{nm}r)-\\
&\quad-\left[\mu_{nm}Y_n'(\mu_{nm}R_1)-k_1Y_n(\mu_{nm}R_1)\right]J_n(\mu_{nm}r).
\end{aligned}$$

Здесь $A_0=1$, $A_n=2$ при $n=1,\ 2,\ \ldots$; $\lambda_{nm}=\sqrt{a^2\mu_{nm}^2+b}$; $J_n(r)$ и $Y_n(r)$ — функции Бесселя; μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\begin{aligned}
&\left[\mu J_n'(\mu R_1) - k_1J_n(\mu R_1)\right]\left[\mu Y_n'(\mu R_2) + k_2Y_n(\mu R_2)\right] =\\
&\qquad = \left[\mu Y_n'(\mu R_1) - k_1Y_n(\mu R_1)\right]\left[\mu J_n'(\mu R_2) + k_2J_n(\mu R_2)\right].
\end{aligned}$$

5.3.2-7. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$. Первая краевая задача.

Рассматривается сектор круга. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(r,\varphi) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,\varphi) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(\varphi,t) &&\text{при}\quad r=R &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(r,t) &&\text{при}\quad \varphi=0 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_3(r,t) &&\text{при}\quad \varphi=\varphi_0 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(r,\varphi,t) = {}&\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\varphi_0}\!\!\int_0^R f_0(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta + \int_0^{\varphi_0}\!\!\int_0^R f_1(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta -\\
&- a^2R\int_0^t\!\!\int_0^{\varphi_0} g_1(\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\xi=R}\,d\eta\,d\tau +\\
&+ a^2\int_0^t\!\!\int_0^R g_2(\xi,\tau)\frac{1}{\xi}\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\eta=0}\,d\xi\,d\tau -\\
&- a^2\int_0^t\!\!\int_0^R g_3(\xi,\tau)\frac{1}{\xi}\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\eta=\varphi_0}\,d\xi\,d\tau +\\
&+ \int_0^t\!\!\int_0^{\varphi_0}\!\!\int_0^R \Phi(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau.
\end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{4}{R^2\varphi_0}\sum_{n=1}^\infty\sum_{m=1}^\infty \frac{J_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}r)J_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}\xi)}{[J'_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}R)]^2}\sin\Big(\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\Big)\sin\Big(\frac{n\pi\eta}{\varphi_0}\Big)\frac{\sin(\lambda_{nm}t)}{\lambda_{nm}},$$

где $J_{n\pi/\varphi_0}(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_{n\pi/\varphi_0}(\mu R) = 0$, $\lambda_{nm} = \sqrt{a^2\mu_{nm}^2 + b}$.

5.3.2-8. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$. Вторая краевая задача.

Рассматривается сектор круга. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(r,\varphi) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,\varphi) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_r w &= g_1(\varphi,t) &&\text{при}\quad r=R &&\text{(граничное условие)},\\
r^{-1}\partial_\varphi w &= g_2(r,t) &&\text{при}\quad \varphi=0 &&\text{(граничное условие)},\\
r^{-1}\partial_\varphi w &= g_3(r,t) &&\text{при}\quad \varphi=\varphi_0 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(r,\varphi,t) = {}&\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\varphi_0}\!\!\int_0^R f_0(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta + \int_0^{\varphi_0}\!\!\int_0^R f_1(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta +\\
&+ a^2R\int_0^t\!\!\int_0^{\varphi_0} g_1(\eta,\tau)G(r,\varphi,R,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau -\\
&- a^2\int_0^t\!\!\int_0^R g_2(\xi,\tau)G(r,\varphi,\xi,0,t-\tau)\,d\xi\,d\tau +\\
&+ a^2\int_0^t\!\!\int_0^R g_3(\xi,\tau)G(r,\varphi,\xi,\varphi_0,t-\tau)\,d\xi\,d\tau +\\
&+ \int_0^t\!\!\int_0^{\varphi_0}\!\!\int_0^R \Phi(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
G(r,\varphi,\xi,\eta,t) = {}&\frac{2\sin(t\sqrt{b})}{R^2\varphi_0\sqrt{b}} + 4\varphi_0\sum_{n=0}^\infty\sum_{m=1}^\infty \frac{\mu_{nm}^2 J_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}r)J_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}\xi)}{(R^2\varphi_0^2\mu_{nm}^2 - n^2\pi^2)\big[J_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}R)\big]^2}\times\\
&\times\cos\Big(\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\Big)\cos\Big(\frac{n\pi\eta}{\varphi_0}\Big)\frac{\sin\big(t\sqrt{a^2\mu_{nm}^2+b}\big)}{\sqrt{a^2\mu_{nm}^2+b}},
\end{aligned}$$

где $J_{n\pi/\varphi_0}(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J'_{n\pi/\varphi_0}(\mu R) = 0$.

5.3.2-9. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$. Смешанная краевая задача.

Рассматривается сектор круга. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r,\varphi) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(r,\varphi) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_r w - kw &= g(\varphi,t) && \text{при} \quad r=R && \text{(граничное условие)},\\ \partial_\varphi w &= 0 && \text{при} \quad \varphi=0 && \text{(граничное условие)},\\ \partial_\varphi w &= 0 && \text{при} \quad \varphi=\varphi_0 && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,\varphi,t) = {} & \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\varphi_0}\!\!\int_0^R f_0(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta + \\ & + \int_0^{\varphi_0}\!\!\int_0^R f_1(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta + \\ & + a^2R\int_0^t\!\!\int_0^{\varphi_0} g(\eta,\tau)G(r,\varphi,R,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau + \\ & + \int_0^t\!\!\int_0^{\varphi_0}\!\!\int_0^R \Phi(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau. \end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}J_{s_n}(\mu_{nm}r)J_{s_n}(\mu_{nm}\xi)\cos(s_n\varphi)\cos(s_n\eta)\sin\bigl(t\sqrt{a^2\mu_{nm}^2+b}\,\bigr),$$

$$s_n = \frac{n\pi}{\varphi_0}, \qquad A_{nm} = \frac{4\mu_{nm}^2}{\varphi_0(\mu_{nm}^2R^2 + k^2R^2 - s_n^2)\bigl[J_{s_n}(\mu_{nm}R)\bigr]^2\sqrt{a^2\mu_{nm}^2+b}},$$

где $J_{s_n}(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\mu J'_{s_n}(\mu R) + kJ_{s_n}(\mu R) = 0.$$

5.3.3. Осесимметричные задачи

В осесимметричном случае неоднородное уравнение Клейна — Гордона в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\Bigl(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\Bigr) - bw + \Phi(r,z,t), \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

В решениях рассматриваемых ниже задач для удобства использована модифицированная функция Грина $\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t) = 2\pi\xi G(r,z,\xi,\eta,t)$.

5.3.3-1. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Первая краевая задача.

Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(r,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(z,t) && \text{при} \quad r=R && \text{(граничное условие)},\\ w &= g_2(r,t) && \text{при} \quad z=0 && \text{(граничное условие)},\\ w &= g_3(r,t) && \text{при} \quad z=l && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(r,z,t) = {}&\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\int_0^R f_0(\xi,\eta)\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta + \\
&+\int_0^l\int_0^R f_1(\xi,\eta)\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta - \\
&-a^2\int_0^t\int_0^l g_1(\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\xi=R}\,d\eta\,d\tau + \\
&+a^2\int_0^t\int_0^R g_2(\xi,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\eta=0}\,d\xi\,d\tau - \\
&-a^2\int_0^t\int_0^R g_3(\xi,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\eta=l}\,d\xi\,d\tau + \\
&+\int_0^t\int_0^l\int_0^R \Phi(\xi,\eta,\tau)\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t)=\frac{4\xi}{R^2l}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{J_1^2(\mu_n)}J_0\Big(\frac{\mu_n r}{R}\Big)J_0\Big(\frac{\mu_n\xi}{R}\Big)\sin\Big(\frac{m\pi z}{l}\Big)\sin\Big(\frac{m\pi\eta}{l}\Big)\frac{\sin\big(t\sqrt{\lambda_{nm}}\big)}{\sqrt{\lambda_{nm}}},
$$

$$
\lambda_{nm}=\frac{a^2\mu_n^2}{R^2}+\frac{a^2\pi^2m^2}{l^2}+b,
$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $J_0(\mu)=0$.

5.3.3-2. Область: $0\leqslant r\leqslant R$, $0\leqslant z\leqslant l$. Вторая краевая задача.

Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f_0(r,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_r w &= g_1(z,t) &&\text{при}\quad r=R &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_2(r,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_3(r,t) &&\text{при}\quad z=l &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(r,z,t) = {}&\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\int_0^R f_0(\xi,\eta)\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta + \\
&+\int_0^l\int_0^R f_1(\xi,\eta)\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta + \\
&+a^2\int_0^t\int_0^l g_1(\eta,\tau)\mathcal{G}(r,z,R,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau - \\
&-a^2\int_0^t\int_0^R g_2(\xi,\tau)\mathcal{G}(r,z,\xi,0,t-\tau)\,d\xi\,d\tau + \\
&+a^2\int_0^t\int_0^R g_3(\xi,\tau)\mathcal{G}(r,z,\xi,l,t-\tau)\,d\xi(\,d\tau \\
&+\int_0^t\int_0^l\int_0^R \Phi(\xi,\eta,\tau)\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t)={}&\frac{2\xi\sin\big(t\sqrt{b}\big)}{R^2l\sqrt{b}}+ \\
&+\frac{2\xi}{R^2l}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_{nm}}{J_0^2(\mu_n)}J_0\Big(\frac{\mu_n r}{R}\Big)J_0\Big(\frac{\mu_n\xi}{R}\Big)\cos\Big(\frac{m\pi z}{l}\Big)\cos\Big(\frac{m\pi\eta}{l}\Big)\frac{\sin\big(t\sqrt{\lambda_{nm}}\big)}{\sqrt{\lambda_{nm}}},
\end{aligned}
$$

$$
\lambda_{nm}=\frac{a^2\mu_n^2}{R^2}+\frac{a^2\pi^2m^2}{l^2}+b,\qquad A_{nm}=\begin{cases}0 & \text{при } m=0,\ n=0,\\ 1 & \text{при } m=0,\ n>0,\\ 2 & \text{при } m>0,\end{cases}
$$

где μ_n — корни трансцендентного уравнения $J_1(\mu)=0$ $(\mu_0=0)$.

5.3.3-3. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Третья краевая задача.

Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(r,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_r w - k_1 w &= g_1(z,t) &&\text{при}\quad r=R &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w - k_2 w &= g_2(r,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w + k_3 w &= g_3(r,t) &&\text{при}\quad z=l &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение $w(r,z,t)$ определяется по формуле из разд. 5.3.3-2, где

$$\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t) = \frac{2\xi}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2}{(k_1^2R^2+\mu_n^2)J_0^2(\mu_n)}J_0\Big(\frac{\mu_n r}{R}\Big)J_0\Big(\frac{\mu_n\xi}{R}\Big)\frac{\varphi_m(z)\varphi_m(\eta)}{\|\varphi_m\|^2}\frac{\sin\big(t\sqrt{\lambda_{nm}}\big)}{\sqrt{\lambda_{nm}}},$$

$$\lambda_{nm} = \frac{a^2\mu_n^2}{R^2} + a^2\beta_m^2 + b, \qquad \varphi_m(z) = \cos(\beta_m z) + \frac{k_2}{\beta_m}\sin(\beta_m z),$$

$$\|\varphi_m\|^2 = \frac{k_3}{2\beta_m^2}\frac{\beta_m^2+k_2^2}{\beta_m^2+k_3^2} + \frac{k_2}{2\beta_m^2} + \frac{l}{2}\Big(1+\frac{k_2^2}{\beta_m^2}\Big).$$

Здесь μ_n и β_m — положительные корни трансцендентных уравнений

$$\mu J_1(\mu) - k_1 R J_0(\mu) = 0, \qquad \frac{\operatorname{tg}(\beta l)}{\beta} = \frac{k_2+k_3}{\beta^2 - k_2 k_3}.$$

5.3.3-4. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Смешанные краевые задачи.

1°. Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(r,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(z,t) &&\text{при}\quad r=R &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_2(r,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_3(r,t) &&\text{при}\quad z=l &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(r,z,t) = {}& \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\!\int_0^R f_0(\xi,\eta)\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta + {}\\
&+ \int_0^l\!\int_0^R f_1(\xi,\eta)\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta - {}\\
&- a^2\int_0^t\!\int_0^l g_1(\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\xi=R}\,d\eta\,d\tau - {}\\
&- a^2\int_0^t\!\int_0^R g_2(\xi,\tau)\mathcal{G}(r,z,\xi,0,t-\tau)\,d\xi\,d\tau + {}\\
&+ a^2\int_0^t\!\int_0^R g_3(\xi,\tau)\mathcal{G}(r,z,\xi,l,t-\tau)\,d\xi\,d\tau + {}\\
&+ \int_0^t\!\int_0^l\!\int_0^R \Phi(\xi,\eta,\tau)\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t) = \frac{2\xi}{R^2 l}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_m}{J_1^2(\mu_n)}J_0\Big(\frac{\mu_n r}{R}\Big)J_0\Big(\frac{\mu_n\xi}{R}\Big)\cos\Big(\frac{m\pi z}{l}\Big)\cos\Big(\frac{m\pi\eta}{l}\Big)\frac{\sin\big(t\sqrt{\lambda_{nm}}\big)}{\sqrt{\lambda_{nm}}},$$

$$\lambda_{nm} = \frac{a^2\mu_n^2}{R^2} + \frac{a^2\pi^2m^2}{l^2} + b, \qquad A_m = \begin{cases}1 & \text{при}\ m=0,\\ 2 & \text{при}\ m>0,\end{cases}$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $J_0(\mu) = 0$.

2°. Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f_0(r,z) \quad \text{при} \quad t=0 \quad &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,z) \quad \text{при} \quad t=0 \quad &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_r w &= g_1(z,t) \quad \text{при} \quad r=R \quad &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(r,t) \quad \text{при} \quad z=0 \quad &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_3(r,t) \quad \text{при} \quad z=l \quad &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(r,z,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\int_0^R f_0(\xi,\eta)\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta + \int_0^l\int_0^R f_1(\xi,\eta)\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta +\\
&+ a^2\int_0^t\int_0^l g_1(\eta,\tau)\mathcal{G}(r,z,R,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau +\\
&+ a^2\int_0^t\int_0^R g_2(\xi,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\eta=0}\,d\xi\,d\tau -\\
&- a^2\int_0^t\int_0^R g_3(\xi,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\eta=l}\,d\xi\,d\tau +\\
&+ \int_0^t\int_0^l\int_0^R \Phi(\xi,\eta,\tau)\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t) = \frac{4\xi}{R^2 l}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{J_0^2(\mu_n)}J_0\Big(\frac{\mu_n r}{R}\Big)J_0\Big(\frac{\mu_n\xi}{R}\Big)\sin\Big(\frac{m\pi z}{l}\Big)\sin\Big(\frac{m\pi\eta}{l}\Big)\frac{\sin\big(t\sqrt{\lambda_{nm}}\,\big)}{\sqrt{\lambda_{nm}}},
$$

$$
\lambda_{nm} = \frac{a^2\mu_n^2}{R^2} + \frac{a^2\pi^2 m^2}{l^2} + b,
$$

где μ_n — корни трансцендентного уравнения $J_1(\mu) = 0$ $(\mu_0 = 0)$.

5.3.3-5. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Первая краевая задача.

Рассматривается полый круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f_0(r,z) \quad \text{при} \quad t=0 \quad &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,z) \quad \text{при} \quad t=0 \quad &&\text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(z,t) \quad \text{при} \quad r=R_1 \quad &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(z,t) \quad \text{при} \quad r=R_2 \quad &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_3(r,t) \quad \text{при} \quad z=0 \quad &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_4(r,t) \quad \text{при} \quad z=l \quad &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(r,z,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\int_{R_1}^{R_2} f_0(\xi,\eta)\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta +\\
&+ \int_0^l\int_{R_1}^{R_2} f_1(\xi,\eta)\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta +\\
&+ a^2\int_0^t\int_0^l g_1(\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\xi=R_1}\,d\eta\,d\tau -\\
&- a^2\int_0^t\int_0^l g_2(\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\xi=R_2}\,d\eta\,d\tau +\\
&+ a^2\int_0^t\int_{R_1}^{R_2} g_3(\xi,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\eta=0}\,d\xi\,d\tau -\\
&- a^2\int_0^t\int_{R_1}^{R_2} g_4(\xi,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\eta=l}\,d\xi\,d\tau +\\
&+ \int_0^t\int_0^l\int_{R_1}^{R_2} \Phi(\xi,\eta,\tau)\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t) = \frac{\pi^2\xi}{R_1^2 l}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2 J_0^2(s\mu_n)}{J_0^2(\mu_n)-J_0^2(s\mu_n)}\Psi_n(r)\Psi_n(\xi)\sin\left(\frac{m\pi z}{l}\right)\sin\left(\frac{m\pi\eta}{l}\right)\frac{\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_{nm}}\bigr)}{\sqrt{\lambda_{nm}}},$$

$$\Psi_n(r) = Y_0(\mu_n)J_0\left(\frac{\mu_n r}{R_1}\right) - J_0(\mu_n)Y_0\left(\frac{\mu_n r}{R_1}\right),\quad s=\frac{R_2}{R_1},\quad \lambda_{nm}=\frac{a^2\mu_n^2}{R_1^2}+\frac{a^2\pi^2m^2}{l^2}+b,$$

где $J_0(\mu)$ и $Y_0(\mu)$ — функции Бесселя, μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_0(\mu)Y_0(s\mu) - J_0(s\mu)Y_0(\mu) = 0.$$

5.3.3-6. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2,\ 0 \leqslant z \leqslant l$. Вторая краевая задача.

Рассматривается полый круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(r,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_r w &= g_1(z,t) &&\text{при}\quad r=R_1 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_r w &= g_2(z,t) &&\text{при}\quad r=R_2 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_3(r,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_4(r,t) &&\text{при}\quad z=l &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(r,z,t) = {}&\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\int_{R_1}^{R_2} f_0(\xi,\eta)\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta +\\
&+\int_0^l\int_{R_1}^{R_2} f_1(\xi,\eta)\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta -\\
&-a^2\int_0^t\int_0^l g_1(\eta,\tau)\mathcal{G}(r,z,R_1,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau +\\
&+a^2\int_0^t\int_0^l g_2(\eta,\tau)\mathcal{G}(r,z,R_2,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau -\\
&-a^2\int_0^t\int_{R_1}^{R_2} g_3(\xi,\tau)\mathcal{G}(r,z,\xi,0,t-\tau)\,d\xi\,d\tau +\\
&+a^2\int_0^t\int_{R_1}^{R_2} g_4(\xi,\tau)\mathcal{G}(r,z,\xi,l,t-\tau)\,d\xi\,d\tau +\\
&+\int_0^t\int_0^l\int_{R_1}^{R_2}\Phi(\xi,\eta,\tau)\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t) = {}&\frac{2\xi\sin\bigl(t\sqrt{b}\bigr)}{(R_2^2-R_1^2)l\sqrt{b}} + \frac{4\xi}{(R_2^2-R_1^2)l}\sum_{m=1}^{\infty}\cos\left(\frac{m\pi z}{l}\right)\cos\left(\frac{m\pi\eta}{l}\right)\frac{\sin\bigl(t\sqrt{\beta_m}\bigr)}{\sqrt{\beta_m}} +\\
&+\frac{\pi^2\xi}{2R_1^2 l}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_m\mu_n^2 J_1^2(s\mu_n)}{J_1^2(\mu_n)-J_1^2(s\mu_n)}\Psi_n(r)\Psi_n(\xi)\cos\left(\frac{m\pi z}{l}\right)\cos\left(\frac{m\pi\eta}{l}\right)\frac{\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_{nm}}\bigr)}{\sqrt{\lambda_{nm}}},
\end{aligned}$$

где

$$\Psi_n(r) = Y_1(\mu_n)J_0\left(\frac{\mu_n r}{R_1}\right) - J_1(\mu_n)Y_0\left(\frac{\mu_n r}{R_1}\right),\qquad s=\frac{R_2}{R_1},$$

$$A_m = \begin{cases}1 & \text{при } m=0,\\ 2 & \text{при } m>1,\end{cases}\qquad \beta_m = \frac{a^2\pi^2m^2}{l^2}+b,\quad \lambda_{nm}=\frac{a^2\mu_n^2}{R_1^2}+\frac{a^2\pi^2m^2}{l^2}+b;$$

$J_k(\mu)$ и $Y_k(\mu)$ — функции Бесселя ($k=0,\ 1$); μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_1(\mu)Y_1(s\mu) - J_1(s\mu)Y_1(\mu) = 0.$$

5.4. Телеграфное уравнение $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\Delta_2 w - bw + \Phi(x,y,t)$

5.4.1. Задачи в декартовой системе координат

Двумерное неоднородное телеграфное уравнение в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k\frac{\partial w}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - bw + \Phi(x,y,t).$$

5.4.1-1. Сведение к двумерному уравнению Клейна — Гордона.

Замена $w(x,y,t) = \exp\left(-\tfrac{1}{2}kt\right)u(x,y,t)$ приводит к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \left(b - \tfrac{1}{4}k^2\right)u + \exp\left(\tfrac{1}{2}kt\right)\Phi(x,y,t),$$

которое рассматривается в разд. 5.3.1.

5.4.1-2. Фундаментальные решения.

1°. Случай $b - \frac{1}{4}k^2 = \sigma^2 > 0$:

$$\mathscr{E}(x,y,t) = \vartheta(at - r)\exp\left(-\tfrac{1}{2}kt\right)\frac{\cos\left(\sigma\sqrt{t^2 - r^2/a^2}\,\right)}{2\pi a^2\sqrt{t^2 - r^2/a^2}},$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\vartheta(z)$ — единичная функция Хевисайда.

2°. Случай $b - \frac{1}{4}k^2 = -\sigma^2 < 0$:

$$\mathscr{E}(x,y,t) = \vartheta(at - r)\exp\left(-\tfrac{1}{2}kt\right)\frac{\operatorname{ch}\left(\sigma\sqrt{t^2 - r^2/a^2}\,\right)}{2\pi a^2\sqrt{t^2 - r^2/a^2}}.$$

⊙ *Литература*: В. С. Владимиров, В. П. Михайлов, А. А. Вашарин и др. (1974, стр. 123).

5.4.1-3. Область: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$. Задача Коши.

Заданы начальные условия:

$$w = f(x,y) \quad \text{при} \quad t = 0,$$
$$\partial_t w = g(x,y) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(x,y,t) = {}& \exp\left(-\tfrac{1}{2}kt\right)\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{\rho\leqslant at} f(\xi,\eta)H(x,y,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta \,+ \\ &+ \exp\left(-\tfrac{1}{2}kt\right)\iint\limits_{\rho\leqslant at}\left[g(\xi,\eta) + \tfrac{1}{2}kf(\xi,\eta)\right]H(x,y,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta \,+ \\ &+ \int_0^t d\tau\iint\limits_{\rho\leqslant a(t-\tau)}\exp\left[-\tfrac{1}{2}k(t-\tau)\right]\Phi(\xi,\eta,\tau)H(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta. \end{aligned}$$

Здесь

$$H(x,y,\xi,\eta,t) = \begin{cases} \dfrac{\cos\left(\sigma\sqrt{t^2 - \rho^2/a^2}\,\right)}{2\pi a^2\sqrt{t^2 - \rho^2/a^2}} & \text{при } b - \frac{1}{4}k^2 = \sigma^2 > 0, \\[2ex] \dfrac{\operatorname{ch}\left(\sigma\sqrt{t^2 - \rho^2/a^2}\,\right)}{2\pi a^2\sqrt{t^2 - \rho^2/a^2}} & \text{при } b - \frac{1}{4}k^2 = -\sigma^2 < 0, \end{cases}$$

где $\rho = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$.

5.4.1-4. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$. Первая краевая задача.

Рассматривается прямоугольная область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(x,y) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(x,y) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(y,t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(y,t) &&\text{при}\quad x=l_1 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_3(x,t) &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_4(x,t) &&\text{при}\quad y=l_2 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(x,y,t) = {}&\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{l_1}\!\!\int_0^{l_2} f_0(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\eta\,d\xi + {}\\
&+\int_0^{l_1}\!\!\int_0^{l_2}\bigl[f_1(\xi,\eta)+kf_0(\xi,\eta)\bigr]G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\eta\,d\xi + {}\\
&+a^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{l_2} g_1(\eta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=0} d\eta\,d\tau - {}\\
&-a^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{l_2} g_2(\eta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=l_1} d\eta\,d\tau + {}\\
&+a^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{l_1} g_3(\xi,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\Bigr]_{\eta=0} d\xi\,d\tau - {}\\
&-a^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{l_1} g_4(\xi,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\Bigr]_{\eta=l_2} d\xi\,d\tau + {}\\
&+\int_0^{t}\!\!\int_0^{l_1}\!\!\int_0^{l_2}\Phi(\xi,\eta,\tau)G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\xi\,d\tau,
\end{aligned}$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta,t) = \frac{4}{l_1 l_2}\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}kt\bigr)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{nm}}\sin(p_n x)\sin(q_m y)\sin(p_n\xi)\sin(q_m\eta)\sin(\lambda_{nm}t),$$

$$p_n = \frac{n\pi}{l_1},\quad q_m = \frac{m\pi}{l_2},\quad \lambda_{nm} = \sqrt{a^2p_n^2 + a^2q_m^2 + b - \tfrac{1}{4}k^2}.$$

5.4.1-5. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$. Вторая краевая задача.

Рассматривается прямоугольная область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(x,y) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(x,y) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_x w &= g_1(y,t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_x w &= g_2(y,t) &&\text{при}\quad x=l_1 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_3(x,t) &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_4(x,t) &&\text{при}\quad y=l_2 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(x,y,t) = {}&\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{l_1}\!\!\int_0^{l_2} f_0(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\eta\,d\xi + {}\\
&+\int_0^{l_1}\!\!\int_0^{l_2}\bigl[f_1(\xi,\eta)+kf_0(\xi,\eta)\bigr]G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\eta\,d\xi - {}\\
&-a^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{l_2} g_1(\eta,\tau)G(x,y,0,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau + a^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{l_2} g_2(\eta,\tau)G(x,y,l_1,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau - {}\\
&-a^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{l_1} g_3(\xi,\tau)G(x,y,\xi,0,t-\tau)\,d\xi\,d\tau + a^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{l_1} g_4(\xi,\tau)G(x,y,\xi,l_2,t-\tau)\,d\xi\,d\tau + {}\\
&+\int_0^{t}\!\!\int_0^{l_1}\!\!\int_0^{l_2}\Phi(\xi,\eta,\tau)G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\xi\,d\tau.
\end{aligned}$$

Здесь

$$G(x,y,\xi,\eta,t) = \exp\left(-\tfrac{1}{2}kt\right)\left[\frac{\sin(\lambda_{00}t)}{l_1 l_2 \lambda_{00}} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{l_1 l_2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_{nm}}{\lambda_{nm}}\cos(p_n x)\cos(q_m y)\cos(p_n\xi)\cos(q_m\eta)\sin(\lambda_{nm}t)\right],$$

где

$$p_n = \frac{n\pi}{l_1},\quad q_m = \frac{m\pi}{l_2},\quad \lambda_{nm} = \sqrt{a^2p_n^2 + a^2q_m^2 + b - \tfrac{1}{4}k^2},\quad A_{nm} = \begin{cases} 0 & \text{при } n=m=0, \\ 1 & \text{при } n\cdot m = 0\ (n\neq m), \\ 2 & \text{при } n\cdot m \neq 0. \end{cases}$$

5.4.1-6. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$. Третья краевая задача.

Рассматривается прямоугольная область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(x,y) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)}, \\ \partial_t w &= f_1(x,y) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)}, \\ \partial_x w - k_1 w &= g_1(y,t) && \text{при} \quad x=0 && \text{(граничное условие)}, \\ \partial_x w + k_2 w &= g_2(y,t) && \text{при} \quad x=l_1 && \text{(граничное условие)}, \\ \partial_y w - k_3 w &= g_3(x,t) && \text{при} \quad y=0 && \text{(граничное условие)}, \\ \partial_y w + k_4 w &= g_4(x,t) && \text{при} \quad y=l_2 && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(x,y,t)$ определяется по формуле из разд. 5.4.1-5, где

$$G(x,y,\xi,\eta,t) = 4\exp\left(-\tfrac{1}{2}kt\right)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{E_{nm}\sqrt{a^2\mu_n^2 + a^2\nu_m^2 + b - \frac{1}{4}k^2}}\sin(\mu_n x + \varepsilon_n)\sin(\nu_m y + \sigma_m)\times$$

$$\times\sin(\mu_n\xi + \varepsilon_n)\sin(\nu_m\eta + \sigma_m)\sin\left(t\sqrt{a^2\mu_n^2 + a^2\nu_m^2 + b - \tfrac{1}{4}k^2}\right).$$

Здесь

$$\varepsilon_n = \operatorname{arctg}\frac{\mu_n}{l_1},\quad \sigma_m = \operatorname{arctg}\frac{\nu_m}{l_2},\quad E_{nm} = \left[l_1 + \frac{(k_1k_2 + \mu_n^2)(k_1 + k_2)}{(k_1^2 + \mu_n^2)(k_2^2 + \mu_n^2)}\right]\left[l_2 + \frac{(k_3k_4 + \nu_m^2)(k_3 + k_4)}{(k_3^2 + \nu_m^2)(k_4^2 + \nu_m^2)}\right];$$

μ_n и ν_m — положительные корни трансцендентных уравнений

$$\mu^2 - k_1k_2 = (k_1 + k_2)\mu\operatorname{ctg}(l_1\mu),$$
$$\nu^2 - k_3k_4 = (k_3 + k_4)\nu\operatorname{ctg}(l_2\nu).$$

5.4.1-7. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$. Смешанные краевые задачи.

1°. Рассматривается прямоугольная область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(x,y) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)}, \\ \partial_t w &= f_1(x,y) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)}, \\ w &= g_1(y,t) && \text{при} \quad x=0 && \text{(граничное условие)}, \\ w &= g_2(y,t) && \text{при} \quad x=l_1 && \text{(граничное условие)}, \\ \partial_y w &= g_3(x,t) && \text{при} \quad y=0 && \text{(граничное условие)}, \\ \partial_y w &= g_4(x,t) && \text{при} \quad y=l_2 && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}w(x,y,t) = {}&\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} f_0(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\eta\,d\xi + \\&+\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\bigl[f_1(\xi,\eta)+kf_0(\xi,\eta)\bigr]G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\eta\,d\xi + \\&+a^2\int_0^t\int_0^{l_2} g_1(\eta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=0}d\eta\,d\tau - \\&-a^2\int_0^t\int_0^{l_2} g_2(\eta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=l_1}d\eta\,d\tau - \\&-a^2\int_0^t\int_0^{l_1} g_3(\xi,\tau)G(x,y,\xi,0,t-\tau)\,d\xi\,d\tau + \\&+a^2\int_0^t\int_0^{l_1} g_4(\xi,\tau)G(x,y,\xi,l_2,t-\tau)\,d\xi\,d\tau + \\&+\int_0^t\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\Phi(\xi,\eta,\tau)G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\xi\,d\tau,\end{aligned}$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta,t) = \frac{2}{l_1 l_2}\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}kt\bigr)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_m}{\lambda_{nm}}\sin(p_n x)\cos(q_m y)\sin(p_n\xi)\cos(q_m\eta)\sin(\lambda_{nm}t),$$

$$p_n = \frac{n\pi}{l_1},\quad q_m = \frac{m\pi}{l_2},\quad \lambda_{nm} = \sqrt{a^2p_n^2 + a^2q_m^2 + b - \tfrac{1}{4}k^2},\quad A_m = \begin{cases}1 & \text{при } m=0,\\ 2 & \text{при } m\neq 0.\end{cases}$$

2°. Рассматривается прямоугольная область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}w &= f_0(x,y) && \text{при}\quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(x,y) && \text{при}\quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(y,t) && \text{при}\quad x=0 && \text{(граничное условие)},\\ \partial_x w &= g_2(y,t) && \text{при}\quad x=l_1 && \text{(граничное условие)},\\ w &= g_3(x,t) && \text{при}\quad y=0 && \text{(граничное условие)},\\ \partial_y w &= g_4(x,t) && \text{при}\quad y=l_2 && \text{(граничное условие)}.\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}w(x,y,t) = {}&\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} f_0(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\eta\,d\xi + \\&+\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\bigl[f_1(\xi,\eta)+kf_0(\xi,\eta)\bigr]G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\eta\,d\xi + \\&+a^2\int_0^t\int_0^{l_2} g_1(\eta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=0}d\eta\,d\tau + \\&+a^2\int_0^t\int_0^{l_2} g_2(\eta,\tau)G(x,y,l_1,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau + \\&+a^2\int_0^t\int_0^{l_1} g_3(\xi,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\Bigr]_{\eta=0}d\xi\,d\tau + \\&+a^2\int_0^t\int_0^{l_1} g_4(\xi,\tau)G(x,y,\xi,l_2,t-\tau)\,d\xi\,d\tau + \\&+\int_0^t\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\Phi(\xi,\eta,\tau)G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\xi\,d\tau,\end{aligned}$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta,t) = \frac{4}{l_1 l_2}\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}kt\bigr)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{nm}}\sin(p_n x)\sin(q_m y)\sin(p_n\xi)\sin(q_m\eta)\sin(\lambda_{nm}t),$$

$$p_n = \frac{\pi(2n+1)}{2l_1},\quad q_m = \frac{\pi(2m+1)}{2l_2},\quad \lambda_{nm} = \sqrt{a^2p_n^2 + a^2q_m^2 + b - \tfrac{1}{4}k^2}.$$

5.4.2. Задачи в полярной системе координат

Двумерное неоднородное телеграфное уравнение в полярной системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+k\frac{\partial w}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)-bw+\Phi(r,\varphi,t),\qquad r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Об одномерных решениях $w=w(r,t)$ см. уравнение 4.4.2.2.

5.4.2-1. Область: $0\leqslant r\leqslant R$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$. Первая краевая задача.

Рассматривается круг. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w&=f_0(r,\varphi) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w&=f_1(r,\varphi) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
w&=g(\varphi,t) &&\text{при}\quad r=R &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(r,\varphi,t)&=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^R f_0(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta+\\
&+\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^R\bigl[f_1(\xi,\eta)+kf_0(\xi,\eta)\bigr]G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta-\\
&-a^2R\int_0^t\!\!\int_0^{2\pi}g(\eta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=R}d\eta\,d\tau+\\
&+\int_0^t\!\!\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^R\Phi(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau.
\end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,\varphi,\xi,\eta,t)=\frac{1}{\pi R^2}\exp\bigl(-\tfrac12 kt\bigr)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_nJ_n(\mu_{nm}r)J_n(\mu_{nm}\xi)}{[J_n'(\mu_{nm}R)]^2}\cos\bigl[n(\varphi-\eta)\bigr]\frac{\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_{nm}}\bigr)}{\sqrt{\lambda_{nm}}},$$

$$\lambda_{nm}=a^2\mu_{nm}^2+b-\tfrac14k^2,\quad A_0=1,\quad A_n=2\quad(n=1,\,2,\,\ldots),$$

где $J_n(\xi)$ — функции Бесселя (штрих означает производную по аргументу), μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_n(\mu R)=0$.

5.4.2-2. Область: $0\leqslant r\leqslant R$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$. Вторая краевая задача.

Рассматривается круг. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w&=f_0(r,\varphi) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w&=f_1(r,\varphi) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_r w&=g(\varphi,t) &&\text{при}\quad r=R &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(r,\varphi,t)&=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^R f_0(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta+\\
&+\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^R\bigl[f_1(\xi,\eta)+kf_0(\xi,\eta)\bigr]G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta+\\
&+a^2R\int_0^t\!\!\int_0^{2\pi}g(\eta,\tau)G(r,\varphi,R,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau+\\
&+\int_0^t\!\!\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^R\Phi(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
G(r,\varphi,\xi,\eta,t)&=\exp\bigl(-\tfrac12kt\bigr)\Biggl[\frac{\sin\bigl(t\sqrt{b-\frac14k^2}\,\bigr)}{\pi R^2\sqrt{b-\frac14k^2}}+\\
&+\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_n\mu_{nm}^2J_n(\mu_{nm}r)J_n(\mu_{nm}\xi)}{(\mu_{nm}^2R^2-n^2)[J_n(\mu_{nm}R)]^2}\cos\bigl[n(\varphi-\eta)\bigr]\frac{\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_{nm}}\bigr)}{\sqrt{\lambda_{nm}}}\Biggr],
\end{aligned}$$

$$\lambda_{nm}=a^2\mu_{nm}^2+b-\tfrac14k^2,\quad A_0=1,\quad A_n=2\quad(n=1,\,2,\,\ldots),$$

где $J_n(\xi)$ — функции Бесселя, μ_m — положительные корни трансцендентного уравнения $J'_n(\mu R) = 0$.

5.4.2-3. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Третья краевая задача.

Рассматривается круг. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f_0(r,\varphi) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,\varphi) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_r w + kw &= g(\varphi,t) && \text{при} \quad r = R && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение $w(r,\varphi,t)$ определяется по формуле из разд. 5.4.2-2, где

$$
G(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{1}{\pi}\exp\left(-\tfrac{1}{2}kt\right)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_n\mu_{nm}^2 J_n(\mu_{nm}r)J_n(\mu_{nm}\xi)\cos[n(\varphi-\eta)]\sin\left(t\sqrt{\lambda_{nm}}\right)}{(\mu_{nm}^2R^2 + k^2R^2 - n^2)[J_n(\mu_{nm}R)]^2\sqrt{\lambda_{nm}}},
$$

$$
\lambda_{nm} = a^2\mu_{nm}^2 + b - \tfrac{1}{4}k^2, \quad A_0 = 1, \quad A_n = 2 \quad (n = 1,\, 2,\, \ldots).
$$

Здесь $J_n(\xi)$ — функции Бесселя, μ_m — положительные корни трансцендентного уравнения

$$
\mu J'_n(\mu R) + kJ_n(\mu R) = 0.
$$

5.4.2-4. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Первая краевая задача.

Рассматривается кольцевая область. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f_0(r,\varphi) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,\varphi) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(\varphi,t) && \text{при} \quad r = R_1 && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(\varphi,t) && \text{при} \quad r = R_2 && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(r,\varphi,t) = {}& \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} f_0(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta +\\
&+ \int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\left[f_1(\xi,\eta) + kf_0(\xi,\eta)\right]G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta +\\
&+ a^2R_1\int_0^t\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\right]_{\xi=R_1} d\eta\,d\tau -\\
&- a^2R_2\int_0^t\int_0^{2\pi} g_2(\eta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\right]_{\xi=R_2} d\eta\,d\tau +\\
&+ \int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\Phi(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
G(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{\pi}{2}\exp\left(-\tfrac{1}{2}kt\right)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_nB_{nm}Z_n(\mu_{nm}r)Z_n(\mu_{nm}\xi)\cos[n(\varphi-\eta)]\frac{\sin\left(t\sqrt{\lambda_{nm}}\right)}{\sqrt{\lambda_{nm}}},
$$

$$
A_n = \begin{cases} 1/2 & \text{при} \quad n=0,\\ 1 & \text{при} \quad n\neq 0,\end{cases} \qquad B_{nm} = \frac{\mu_{nm}^2J_n^2(\mu_{nm}R_2)}{J_n^2(\mu_{nm}R_1) - J_n^2(\mu_{nm}R_2)},
$$

$$
Z_n(\mu_{nm}r) = J_n(\mu_{nm}R_1)Y_n(\mu_{nm}r) - Y_n(\mu_{nm}R_1)J_n(\mu_{nm}r), \quad \lambda_{nm} = a^2\mu_{nm}^2 + b - \tfrac{1}{4}k^2,
$$

где $J_n(r)$ и $Y_n(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$
J_n(\mu R_1)Y_n(\mu R_2) - Y_n(\mu R_1)J_n(\mu R_2) = 0.
$$

5.4.2-5. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Вторая краевая задача.

Рассматривается кольцевая область. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f_0(r,\varphi) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,\varphi) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_r w &= g_1(\varphi,t) &&\text{при}\quad r=R_1 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_r w &= g_2(\varphi,t) &&\text{при}\quad r=R_2 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(r,\varphi,t) = {} & \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\!\!\int_{R_1}^{R_2} f_0(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta \,+\\
&+\int_0^{2\pi}\!\!\int_{R_1}^{R_2}\bigl[f_1(\xi,\eta)+kf_0(\xi,\eta)\bigr]G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta \,-\\
&-a^2R_1\int_0^t\!\!\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\tau)G(r,\varphi,R_1,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau \,+\\
&+a^2R_2\int_0^t\!\!\int_0^{2\pi} g_2(\eta,\tau)G(r,\varphi,R_2,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau \,+\\
&+\int_0^t\!\!\int_0^{2\pi}\!\!\int_{R_1}^{R_2}\Phi(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
G(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \exp\bigl(-\tfrac{1}{2}kt\bigr)\Biggl[&\frac{\sin\bigl(t\sqrt{b-\frac14k^2}\,\bigr)}{\pi(R_2^2-R_1^2)\sqrt{b-\frac14k^2}} \,+\\
&+\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_n\mu_{nm}^2 Z_n(\mu_{nm}r)Z_n(\mu_{nm}\xi)\cos\bigl[n(\varphi-\eta)\bigr]\sin\bigl(t\sqrt{a^2\mu_{nm}^2+b-\frac14k^2}\,\bigr)}{\bigl[(\mu_{nm}^2R_2^2-n^2)Z_n^2(\mu_{nm}R_2)-(\mu_{nm}^2R_1^2-n^2)Z_n^2(\mu_{nm}R_1)\bigr]\sqrt{a^2\mu_{nm}^2+b-\frac14k^2}}\Biggr],
\end{aligned}
$$

где

$$
Z_n(\mu_{nm}r)=J_n'(\mu_{nm}R_1)Y_n(\mu_{nm}r)-Y_n'(\mu_{nm}R_1)J_n(\mu_{nm}r),\qquad A_n=\begin{cases}1 & \text{при}\ \ n=0,\\ 2 & \text{при}\ \ n>0,\end{cases}
$$

$J_n(r)$ и $Y_n(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$
J_n'(\mu R_1)Y_n'(\mu R_2)-Y_n'(\mu R_1)J_n'(\mu R_2)=0.
$$

5.4.2-6. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Третья краевая задача.

Рассматривается кольцевая область. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f_0(r,\varphi) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,\varphi) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_r w - k_1 w &= g_1(\varphi,t) &&\text{при}\quad r=R_1 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_r w + k_2 w &= g_2(\varphi,t) &&\text{при}\quad r=R_2 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение $w(r,\varphi,t)$ определяется по формуле из разд. 5.4.2-5, где

$$
G(r,\varphi,\xi,\eta,t)=\frac{1}{\pi}\exp\bigl(-\tfrac12kt\bigr)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_n\mu_{nm}^2}{B_{nm}\lambda_{nm}}Z_n(\mu_{nm}r)Z_n(\mu_{nm}\xi)\cos\bigl[n(\varphi-\eta)\bigr]\sin(\lambda_{nm}t).
$$

Здесь

$$
\begin{gathered}
A_n=\begin{cases}1 & \text{при}\ \ n=0,\\ 2 & \text{при}\ \ n>0,\end{cases}\qquad \lambda_{nm}=\sqrt{a^2\mu_{nm}^2+b-\tfrac14k^2},\\
B_{nm}=(k_2^2R_2^2+\mu_{nm}^2R_2^2-n^2)Z_n^2(\mu_{nm}R_2)-(k_1^2R_1^2+\mu_{nm}^2R_1^2-n^2)Z_n^2(\mu_{nm}R_1),\\
\begin{aligned}
Z_n(\mu_{nm}r)={}&\bigl[\mu_{nm}J_n'(\mu_{nm}R_1)-k_1J_n(\mu_{nm}R_1)\bigr]Y_n(\mu_{nm}r)\,-\\
&-\bigl[\mu_{nm}Y_n'(\mu_{nm}R_1)-k_1Y_n(\mu_{nm}R_1)\bigr]J_n(\mu_{nm}r),
\end{aligned}
\end{gathered}
$$

где $J_n(r)$ и $Y_n(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\big[\mu J_n'(\mu R_1) - k_1 J_n(\mu R_1)\big]\big[\mu Y_n'(\mu R_2) + k_2 Y_n(\mu R_2)\big] = \\ = \big[\mu Y_n'(\mu R_1) - k_1 Y_n(\mu R_1)\big]\big[\mu J_n'(\mu R_2) + k_2 J_n(\mu R_2)\big].$$

5.4.2-7. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$. Первая краевая задача.

Рассматривается сектор круга. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r,\varphi) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(r,\varphi) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(\varphi,t) &&\text{при}\quad r=R &&\text{(граничное условие)},\\ w &= g_2(r,t) &&\text{при}\quad \varphi=0 &&\text{(граничное условие)},\\ w &= g_3(r,t) &&\text{при}\quad \varphi=\varphi_0 &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,\varphi,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\varphi_0}\!\!\int_0^R f_0(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,+\\ &+\int_0^{\varphi_0}\!\!\int_0^R \big[f_1(\xi,\eta)+kf_0(\xi,\eta)\big]G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,-\\ &-a^2R\int_0^t\!\!\int_0^{\varphi_0} g_1(\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\xi=R}d\eta\,d\tau\,+\\ &+a^2\int_0^t\!\!\int_0^R g_2(\xi,\tau)\frac{1}{\xi}\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\eta=0}d\xi\,d\tau\,-\\ &-a^2\int_0^t\!\!\int_0^R g_3(\xi,\tau)\frac{1}{\xi}\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\Big]_{\eta=\varphi_0}d\xi\,d\tau\,+\\ &+\int_0^t\!\!\int_0^{\varphi_0}\!\!\int_0^R \Phi(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau. \end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,\varphi,\xi,\eta,t) = \frac{4}{R^2\varphi_0}\exp\!\big(-\tfrac12 kt\big)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}r)J_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}\xi)}{[J'_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}R)]^2}\times \\ \times\sin\Big(\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\Big)\sin\Big(\frac{n\pi\eta}{\varphi_0}\Big)\frac{\sin\big(t\sqrt{a^2\mu_{nm}^2+b-\frac14 k^2}\,\big)}{\sqrt{a^2\mu_{nm}^2+b-\frac14 k^2}},$$

где $J_{n\pi/\varphi_0}(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_{n\pi/\varphi_0}(\mu R) = 0$.

5.4.2-8. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$. Вторая краевая задача.

Рассматривается сектор круга. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r,\varphi) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(r,\varphi) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_r w &= g_1(\varphi,t) &&\text{при}\quad r=R &&\text{(граничное условие)},\\ r^{-1}\partial_\varphi w &= g_2(r,t) &&\text{при}\quad \varphi=0 &&\text{(граничное условие)},\\ r^{-1}\partial_\varphi w &= g_3(r,t) &&\text{при}\quad \varphi=\varphi_0 &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(r,\varphi,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\varphi_0}\int_0^R f_0(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta + \\
&+ \int_0^{\varphi_0}\int_0^R \bigl[f_1(\xi,\eta)+kf_0(\xi,\eta)\bigr]G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta + \\
&+ a^2R\int_0^t\int_0^{\varphi_0} g_1(\eta,\tau)G(r,\varphi,R,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau - \\
&- a^2\int_0^t\int_0^R g_2(\xi,\tau)G(r,\varphi,\xi,0,t-\tau)\,d\xi\,d\tau + \\
&+ a^2\int_0^t\int_0^R g_3(\xi,\tau)G(r,\varphi,\xi,\varphi_0,t-\tau)\,d\xi\,d\tau + \\
&+ \int_0^t\int_0^{\varphi_0}\int_0^R \Phi(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau.
\end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,\varphi,\xi,\eta,t)=\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}kt\bigr)\left[\frac{2\sin\bigl(t\sqrt{b-\frac14k^2}\bigr)}{R^2\varphi_0\sqrt{b-\frac14k^2}}+4\varphi_0\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu_{nm}^2J_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}r)J_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}\xi)}{(R^2\varphi_0^2\mu_{nm}^2-n^2\pi^2)J^2_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}R)}\times\right.$$

$$\left.\times\cos\Bigl(\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{n\pi\eta}{\varphi_0}\Bigr)\frac{\sin\bigl(t\sqrt{a^2\mu_{nm}^2+b-\frac14k^2}\bigr)}{\sqrt{a^2\mu_{nm}^2+b-\frac14k^2}}\right],$$

где $J_{n\pi/\varphi_0}(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J'_{n\pi/\varphi_0}(\mu R)=0$.

5.4.2-9. Область: $0\leqslant r\leqslant R,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0$. Смешанная краевая задача.

Рассматривается сектор круга. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(r,\varphi) && \text{при}\quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,\varphi) && \text{при}\quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_r w - kw &= g(\varphi,t) && \text{при}\quad r=R && \text{(граничное условие)},\\
\partial_\varphi w &= 0 && \text{при}\quad \varphi=0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_\varphi w &= 0 && \text{при}\quad \varphi=\varphi_0 && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(r,\varphi,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\varphi_0}\int_0^R f_0(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta + \\
&+ \int_0^{\varphi_0}\int_0^R \bigl[f_1(\xi,\eta)+kf_0(\xi,\eta)\bigr]G(r,\varphi,\xi,\eta,t)\xi\,d\xi\,d\eta + \\
&+ a^2R\int_0^t\int_0^{\varphi_0} g(\eta,\tau)G(r,\varphi,R,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau + \\
&+ \int_0^t\int_0^{\varphi_0}\int_0^R \Phi(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,\xi,\eta,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau.
\end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,\varphi,\xi,\eta,t)=\exp\bigl(-\tfrac12kt\bigr)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{nm}J_{s_n}(\mu_{nm}r)J_{s_n}(\mu_{nm}\xi)\cos(s_n\varphi)\cos(s_n\eta)\sin\bigl(\lambda_{nm}t\bigr),$$

$$s_n=\frac{n\pi}{\varphi_0},\qquad A_{nm}=\frac{4\mu_{nm}^2}{\varphi_0(\mu_{nm}^2R^2+k^2R^2-s_n^2)\bigl[J_{s_n}(\mu_{nm}R)\bigr]^2\lambda_{nm}},\qquad \lambda_{nm}=\sqrt{a^2\mu_{nm}^2+b-\tfrac14k^2},$$

где $J_{s_n}(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\mu J'_{s_n}(\mu R)+kJ_{s_n}(\mu R)=0.$$

5.4.3. Осесимметричные задачи

В осесимметричном случае неоднородное телеграфное уравнение в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k\frac{\partial w}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) - bw + \Phi(r,z,t), \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

В решениях рассматриваемых ниже задач для удобства использована модифицированная функция Грина $\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t) = 2\pi\xi G(r,z,\xi,\eta,t)$.

5.4.3-1. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Первая краевая задача.

Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(r,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(z,t) &&\text{при}\quad r=R &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(r,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_3(r,t) &&\text{при}\quad z=l &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(r,z,t) = {}& \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\int_0^R f_0(\xi,\eta)\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta + \\
&+ \int_0^l\int_0^R \big[f_1(\xi,\eta) + kf_0(\xi,\eta)\big]\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta - \\
&- a^2\int_0^t\int_0^l g_1(\eta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\right]_{\xi=R} d\eta\,d\tau + \\
&+ a^2\int_0^t\int_0^R g_2(\xi,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\right]_{\eta=0} d\xi\,d\tau - \\
&- a^2\int_0^t\int_0^R g_3(\xi,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\right]_{\eta=l} d\xi\,d\tau + \\
&+ \int_0^t\int_0^l\int_0^R \Phi(\xi,\eta,\tau)\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t) = \frac{4\xi e^{-kt/2}}{R^2 l}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{J_1^2(\mu_n)}J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)J_0\left(\frac{\mu_n\xi}{R}\right)\sin\left(\frac{m\pi z}{l}\right)\sin\left(\frac{m\pi\eta}{l}\right)\frac{\sin(\lambda_{nm}t)}{\lambda_{nm}},$$

$$\lambda_{nm} = \sqrt{\frac{a^2\mu_n^2}{R^2} + \frac{a^2\pi^2 m^2}{l^2} + b - \frac{k^2}{4}},$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $J_0(\mu) = 0$.

5.4.3-2. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Вторая краевая задача.

Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(r,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_r w &= g_1(z,t) &&\text{при}\quad r=R &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_2(r,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_3(r,t) &&\text{при}\quad z=l &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(r,z,t) = {} & \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\int_0^R f_0(\xi,\eta)\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta + \\
& + \int_0^l\int_0^R \bigl[f_1(\xi,\eta)+kf_0(\xi,\eta)\bigr]\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta + \\
& + a^2\int_0^t\int_0^l g_1(\eta,\tau)\mathcal{G}(r,z,R,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau - \\
& - a^2\int_0^t\int_0^R g_2(\xi,\tau)\mathcal{G}(r,z,\xi,0,t-\tau)\,d\xi\,d\tau + \\
& + a^2\int_0^t\int_0^R g_3(\xi,\tau)\mathcal{G}(r,z,\xi,l,t-\tau)\,d\xi\,d\tau + \\
& + \int_0^t\int_0^l\int_0^R \Phi(\xi,\eta,\tau)\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t) = 2\xi\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}kt\bigr)\biggl[\frac{\sin(t\sqrt{c})}{R^2l\sqrt{c}} + \frac{1}{R^2l}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_{nm}}{J_0^2(\mu_n)}J_0\Bigl(\frac{\mu_n r}{R}\Bigr)J_0\Bigl(\frac{\mu_n\xi}{R}\Bigr)\times \\
\times\cos\Bigl(\frac{m\pi z}{l}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{m\pi\eta}{l}\Bigr)\frac{\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_{nm}}\,\bigr)}{\sqrt{\lambda_{nm}}}\biggr],
\end{aligned}
$$

где

$$
c = b - \frac{k^2}{4},\quad \lambda_{nm} = \frac{a^2\mu_n^2}{R^2} + \frac{a^2\pi^2m^2}{l^2} + b - \frac{k^2}{4},\quad A_{nm} = \begin{cases} 0 & \text{при } m=0,\ n=0,\\ 1 & \text{при } m=0,\ n>0,\\ 2 & \text{при } m>0,\end{cases}
$$

μ_n — корни трансцендентного уравнения $J_1(\mu)=0$ $(\mu_0=0)$.

5.4.3-3. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Третья краевая задача.

Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f_0(r,z) && \text{при}\quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,z) && \text{при}\quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_r w - s_1 w &= g_1(z,t) && \text{при}\quad r=R && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w - s_2 w &= g_2(r,t) && \text{при}\quad z=0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w + s_3 w &= g_3(r,t) && \text{при}\quad z=l && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение $w(r,z,t)$ определяется по формуле из разд. 5.4.3-2, где

$$
\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t) = \frac{2\xi}{R^2}\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}kt\bigr)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_nJ_0\Bigl(\frac{\mu_n r}{R}\Bigr)J_0\Bigl(\frac{\mu_n\xi}{R}\Bigr)\frac{\varphi_m(z)\varphi_m(\eta)}{\|\varphi_m\|^2}\frac{\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_{nm}}\,\bigr)}{\sqrt{\lambda_{nm}}}.
$$

Здесь

$$
A_n = \frac{\mu_n^2}{(s_1^2R^2+\mu_n^2)J_0^2(\mu_n)},\qquad \lambda_{nm} = \frac{a^2\mu_n^2}{R^2} + a^2\beta_m^2 + b - \frac{k^2}{4},
$$

$$
\varphi_m(z) = \cos(\beta_m z) + \frac{s_2}{\beta_m}\sin(\beta_m z),\quad \|\varphi_m\|^2 = \frac{s_3}{2\beta_m^2}\,\frac{\beta_m^2+s_2^2}{\beta_m^2+s_3^2} + \frac{s_2}{2\beta_m^2} + \frac{l}{2}\Bigl(1+\frac{s_2^2}{\beta_m^2}\Bigr);
$$

μ_n и β_m — положительные корни трансцендентных уравнений

$$
\mu J_1(\mu) - s_1RJ_0(\mu) = 0,\qquad \frac{\operatorname{tg}(\beta l)}{\beta} = \frac{s_2+s_3}{\beta^2 - s_2s_3}.
$$

5.4.3-4. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Смешанные краевые задачи.

1°. Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(r,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(z,t) &&\text{при}\quad r=R &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_2(r,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_3(r,t) &&\text{при}\quad z=l &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(r,z,t) = {}&\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\int_0^R f_0(\xi,\eta)\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta+\\
&+\int_0^l\int_0^R \bigl[f_1(\xi,\eta)+kf_0(\xi,\eta)\bigr]\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta-\\
&-a^2\int_0^t\int_0^l g_1(\eta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=R}\,d\eta\,d\tau-\\
&-a^2\int_0^t\int_0^R g_2(\xi,\tau)\mathcal{G}(r,z,\xi,0,t-\tau)\,d\xi\,d\tau+\\
&+a^2\int_0^t\int_0^R g_3(\xi,\tau)\mathcal{G}(r,z,\xi,l,t-\tau)\,d\xi\,d\tau+\\
&+\int_0^t\int_0^l\int_0^R \Phi(\xi,\eta,\tau)\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t)=\frac{2\xi e^{-kt/2}}{R^2 l}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_m}{J_1^2(\mu_n)}J_0\Bigl(\frac{\mu_n r}{R}\Bigr)J_0\Bigl(\frac{\mu_n\xi}{R}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{m\pi z}{l}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{m\pi\eta}{l}\Bigr)\frac{\sin(\lambda_{nm}t)}{\lambda_{nm}},$$

$$\lambda_{nm}=\sqrt{\frac{a^2\mu_n^2}{R^2}+\frac{a^2\pi^2m^2}{l^2}+b-\frac{k^2}{4}},\qquad A_m=\begin{cases}1 & \text{при}\ m=0,\\ 2 & \text{при}\ m>0,\end{cases}$$

где μ_n — корни трансцендентного уравнения $J_0(\mu)=0$.

2°. Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(r,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_r w &= g_1(z,t) &&\text{при}\quad r=R &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(r,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_3(r,t) &&\text{при}\quad z=l &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(r,z,t) = {}&\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\int_0^R f_0(\xi,\eta)\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta+\\
&+\int_0^l\int_0^R \bigl[f_1(\xi,\eta)+kf_0(\xi,\eta)\bigr]\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta+\\
&+a^2\int_0^t\int_0^l g_1(\eta,\tau)\mathcal{G}(r,z,R,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\tau+\\
&+a^2\int_0^t\int_0^R g_2(\xi,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta}\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\Bigr]_{\eta=0}\,d\xi\,d\tau-\\
&-a^2\int_0^t\int_0^R g_3(\xi,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta}\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\Bigr]_{\eta=l}\,d\xi\,d\tau+\\
&+\int_0^t\int_0^l\int_0^R \Phi(\xi,\eta,\tau)\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t)=\frac{4\xi e^{-kt/2}}{R^2l}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{J_0^2(\mu_n)}J_0\Bigl(\frac{\mu_n r}{R}\Bigr)J_0\Bigl(\frac{\mu_n\xi}{R}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{m\pi z}{l}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{m\pi\eta}{l}\Bigr)\frac{\sin(\lambda_{nm}t)}{\lambda_{nm}},$$

$$\lambda_{nm}=\sqrt{\frac{a^2\mu_n^2}{R^2}+\frac{a^2\pi^2m^2}{l^2}+b-\frac{k^2}{4}},$$

где μ_n — корни трансцендентного уравнения $J_1(\mu)=0$ $(\mu_0=0)$.

5.4.3-5. Область: $R_1\leqslant r\leqslant R_2,\ 0\leqslant z\leqslant l$. Первая краевая задача.

Рассматривается полый круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w&=f_0(r,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w&=f_1(r,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
w&=g_1(z,t) &&\text{при}\quad r=R_1 &&\text{(граничное условие)},\\
w&=g_2(z,t) &&\text{при}\quad r=R_2 &&\text{(граничное условие)},\\
w&=g_3(r,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\
w&=g_4(r,t) &&\text{при}\quad z=l &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(r,z,t)={}&\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\int_{R_1}^{R_2}f_0(\xi,\eta)\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta+\\
&+\int_0^l\int_{R_1}^{R_2}\bigl[f_1(\xi,\eta)+kf_0(\xi,\eta)\bigr]\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta+\\
&+a^2\int_0^t\int_0^l g_1(\eta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=R_1}d\eta\,d\tau-\\
&-a^2\int_0^t\int_0^l g_2(\eta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=R_2}d\eta\,d\tau+\\
&+a^2\int_0^t\int_{R_1}^{R_2}g_3(\xi,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta}\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\Bigr]_{\eta=0}d\xi\,d\tau-\\
&-a^2\int_0^t\int_{R_1}^{R_2}g_4(\xi,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta}\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\Bigr]_{\eta=l}d\xi\,d\tau+\\
&+\int_0^t\int_0^l\int_{R_1}^{R_2}\Phi(\xi,\eta,\tau)\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\mathcal{G}(r,z,\xi,\eta,t)=\frac{\pi^2\xi}{R_1^2l}e^{-kt/2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2J_0^2(s\mu_n)\Psi_n(r)\Psi_n(\xi)}{J_0^2(\mu_n)-J_0^2(s\mu_n)}\sin\Bigl(\frac{m\pi z}{l}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{m\pi\eta}{l}\Bigr)\frac{\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_{nm}}\bigr)}{\sqrt{\lambda_{nm}}},$$

$$\Psi_n(r)=Y_0(\mu_n)J_0\Bigl(\frac{\mu_n r}{R_1}\Bigr)-J_0(\mu_n)Y_0\Bigl(\frac{\mu_n r}{R_1}\Bigr),\quad s=\frac{R_2}{R_1},\quad \lambda_{nm}=\frac{a^2\mu_n^2}{R_1^2}+\frac{a^2\pi^2m^2}{l^2}+b-\frac{k^2}{4},$$

где $J_0(\mu)$ и $Y_0(\mu)$ — функции Бесселя, μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_0(\mu)Y_0(s\mu)-J_0(s\mu)Y_0(\mu)=0.$$

5.5. Другие уравнения с двумя пространственными переменными

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}+k\dfrac{\partial w}{\partial t}=a^2\Bigl(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Bigr)+b_1\dfrac{\partial w}{\partial x}+b_2\dfrac{\partial w}{\partial y}+cw.$

Преобразование

$$w(x,y,t)=u(x,y,\tau)\exp\Bigl(-\frac{1}{2}kt-\frac{b_1x+b_2y}{2a^2}\Bigr),\quad \tau=at$$

приводит к уравнению из разд. 5.1.3:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \beta u, \qquad \beta = \frac{c}{a^2} + \frac{k^2}{4a^2} - \frac{1}{4a^4}(b_1^2 + b_2^2).$$

2. $\boldsymbol{t^m \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \dfrac{m}{2} t^{m-1} \dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}.}$

Область: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$. Задача Коши.

Заданы начальные условия:

$$w = f(x,y) \quad \text{при} \quad t = 0,$$
$$t^{m/2}\partial_t w = g(x,y) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Решение при $1 \leqslant m < 2$:

$$w(x,y,t) = \frac{1}{2\pi} t^{m/2} \frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{C_t} \frac{f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{k_m^2 t^{2-m} - \rho^2}} + \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{C_t} \frac{g(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{k_m^2 t^{2-m} - \rho^2}},$$

$$k_m = \frac{2}{2-m}, \quad \rho = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2},$$

где $C_t = \{\rho^2 \leqslant k_m^2 t^{2-m}\}$ — круг с центром в точке (x,y) и радиусом $k_m t^{1/k_m}$.

⊙ *Литература*: М. М. Смирнов (1975, стр. 15–16, 61).

6. Уравнения гиперболического типа с тремя и более пространственными переменными

6.1. Волновое уравнение $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\Delta_3 w$

6.1.1. Задачи в декартовой системе координат

Волновое уравнение с тремя пространственными переменными в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right).$$

Это уравнение имеет фундаментальное значение в теории распространения звука, в теории распространения электромагнитных полей и ряде других областей физики и механики.

6.1.1-1. Частные решения и их свойства.

1°. Частные решения:

$$w(x,y,z,t) = A\exp\Bigl(k_1x + k_2y + k_3z + at\sqrt{k_1^2+k_2^2+k_3^2}\Bigr),$$

$$w(x,y,z,t) = A\sin(k_1x+C_1)\sin(k_2y+C_2)\sin(k_3z+C_3)\sin\Bigl(at\sqrt{k_1^2+k_2^2+k_3^2}\Bigr),$$

$$w(x,y,z,t) = A\sin(k_1x+C_1)\sin(k_2y+C_2)\sin(k_3z+C_3)\cos\Bigl(at\sqrt{k_1^2+k_2^2+k_3^2}\Bigr),$$

где A, C_1, C_2, C_3, k_1, k_2, k_3 — произвольные постоянные.

2°. Фундаментальное решение:

$$\mathscr{E}(x,y,z,t) = \frac{1}{2\pi a}\delta(a^2t^2 - r^2), \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

где $\delta(\xi)$ — дельта-функция.

⊙ *Литература*: В. С. Владимиров (1971, стр. 206).

3°. Решения в виде бесконечных рядов, содержащие произвольные функции пространственных переменных:

$$w(x,y,z,t) = f(x,y,z) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(at)^{2n}}{(2n)!}\Delta^n f(x,y,z), \qquad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$w(x,y,z,t) = tg(x,y,z) + t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(at)^{2n}}{(2n+1)!}\Delta^n g(x,y,z),$$

где $f(x,y,z)$ и $g(x,y,z)$ — любые бесконечно дифференцируемые функции. Первое решение удовлетворяет начальным условиям $w(x,y,z,0) = f(x,y,z)$, $\partial_t w(x,y,z,0) = 0$, а второе — начальным условиям $w(x,y,z,0) = 0$, $\partial_t w(x,y,z,0) = g(x,y,z)$. Суммы будут конечными, если $f(x,y,z)$ и $g(x,y,z)$ являются полиномами.

⊙ *Литература*: А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко (1985, стр. 63).

4°. Пусть $w = w(x,y,z,t)$ — некоторое решение волнового уравнения. Тогда функции

$$w_1 = Aw(\pm\lambda x + b_1,\ \pm\lambda y + b_2,\ \pm\lambda z + b_3,\ \pm\lambda t + b_4),$$

$$w_2 = Aw\left(\frac{x - vt}{\sqrt{1-(v/a)^2}},\ y,\ z,\ \frac{t - va^{-2}x}{\sqrt{1-(v/a)^2}}\right),$$

$$w_3 = \frac{A}{r^2 - a^2t^2}w\left(\frac{x}{r^2-a^2t^2},\ \frac{y}{r^2-a^2t^2},\ \frac{z}{r^2-a^2t^2},\ \frac{t}{r^2-a^2t^2}\right),$$

где A, v, b_1, b_2, b_3, b_4, λ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

Знаки при λ в формуле для w_1 выбираются произвольно независимо друг от друга. Функция w_2 получена как следствие инвариантности волнового уравнения по отношению к преобразованию Лоренца.

⦿ *Литература*: Г. Н. Положий (1964, стр. 273–274), У. Миллер (1981, стр. 292–295), А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко (1985, стр. 70).

6.1.1-2. Область: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$. Задача Коши.

Заданы начальные условия:

$$w = f(x,y,z) \quad \text{при} \quad t = 0,$$
$$\partial_t w = g(x,y,z) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Решение (формула Кирхгофа):

$$w(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_{at}} \frac{f(\xi,\eta,\zeta)}{r}\,dS + \frac{1}{4\pi a}\iint\limits_{S_{at}} \frac{g(\xi,\eta,\zeta)}{r}\,dS,$$
$$r = \sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2},$$

где интегрирование проводится по поверхности сферы радиуса at с центром в точке (x,y,z).

⦿ *Литература*: А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972, стр. 407), Н. С. Кошляков, Э. Б. Глизер, М. М. Смирнов (1970, стр. 100).

6.1.1-3. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, $0 \leqslant z \leqslant l_3$. Первая краевая задача.

Рассматривается прямоугольный параллелепипед. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(x,y,z) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(x,y,z) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(y,z,t) && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(y,z,t) && \text{при} \quad x = l_1 && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_3(x,z,t) && \text{при} \quad y = 0 && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_4(x,z,t) && \text{при} \quad y = l_2 && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_5(x,y,t) && \text{при} \quad z = 0 && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_6(x,y,t) && \text{при} \quad z = l_3 && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(x,y,z,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_2}\!\!\int_0^{l_1} & f_0(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,+\\
+\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_2}\!\!\int_0^{l_1} & f_1(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,+\\
+\,a^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_2} & g_1(\eta,\zeta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=0}d\eta\,d\zeta\,d\tau\,-\\
-\,a^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_2} & g_2(\eta,\zeta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=l_1}d\eta\,d\zeta\,d\tau\,+\\
+\,a^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_1} & g_3(\xi,\zeta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\eta=0}d\xi\,d\zeta\,d\tau\,-\\
-\,a^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_1} & g_4(\xi,\zeta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\eta=l_2}d\xi\,d\zeta\,d\tau\,+\\
+\,a^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{l_2}\!\!\int_0^{l_1} & g_5(\xi,\eta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\zeta=0}d\xi\,d\eta\,d\tau\,-\\
-\,a^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{l_2}\!\!\int_0^{l_1} & g_6(\xi,\eta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\zeta=l_3}d\xi\,d\eta\,d\tau,
\end{aligned}$$

где

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{8}{al_1l_2l_3}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{nmk}}\sin(\alpha_n x)\sin(\beta_m y)\sin(\gamma_k z)\times$$
$$\times\sin(\alpha_n\xi)\sin(\beta_m\eta)\sin(\gamma_k\zeta)\sin(a\lambda_{nmk}t),$$

Здесь
$$\alpha_n = \frac{n\pi}{l_1}, \quad \beta_m = \frac{m\pi}{l_2}, \quad \gamma_k = \frac{k\pi}{l_3}, \quad \lambda_{nmk} = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_m^2 + \gamma_k^2}.$$

6.1.1-4. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, $0 \leqslant z \leqslant l_3$. Вторая краевая задача.

Рассматривается прямоугольный параллелепипед. Заданы следующие условия:
$$\begin{aligned}
w &= f_0(x,y,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(x,y,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_x w &= g_1(y,z,t) && \text{при} \quad x=0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_x w &= g_2(y,z,t) && \text{при} \quad x=l_1 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_3(x,z,t) && \text{при} \quad y=0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_4(x,z,t) && \text{при} \quad y=l_2 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_5(x,y,t) && \text{при} \quad z=0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_6(x,y,t) && \text{при} \quad z=l_3 && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:
$$\begin{aligned}
w(x,y,z,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{l_3}\!\int_0^{l_2}\!\int_0^{l_1} f_0(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta \,+\\
&+ \int_0^{l_3}\!\int_0^{l_2}\!\int_0^{l_1} f_1(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta \,-\\
&- a^2\int_0^{t}\!\int_0^{l_3}\!\int_0^{l_2} g_1(\eta,\zeta,\tau)G(x,y,z,0,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau \,+\\
&+ a^2\int_0^{t}\!\int_0^{l_3}\!\int_0^{l_2} g_2(\eta,\zeta,\tau)G(x,y,z,l_1,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau \,-\\
&- a^2\int_0^{t}\!\int_0^{l_3}\!\int_0^{l_1} g_3(\xi,\zeta,\tau)G(x,y,z,\xi,0,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\tau \,+\\
&+ a^2\int_0^{t}\!\int_0^{l_3}\!\int_0^{l_1} g_4(\xi,\zeta,\tau)G(x,y,z,\xi,l_2,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\tau \,-\\
&- a^2\int_0^{t}\!\int_0^{l_2}\!\int_0^{l_1} g_5(\xi,\eta,\tau)G(x,y,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau \,+\\
&+ a^2\int_0^{t}\!\int_0^{l_2}\!\int_0^{l_1} g_6(\xi,\eta,\tau)G(x,y,z,\xi,\eta,l_3,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau,
\end{aligned}$$
где
$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{t}{l_1l_2l_3} + \frac{1}{al_1l_2l_3}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A_nA_mA_k}{\lambda_{nmk}}\cos(\alpha_n x)\cos(\beta_m y)\cos(\gamma_k z)\times$$
$$\times\cos(\alpha_n\xi)\cos(\beta_m\eta)\cos(\gamma_k\zeta)\sin(a\lambda_{nmk}t),$$
$$\alpha_n = \frac{n\pi}{l_1}, \quad \beta_m = \frac{m\pi}{l_2}, \quad \gamma_k = \frac{k\pi}{l_3}, \quad \lambda_{nmk} = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_m^2 + \gamma_k^2}, \quad A_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n=0,\\ 2 & \text{при } n>0.\end{cases}$$
Здесь суммируются члены, удовлетворяющие условию $n+m+k>0$ (член, соответствующий $n=m=k=0$, выделен отдельно).

6.1.1-5. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, $0 \leqslant z \leqslant l_3$. Третья краевая задача.

Рассматривается прямоугольный параллелепипед. Заданы следующие условия:
$$\begin{aligned}
w &= f_0(x,y,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(x,y,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_x w - s_1 w &= g_1(y,z,t) && \text{при} \quad x=0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_x w + s_2 w &= g_2(y,z,t) && \text{при} \quad x=l_1 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_y w - s_3 w &= g_3(x,z,t) && \text{при} \quad y=0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_y w + s_4 w &= g_4(x,z,t) && \text{при} \quad y=l_2 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w - s_5 w &= g_5(x,y,t) && \text{при} \quad z=0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w + s_6 w &= g_6(x,y,t) && \text{при} \quad z=l_3 && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение $w(x,y,z,t)$ определяется по формуле из разд. 6.1.1-4, где

$$G(x,y,\xi,\eta,t)=\frac{8}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{E_{nmk}\sqrt{\alpha_n^2+\beta_m^2+\gamma_k^2}}\sin(\alpha_n x+\varepsilon_n)\sin(\beta_m y+\sigma_m)\sin(\gamma_k z+\nu_k)\times$$
$$\times\sin(\alpha_n\xi+\varepsilon_n)\sin(\beta_m\eta+\sigma_m)\sin(\gamma_k\zeta+\nu_k)\sin\bigl(at\sqrt{\alpha_n^2+\beta_m^2+\gamma_k^2}\bigr).$$

Здесь

$$\varepsilon_n=\operatorname{arctg}\frac{\alpha_n}{l_1},\quad \sigma_m=\operatorname{arctg}\frac{\beta_m}{l_2},\quad \nu_k=\operatorname{arctg}\frac{\gamma_k}{l_3},$$
$$E_{nmk}=\left[l_1+\frac{(s_1s_2+\alpha_n^2)(s_1+s_2)}{(s_1^2+\alpha_n^2)(s_2^2+\alpha_n^2)}\right]\left[l_2+\frac{(s_3s_4+\beta_m^2)(s_3+s_4)}{(s_3^2+\beta_m^2)(s_4^2+\beta_m^2)}\right]\left[l_3+\frac{(s_5s_6+\gamma_k^2)(s_5+s_6)}{(s_5^2+\gamma_k^2)(s_6^2+\gamma_k^2)}\right],$$

где α_n, β_m, γ_k — положительные корни трансцендентных уравнений

$$\alpha^2-s_1s_2=(s_1+s_2)\alpha\operatorname{ctg}(l_1\alpha),\quad \beta^2-s_3s_4=(s_3+s_4)\beta\operatorname{ctg}(l_2\beta),\quad \gamma^2-s_5s_6=(s_5+s_6)\gamma\operatorname{ctg}(l_3\gamma).$$

6.1.1-6. Область: $0\leqslant x\leqslant l_1$, $0\leqslant y\leqslant l_2$, $0\leqslant z\leqslant l_3$. Смешанные краевые задачи.

1°. Рассматривается прямоугольный параллелепипед. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w&=f_0(x,y,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w&=f_1(x,y,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
w&=g_1(y,z,t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\
w&=g_2(y,z,t) &&\text{при}\quad x=l_1 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_y w&=g_3(x,z,t) &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_y w&=g_4(x,z,t) &&\text{при}\quad y=l_2 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w&=g_5(x,y,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w&=g_6(x,y,t) &&\text{при}\quad z=l_3 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(x,y,z,t)&=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_2}\!\!\int_0^{l_1} f_0(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta+\\
&+\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_2}\!\!\int_0^{l_1} f_1(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta+\\
&+a^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_2} g_1(\eta,\zeta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=0}d\eta\,d\zeta\,d\tau-\\
&-a^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_2} g_2(\eta,\zeta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=l_1}d\eta\,d\zeta\,d\tau-\\
&-a^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_1} g_3(\xi,\zeta,\tau)G(x,y,z,\xi,0,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\tau+\\
&+a^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_1} g_4(\xi,\zeta,\tau)G(x,y,z,\xi,l_2,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\tau-\\
&-a^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{l_2}\!\!\int_0^{l_1} g_5(\xi,\eta,\tau)G(x,y,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau+\\
&+a^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{l_2}\!\!\int_0^{l_1} g_6(\xi,\eta,\tau)G(x,y,z,\xi,\eta,l_3,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau.
\end{aligned}$$

Здесь

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)=\frac{2}{al_1l_2l_3}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A_mA_k}{\lambda_{nmk}}\sin(\alpha_n x)\cos(\beta_m y)\cos(\gamma_k z)\times$$
$$\times\sin(\alpha_n\xi)\cos(\beta_m\eta)\cos(\gamma_k\zeta)\sin(a\lambda_{nmk}t),$$

где

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{l_1}, \qquad \beta_m = \frac{m\pi}{l_2}, \qquad \gamma_k = \frac{k\pi}{l_3},$$
$$\lambda_{nmk} = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_m^2 + \gamma_k^2}, \quad A_m = \begin{cases} 1 & \text{при } m = 0, \\ 2 & \text{при } m > 0. \end{cases}$$

2°. Рассматривается прямоугольный параллелепипед. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(x,y,z) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(x,y,z) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(y,z,t) && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_x w &= g_2(y,z,t) && \text{при} \quad x = l_1 && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_3(x,z,t) && \text{при} \quad y = 0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_4(x,z,t) && \text{при} \quad y = l_2 && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_5(x,y,t) && \text{при} \quad z = 0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_6(x,y,t) && \text{при} \quad z = l_3 && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(x,y,z,t) = {}& \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_2}\!\!\int_0^{l_1} f_0(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta + \\
&+ \int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_2}\!\!\int_0^{l_1} f_1(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta + \\
&+ a^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_2} g_1(\eta,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\xi=0}d\eta\,d\zeta\,d\tau + \\
&+ a^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_2} g_2(\eta,\zeta,\tau)G(x,y,z,l_1,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau + \\
&+ a^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_1} g_3(\xi,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\eta=0}d\xi\,d\zeta\,d\tau + \\
&+ a^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_1} g_4(\xi,\zeta,\tau)G(x,y,z,\xi,l_2,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\tau + \\
&+ a^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{l_2}\!\!\int_0^{l_1} g_5(\xi,\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\zeta=0}d\xi\,d\eta\,d\tau + \\
&+ a^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{l_2}\!\!\int_0^{l_1} g_6(\xi,\eta,\tau)G(x,y,z,\xi,\eta,l_3,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau.
\end{aligned}$$

Здесь

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{8}{al_1l_2l_3}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{nmk}}\sin(\alpha_n x)\sin(\beta_m y)\sin(\gamma_k z)\times$$
$$\times\sin(\alpha_n\xi)\sin(\beta_m\eta)\sin(\gamma_k\zeta)\sin(a\lambda_{nmk}t),$$

где

$$\alpha_n = \frac{\pi(2n+1)}{2l_1}, \quad \beta_m = \frac{\pi(2m+1)}{2l_2}, \quad \gamma_k = \frac{\pi(2k+1)}{2l_3}, \quad \lambda_{nmk} = \sqrt{\alpha_n^2+\beta_m^2+\gamma_k^2}.$$

6.1.2. Задачи в цилиндрической системе координат

Волновое уравнение в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\Big[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial w}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\Big], \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Одномерные задачи с осевой симметрией, имеющие решения $w = w(r,t)$, рассматриваются в разд. 4.2.1. Двумерные задачи, решение которых имеет вид $w = w(r,\varphi,t)$ и $w = w(r,z,t)$, исследуются в разд. 5.1.2–5.1.3.

6.1.2-1. Область: $0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant z \leqslant l$. Первая краевая задача.

Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(r,\varphi,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,\varphi,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(\varphi,z,t) && \text{при} \quad r=R && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(r,\varphi,t) && \text{при} \quad z=0 && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_3(r,\varphi,t) && \text{при} \quad z=l && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(r,\varphi,z,t) = {}& \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi f_0(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta +\\
&+\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi f_1(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta -\\
&-a^2R\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=R}d\eta\,d\zeta\,d\tau +\\
&+a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi g_2(\xi,\eta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\zeta=0}d\xi\,d\eta\,d\tau -\\
&-a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi g_3(\xi,\eta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\zeta=l}d\xi\,d\eta\,d\tau.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{gathered}
G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{2}{\pi a R^2 l}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_n}{[J_n'(\mu_{nm}R)]^2\sqrt{\lambda_{nmk}}}J_n(\mu_{nm}r)J_n(\mu_{nm}\xi)\times\\
\times\cos[n(\varphi-\eta)]\sin\Bigl(\frac{k\pi z}{l}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{k\pi\zeta}{l}\Bigr)\sin\bigl(at\sqrt{\lambda_{nmk}}\bigr),\\
\lambda_{nmk} = \mu_{nm}^2 + \frac{k^2\pi^2}{l^2}, \qquad A_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n=0,\\ 2 & \text{при } n>0,\end{cases}
\end{gathered}$$

где $J_n(\xi)$ — функции Бесселя (штрих означает производную по аргументу), μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_n(\mu R) = 0$.

6.1.2-2. Область: $0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant z \leqslant l$. Вторая краевая задача.

Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(r,\varphi,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,\varphi,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_r w &= g_1(\varphi,z,t) && \text{при} \quad r=R && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_2(r,\varphi,t) && \text{при} \quad z=0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_3(r,\varphi,t) && \text{при} \quad z=l && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(r,\varphi,z,t) = {}& \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi f_0(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta +\\
&+\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi f_1(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta +\\
&+a^2R\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,R,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau -\\
&-a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi g_2(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau +\\
&+a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi g_3(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,l,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau.
\end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)=\frac{t}{\pi R^2 l}+\frac{2}{\pi^2 aR^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cos\Big(\frac{k\pi x}{l}\Big)\cos\Big(\frac{k\pi\xi}{l}\Big)\sin\Big(\frac{ak\pi t}{l}\Big)+$$

$$+\frac{1}{\pi l}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A_n A_k \mu_{nm}^2 J_n(\mu_{nm}r)J_n(\mu_{nm}\xi)}{(\mu_{nm}^2R^2-n^2)[J_n(\mu_{nm}R)]^2}\cos[n(\varphi-\eta)]\cos\Big(\frac{k\pi x}{l}\Big)\cos\Big(\frac{k\pi\xi}{l}\Big)\frac{\sin(\lambda_{nmk}t)}{\lambda_{nmk}},$$

$$\lambda_{nmk}=a\sqrt{\mu_{nm}^2+\frac{k^2\pi^2}{l^2}},\qquad A_n=\begin{cases}1 & \text{при } n=0,\\ 2 & \text{при } n>0,\end{cases}$$

где $J_n(\xi)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_n'(\mu R)=0$.

6.1.2-3. Область: $0\leqslant r\leqslant R,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant z\leqslant l$. Третья краевая задача.

Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(r,\varphi,z) && \text{при } t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,\varphi,z) && \text{при } t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_r w + k_1 w &= g(\varphi,z,t) && \text{при } r=R && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w - k_2 w &= g_2(r,\varphi,t) && \text{при } z=0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w + k_3 w &= g_3(r,\varphi,t) && \text{при } z=l && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение $w(r,\varphi,z,t)$ определяется по формуле из разд. 6.1.2-2, где

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{A_n\mu_{nm}^2J_n(\mu_{nm}r)J_n(\mu_{nm}\xi)\cos[n(\varphi-\eta)]h_s(z)h_s(\zeta)\sin(\lambda_{nms}t)}{(\mu_{nm}^2R^2+k_1^2R^2-n^2)[J_n(\mu_{nm}R)]^2\|h_s\|^2\lambda_{nms}},$$

$$\lambda_{nms}=a\sqrt{\mu_{nm}^2+\beta_s^2},\quad h_s(z)=\cos(\beta_s z)+\frac{k_2}{\beta_s}\sin(\beta_s z),\quad \|h_s\|^2=\frac{k_3}{2\beta_s^2}\,\frac{\beta_s^2+k_2^2}{\beta_s^2+k_3^2}+\frac{k_2}{2\beta_s^2}+\frac{l}{2}\Big(1+\frac{k_2^2}{\beta_s^2}\Big),$$

Здесь $A_0=1$, $A_n=2$ при $n=1,\ 2,\ \ldots$; $J_n(\xi)$ — функции Бесселя; μ_{nm} и β_s — положительные корни трансцендентных уравнений

$$\mu J_n'(\mu R)+k_1J_n(\mu R)=0,\qquad \frac{\operatorname{tg}(\beta l)}{\beta}=\frac{k_2+k_3}{\beta^2-k_2k_3}.$$

6.1.2-4. Область: $0\leqslant r\leqslant R,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant z\leqslant l$. Смешанные краевые задачи.

1°. Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(r,\varphi,z) && \text{при } t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,\varphi,z) && \text{при } t=0 && \text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(\varphi,z,t) && \text{при } r=R && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_2(r,\varphi,t) && \text{при } z=0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_3(r,\varphi,t) && \text{при } z=l && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(r,\varphi,z,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi f_0(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,+\\
&+\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi f_1(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,-\\
&-a^2R\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\xi=R}d\eta\,d\zeta\,d\tau\,-\\
&-a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi g_2(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau\,+\\
&+a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi g_3(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,l,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau.
\end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{\pi a R^2 l} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_n A_k}{[J_n'(\mu_{nm}R)]^2\sqrt{\lambda_{nmk}}} J_n(\mu_{nm}r)J_n(\mu_{nm}\xi)\times$$
$$\times\cos[n(\varphi-\eta)]\cos\Bigl(\frac{k\pi z}{l}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{k\pi\zeta}{l}\Bigr)\sin\bigl(at\sqrt{\lambda_{nmk}}\bigr),$$
$$\lambda_{nmk} = \mu_{nm}^2 + \frac{k^2\pi^2}{l^2}, \quad A_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n=0,\\ 2 & \text{при } n>0,\end{cases}$$

где $J_n(\xi)$ — функции Бесселя (штрих означает производную по аргументу), μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_n(\mu R) = 0$.

2°. Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r,\varphi,z) && \text{при} && t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(r,\varphi,z) && \text{при} && t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_r w &= g_1(\varphi,z,t) && \text{при} && r=R && \text{(граничное условие)},\\ w &= g_2(r,\varphi,t) && \text{при} && z=0 && \text{(граничное условие)},\\ w &= g_3(r,\varphi,t) && \text{при} && z=l && \text{(граничное условие)}.\end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,\varphi,z,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi f_0(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta +$$
$$+\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi f_1(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta +$$
$$+a^2R\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,R,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau +$$
$$+a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi g_2(\xi,\eta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\zeta=0}d\xi\,d\eta\,d\tau -$$
$$-a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi g_3(\xi,\eta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\zeta=l}d\xi\,d\eta\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{2}{\pi^2 a R^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\Bigl(\frac{k\pi z}{l}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{k\pi\zeta}{l}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{k\pi at}{l}\Bigr) +$$
$$+\frac{2}{\pi a l}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_n\mu_{nm}^2}{(\mu_{nm}^2R^2-n^2)[J_n(\mu_{nm}R)]^2\sqrt{\lambda_{nmk}}}J_n(\mu_{nm}r)J_n(\mu_{nm}\xi)\times$$
$$\times\cos[n(\varphi-\eta)]\sin\Bigl(\frac{k\pi z}{l}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{k\pi\zeta}{l}\Bigr)\sin\bigl(at\sqrt{\lambda_{nmk}}\bigr),$$
$$\lambda_{nmk} = \mu_{nm}^2 + \frac{k^2\pi^2}{l^2}, \quad A_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n=0,\\ 2 & \text{при } n>0,\end{cases}$$

где $J_n(\xi)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_n'(\mu R) = 0$.

6.1.2-5. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Первая краевая задача.

Рассматривается полый круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r,\varphi,z) && \text{при} && t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(r,\varphi,z) && \text{при} && t=0 && \text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(\varphi,z,t) && \text{при} && r=R_1 && \text{(граничное условие)},\\ w &= g_2(\varphi,z,t) && \text{при} && r=R_2 && \text{(граничное условие)},\\ w &= g_3(r,\varphi,t) && \text{при} && z=0 && \text{(граничное условие)},\\ w &= g_4(r,\varphi,t) && \text{при} && z=l && \text{(граничное условие)}.\end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,\varphi,z,t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} f_0(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta+$$
$$+\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} f_1(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta+$$
$$+a^2R_1\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\xi=R_1}d\eta\,d\zeta\,d\tau-$$
$$-a^2R_2\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi} g_2(\eta,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\xi=R_2}d\eta\,d\zeta\,d\tau+$$
$$+a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} g_3(\xi,\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\zeta=0}\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau-$$
$$-a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} g_4(\xi,\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\zeta=l}\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)=\frac{\pi}{2l}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_n\mu_{nm}^2J_n^2(\mu_{nm}R_2)}{J_n^2(\mu_{nm}R_1)-J_n^2(\mu_{nm}R_2)}Z_{nm}(r)Z_{nm}(\xi)\times$$
$$\times\cos\big[n(\varphi-\eta)\big]\sin\Big(\frac{k\pi z}{l}\Big)\sin\Big(\frac{k\pi\zeta}{l}\Big)\frac{\sin\big(at\sqrt{\lambda_{nmk}}\,\big)}{a\sqrt{\lambda_{nmk}}},$$
$$A_n=\begin{cases}1 & \text{при } n=0,\\ 2 & \text{при } n\neq0,\end{cases}\qquad \lambda_{nmk}=\mu_{nm}^2+\frac{k^2\pi^2}{l^2},$$
$$Z_{nm}(r)=J_n(\mu_{nm}R_1)Y_n(\mu_{nm}r)-Y_n(\mu_{nm}R_1)J_n(\mu_{nm}r),$$

где $J_n(r)$ и $Y_n(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_n(\mu R_1)Y_n(\mu R_2)-Y_n(\mu R_1)J_n(\mu R_2)=0.$$

6.1.2-6. Область: $R_1\leqslant r\leqslant R_2$, $0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$, $0\leqslant z\leqslant l$. Вторая краевая задача.

Рассматривается полый круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w&=f_0(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w&=f_1(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_r w&=g_1(\varphi,z,t) &&\text{при}\quad r=R_1 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_r w&=g_2(\varphi,z,t) &&\text{при}\quad r=R_2 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w&=g_3(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w&=g_4(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=l &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,\varphi,z,t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} f_0(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta+$$
$$+\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} f_1(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta-$$
$$-a^2R_1\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,R_1,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau+$$
$$+a^2R_2\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi} g_2(\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,R_2,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau-$$
$$-a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} g_3(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau+$$
$$+a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} g_4(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,l,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{t}{\pi(R_2^2-R_1^2)l} + \frac{2}{\pi^2 a(R_2^2-R_1^2)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cos\Big(\frac{k\pi z}{l}\Big)\cos\Big(\frac{k\pi\zeta}{l}\Big)\sin\Big(\frac{k\pi at}{l}\Big)+$$

$$+\frac{1}{\pi l}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A_nA_k\mu_{nm}^2 Z_{nm}(r)Z_{nm}(\xi)}{(\mu_{nm}^2R_2^2-n^2)Z_{nm}^2(R_2)-(\mu_{nm}^2R_1^2-n^2)Z_{nm}^2(R_1)}\times$$

$$\times\cos\big[n(\varphi-\eta)\big]\cos\Big(\frac{k\pi z}{l}\Big)\cos\Big(\frac{k\pi\zeta}{l}\Big)\frac{\sin\big(at\sqrt{\lambda_{nmk}}\big)}{a\sqrt{\lambda_{nmk}}},$$

где

$$A_n = \begin{cases}1 & \text{при } n=0,\\ 2 & \text{при } n\neq 0,\end{cases}\qquad \lambda_{nmk} = \mu_{nm}^2 + \frac{k^2\pi^2}{l^2},$$

$$Z_{nm}(r) = J_n'(\mu_{nm}R_1)Y_n(\mu_{nm}r) - Y_n'(\mu_{nm}R_1)J_n(\mu_{nm}r);$$

$J_n(r)$ и $Y_n(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_n'(\mu R_1)Y_n'(\mu R_2) - Y_n'(\mu R_1)J_n'(\mu R_2) = 0.$$

6.1.2-7. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant z \leqslant l$. Третья краевая задача.

Рассматривается полый круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(r,\varphi,z) && \text{при } t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,\varphi,z) && \text{при } t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_r w - k_1 w &= g_1(\varphi,z,t) && \text{при } r=R_1 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_r w + k_2 w &= g_2(\varphi,z,t) && \text{при } r=R_2 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w - k_3 w &= g_3(r,\varphi,t) && \text{при } z=0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w + k_4 w &= g_4(r,\varphi,t) && \text{при } z=l && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение $w(r,\varphi,z,t)$ определяется по формуле из разд. 6.1.2-6, где

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{\pi a}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{A_n\mu_{nm}^2}{\|h_s\|^2\sqrt{\mu_{nm}^2+\lambda_s^2}}\times$$

$$\times\frac{Z_{nm}(r)Z_{nm}(\xi)\cos\big[n(\varphi-\eta)\big]h_s(z)h_s(\zeta)\sin\big(at\sqrt{\mu_{nm}^2+\lambda_s^2}\big)}{(k_2^2R_2^2+\mu_{nm}^2R_2^2-n^2)Z_{nm}^2(R_2)-(k_1^2R_1^2+\mu_{nm}^2R_1^2-n^2)Z_{nm}^2(R_1)}.$$

Здесь

$$A_n = \begin{cases}1 & \text{при } n=0,\\ 2 & \text{при } n\neq 0,\end{cases}\qquad \begin{aligned}Z_{nm}(r) = {}&\big[\mu_{nm}J_n'(\mu_{nm}R_1) - k_1J_n(\mu_{nm}R_1)\big]Y_n(\mu_{nm}r) -\\ &-\big[\mu_{nm}Y_n'(\mu_{nm}R_1) - k_1Y_n(\mu_{nm}R_1)\big]J_n(\mu_{nm}r),\end{aligned}$$

$$h_s(z) = \cos(\lambda_s z) + \frac{k_3}{\lambda_s}\sin(\lambda_s z),\quad \|h_s\|^2 = \frac{k_4}{2\lambda_s^2}\frac{\lambda_s^2+k_3^2}{\lambda_s^2+k_4^2} + \frac{k_3}{2\lambda_s^2} + \frac{l}{2}\Big(1+\frac{k_3^2}{\lambda_s^2}\Big),$$

где $J_n(r)$ и $Y_n(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\big[\mu J_n'(\mu R_1) - k_1J_n(\mu R_1)\big]\big[\mu Y_n'(\mu R_2) + k_2Y_n(\mu R_2)\big] =$$
$$= \big[\mu Y_n'(\mu R_1) - k_1Y_n(\mu R_1)\big]\big[\mu J_n'(\mu R_2) + k_2J_n(\mu R_2)\big];$$

λ_s — положительные корни трансцендентного уравнения $\dfrac{\operatorname{tg}(\lambda l)}{\lambda} = \dfrac{k_3+k_4}{\lambda^2-k_3k_4}$.

6.1.2-8. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant z \leqslant l$. Смешанные краевые задачи.

1°. Рассматривается полый круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(r,\varphi,z) && \text{при } t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,\varphi,z) && \text{при } t=0 && \text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(\varphi,z,t) && \text{при } r=R_1 && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(\varphi,z,t) && \text{при } r=R_2 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_3(r,\varphi,t) && \text{при } z=0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_4(r,\varphi,t) && \text{при } z=l && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,\varphi,z,t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} f_0(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta+$$
$$+\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} f_1(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta+$$
$$+a^2R_1\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\xi=R_1}d\eta\,d\zeta\,d\tau-$$
$$-a^2R_2\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi} g_2(\eta,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\xi=R_2}d\eta\,d\zeta\,d\tau-$$
$$-a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} g_3(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau+$$
$$+a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} g_4(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,l,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)=\frac{\pi}{4l}\sum_{n=0}^\infty\sum_{m=1}^\infty\sum_{k=0}^\infty\frac{A_nA_k\mu_{nm}^2J_n^2(\mu_{nm}R_2)}{J_n^2(\mu_{nm}R_1)-J_n^2(\mu_{nm}R_2)}Z_{nm}(r)Z_{nm}(\xi)\times$$
$$\times\cos[n(\varphi-\eta)]\cos\Big(\frac{k\pi z}{l}\Big)\cos\Big(\frac{k\pi\zeta}{l}\Big)\frac{\sin\big(at\sqrt{\lambda_{nmk}}\,\big)}{a\sqrt{\lambda_{nmk}}},$$

где

$$A_n=\begin{cases}1 & \text{при } n=0,\\ 2 & \text{при } n\neq 0,\end{cases}\qquad \lambda_{nmk}=\mu_{nm}^2+\frac{k^2\pi^2}{l^2},$$
$$Z_{nm}(r)=J_n(\mu_{nm}R_1)Y_n(\mu_{nm}r)-Y_n(\mu_{nm}R_1)J_n(\mu_{nm}r);$$

$J_n(r)$ и $Y_n(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_n(\mu R_1)Y_n(\mu R_2)-Y_n(\mu R_1)J_n(\mu R_2)=0.$$

2°. Рассматривается полый круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w&=f_0(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w&=f_1(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_r w&=g_1(\varphi,z,t) &&\text{при}\quad r=R_1 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_r w&=g_2(\varphi,z,t) &&\text{при}\quad r=R_2 &&\text{(граничное условие)},\\
w&=g_3(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\
w&=g_4(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=l &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,\varphi,z,t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} f_0(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta+$$
$$+\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} f_1(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta-$$
$$-a^2R_1\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,R_1,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau+$$
$$+a^2R_2\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi} g_2(\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,R_2,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau+$$
$$+a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} g_3(\xi,\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\zeta=0}\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau-$$
$$-a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} g_4(\xi,\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\zeta=l}\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{2}{\pi^2 a(R_2^2 - R_1^2)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin\Big(\frac{k\pi z}{l}\Big) \sin\Big(\frac{k\pi\zeta}{l}\Big) \sin\Big(\frac{k\pi at}{l}\Big) +$$
$$+ \frac{2}{\pi l} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_n \mu_{nm}^2 Z_{nm}(r) Z_{nm}(\xi)}{(\mu_{nm}^2 R_2^2 - n^2) Z_{nm}^2(R_2) - (\mu_{nm}^2 R_1^2 - n^2) Z_{nm}^2(R_1)} \times$$
$$\times \cos\big[n(\varphi-\eta)\big] \sin\Big(\frac{k\pi z}{l}\Big) \sin\Big(\frac{k\pi\zeta}{l}\Big) \frac{\sin\big(at\sqrt{\lambda_{nmk}}\,\big)}{a\sqrt{\lambda_{nmk}}},$$

где

$$A_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 2 & \text{при } n \neq 0, \end{cases} \qquad \lambda_{nmk} = \mu_{nm}^2 + \frac{k^2\pi^2}{l^2},$$
$$Z_{nm}(r) = J_n'(\mu_{nm} R_1) Y_n(\mu_{nm} r) - Y_n'(\mu_{nm} R_1) J_n(\mu_{nm} r);$$

$J_n(r)$ и $Y_n(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_n'(\mu R_1) Y_n'(\mu R_2) - Y_n'(\mu R_1) J_n'(\mu R_2) = 0.$$

6.1.2-9. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Первая краевая задача.

Рассматривается цилиндрический сектор конечной толщины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(r,\varphi,z) && \text{при } t = 0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,\varphi,z) && \text{при } t = 0 && \text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(\varphi,z,t) && \text{при } r = R && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(r,z,t) && \text{при } \varphi = 0 && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_3(r,z,t) && \text{при } \varphi = \varphi_0 && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_4(r,\varphi,t) && \text{при } z = 0 && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_5(r,\varphi,t) && \text{при } z = l && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,\varphi,z,t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l \int_0^{\varphi_0} \int_0^R f_0(\xi,\eta,\zeta) G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) \xi \, d\xi \, d\eta \, d\zeta +$$
$$+ \int_0^l \int_0^{\varphi_0} \int_0^R f_1(\xi,\eta,\zeta) G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) \xi \, d\xi \, d\eta \, d\zeta -$$
$$- a^2 R \int_0^t \int_0^l \int_0^{\varphi_0} g_1(\eta,\zeta,\tau) \Big[\frac{\partial}{\partial \xi} G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\xi=R} d\eta \, d\zeta \, d\tau +$$
$$+ a^2 \int_0^t \int_0^l \int_0^R g_2(\xi,\zeta,\tau) \frac{1}{\xi} \Big[\frac{\partial}{\partial \eta} G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\eta=0} d\xi \, d\zeta \, d\tau -$$
$$- a^2 \int_0^t \int_0^l \int_0^R g_3(\xi,\zeta,\tau) \frac{1}{\xi} \Big[\frac{\partial}{\partial \eta} G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\eta=\varphi_0} d\xi \, d\zeta \, d\tau +$$
$$+ a^2 \int_0^t \int_0^{\varphi_0} \int_0^R g_4(\xi,\eta,\tau) \Big[\frac{\partial}{\partial \zeta} G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\zeta=0} \xi \, d\xi \, d\eta \, d\tau -$$
$$- a^2 \int_0^t \int_0^{\varphi_0} \int_0^R g_5(\xi,\eta,\tau) \Big[\frac{\partial}{\partial \zeta} G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\zeta=l} \xi \, d\xi \, d\eta \, d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{8}{R^2 l \varphi_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm} r) J_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm} \xi)}{[J_{n\pi/\varphi_0}'(\mu_{nm} R)]^2} \sin\Big(\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\Big) \sin\Big(\frac{n\pi\eta}{\varphi_0}\Big) \times$$
$$\times \sin\Big(\frac{k\pi z}{l}\Big) \sin\Big(\frac{k\pi\zeta}{l}\Big) \frac{\sin\big(at\sqrt{\mu_{nm}^2 + k^2\pi^2/l^2}\,\big)}{a\sqrt{\mu_{nm}^2 + k^2\pi^2/l^2}},$$

где $J_{n\pi/\varphi_0}(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_{n\pi/\varphi_0}(\mu R) = 0$.

6.1.2-10. Область: $0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0,\ 0 \leqslant z \leqslant l$. Смешанная краевая задача.

Рассматривается цилиндрический сектор конечной толщины. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f_0(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(\varphi,z,t) &&\text{при}\quad r=R &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(r,z,t) &&\text{при}\quad \varphi=0 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_3(r,z,t) &&\text{при}\quad \varphi=\varphi_0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_4(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_5(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=l &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(r,\varphi,z,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\int_0^{\varphi_0}\int_0^R f_0(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,+\\
&+\int_0^l\int_0^{\varphi_0}\int_0^R f_1(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,-\\
&-a^2R\int_0^t\int_0^l\int_0^{\varphi_0} g_1(\eta,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\xi=R}\,d\eta\,d\zeta\,d\tau\,+\\
&+a^2\int_0^t\int_0^l\int_0^R g_2(\xi,\zeta,\tau)\frac{1}{\xi}\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\eta=0}\,d\xi\,d\zeta\,d\tau\,-\\
&-a^2\int_0^t\int_0^l\int_0^R g_3(\xi,\zeta,\tau)\frac{1}{\xi}\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\eta=\varphi_0}\,d\xi\,d\zeta\,d\tau\,-\\
&-a^2\int_0^t\int_0^{\varphi_0}\int_0^R g_4(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau\,+\\
&+a^2\int_0^t\int_0^{\varphi_0}\int_0^R g_5(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,l,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{4}{R^2 l\varphi_0}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}&\frac{A_k J_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}r)J_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}\xi)}{[J'_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}R)]^2}\sin\Big(\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\Big)\sin\Big(\frac{n\pi\eta}{\varphi_0}\Big)\times\\
&\times\cos\Big(\frac{k\pi z}{l}\Big)\cos\Big(\frac{k\pi\zeta}{l}\Big)\frac{\sin\big(at\sqrt{\mu_{nm}^2+k^2\pi^2/l^2}\,\big)}{a\sqrt{\mu_{nm}^2+k^2\pi^2/l^2}},
\end{aligned}
$$

где $A_0=1$, $A_k=2$ при $k\geqslant 1$; $J_{n\pi/\varphi_0}(r)$ — функции Бесселя; μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_{n\pi/\varphi_0}(\mu R)=0$.

6.1.3. Задачи в сферической системе координат

Волновое уравнение в сферической системе координат имеет вид

$$
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial w}{\partial r}\Big)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial w}{\partial\theta}\Big)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right],\qquad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.
$$

Одномерные задачи с центральной симметрией, которые имеют решения $w=w(r,t)$, рассматриваются в разд. 4.2.3.

6.1.3-1. Область: $0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Первая краевая задача.

Рассматривается сферическая область. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f_0(r,\theta,\varphi) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,\theta,\varphi) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
w &= g(\theta,\varphi,t) &&\text{при}\quad r=R &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$w(r,\theta,\varphi,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} f_0(\xi,\eta,\zeta)G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t)\xi^2\sin\eta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta +$$
$$+\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} f_1(\xi,\eta,\zeta)G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t)\xi^2\sin\eta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta -$$
$$- a^2R^2\int_0^{t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} g(\eta,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\xi=R}\sin\eta\,d\eta\,d\zeta\,d\tau,$$

где

$$G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{2\pi aR^2\sqrt{r\xi}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} A_k B_{nmk} J_{n+1/2}(\lambda_{nm}r)J_{n+1/2}(\lambda_{nm}\xi)\times$$
$$\times P_n^k(\cos\theta)P_n^k(\cos\eta)\cos\big[k(\varphi-\zeta)\big]\sin(\lambda_{nm}at),$$
$$A_k = \begin{cases} 1 & \text{при } k=0,\\ 2 & \text{при } k\neq 0,\end{cases}\qquad B_{nmk} = \frac{(2n+1)(n-k)!}{(n+k)!\big[J'_{n+1/2}(\lambda_{nm}R)\big]^2\lambda_{nm}}.$$

Здесь $J_{n+1/2}(r)$ — функции Бесселя, $P_n^k(\mu)$ — присоединенные функции Лежандра, которые выражаются через полиномы Лежандра $P_n(\mu)$ по формулам

$$P_n^k(\mu) = (1-\mu^2)^{k/2}\frac{d^k}{d\mu^k}P_n(\mu),\qquad P_n(\mu) = \frac{1}{n!\,2^n}\frac{d^n}{d\mu^n}(\mu^2-1)^n;$$

λ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_{n+1/2}(\lambda R) = 0.$$

6.1.3-2. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Вторая краевая задача.

Рассматривается сферическая область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r,\theta,\varphi) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(r,\theta,\varphi) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_r w &= g(\theta,\varphi,t) && \text{при} \quad r=R && \text{(граничное условие)}.\end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,\theta,\varphi,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} f_0(\xi,\eta,\zeta)G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t)\xi^2\sin\eta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta +$$
$$+\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} f_1(\xi,\eta,\zeta)G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t)\xi^2\sin\eta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta +$$
$$+ a^2R^2\int_0^{t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} g(\eta,\zeta,\tau)G(r,\theta,\varphi,R,\eta,\zeta,t-\tau)\sin\eta\,d\eta\,d\zeta\,d\tau,$$

где

$$G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{3t}{4\pi R^3} + \frac{1}{2\pi a\sqrt{r\xi}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} A_k B_{nmk} J_{n+1/2}(\lambda_{nm}r)J_{n+1/2}(\lambda_{nm}\xi)\times$$
$$\times P_n^k(\cos\theta)P_n^k(\cos\eta)\cos\big[k(\varphi-\zeta)\big]\sin(\lambda_{nm}at),$$
$$A_k = \begin{cases} 1 & \text{при } k=0,\\ 2 & \text{при } k\neq 0,\end{cases}\qquad B_{nmk} = \frac{\lambda_{nm}(2n+1)(n-k)!}{(n+k)!\big[R^2\lambda_{nm}^2 - n(n+1)\big]\big[J_{n+1/2}(\lambda_{nm}R)\big]^2}.$$

Здесь $J_{n+1/2}(r)$ — функции Бесселя, $P_n^k(\mu)$ — присоединенные функции Лежандра (см. разд. 6.1.3-1), λ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$2\lambda R J'_{n+1/2}(\lambda R) - J_{n+1/2}(\lambda R) = 0.$$

⊙ *Литература*: М. М. Смирнов (1975, стр. 33, 89).

6.1.3-3. Область: $0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Третья краевая задача.

Рассматривается сферическая область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r,\theta,\varphi) \quad \text{при} \quad t=0 \quad \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(r,\theta,\varphi) \quad \text{при} \quad t=0 \quad \text{(начальное условие)},\\ \partial_r w + kw &= g(\theta,\varphi,t) \quad \text{при} \quad r=R \quad \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(r,\theta,\varphi,t)$ определяется по формуле из разд. 6.1.3-2, где

$$G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{2\pi a\sqrt{r\xi}} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n} A_s B_{nms} J_{n+1/2}(\lambda_{nm} r) J_{n+1/2}(\lambda_{nm}\xi)\times$$
$$\times P_n^s(\cos\theta) P_n^s(\cos\eta)\cos\bigl[s(\varphi-\zeta)\bigr]\sin(\lambda_{nm} at),$$

$$A_s = \begin{cases} 1 & \text{при } s=0,\\ 2 & \text{при } s\neq 0,\end{cases} \qquad B_{nms} = \frac{\lambda_{nm}(2n+1)(n-s)!}{(n+s)!\bigl[R^2\lambda_{nm}^2 + (kR+n)(kR-n-1)\bigr]\bigl[J_{n+1/2}(\lambda_{nm}R)\bigr]^2}.$$

Здесь $J_{n+1/2}(r)$ — функции Бесселя, $P_n^s(\mu)$ — присоединенные функции Лежандра (см. разд. 6.1.3-1), λ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\lambda R J'_{n+1/2}(\lambda R) + \bigl(kR - \tfrac{1}{2}\bigr) J_{n+1/2}(\lambda R) = 0.$$

6.1.3-4. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Первая краевая задача.

Рассматривается сферический слой. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r,\theta,\varphi) \quad \text{при} \quad t=0 \quad \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(r,\theta,\varphi) \quad \text{при} \quad t=0 \quad \text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(\theta,\varphi,t) \quad \text{при} \quad r=R_1 \quad \text{(граничное условие)},\\ w &= g_2(\theta,\varphi,t) \quad \text{при} \quad r=R_2 \quad \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,\theta,\varphi,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi}\!\!\int_{R_1}^{R_2} f_0(\xi,\eta,\zeta) G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t)\xi^2\sin\eta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta \,+\\ &+ \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi}\!\!\int_{R_1}^{R_2} f_1(\xi,\eta,\zeta) G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t)\xi^2\sin\eta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta \,+\\ &+ a^2R_1^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=R_1}\sin\eta\,d\eta\,d\zeta\,d\tau \,-\\ &- a^2R_2^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} g_2(\eta,\zeta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=R_2}\sin\eta\,d\eta\,d\zeta\,d\tau, \end{aligned}$$

где

$$G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{\pi}{8a\sqrt{r\xi}} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} A_k B_{nmk} Z_{n+1/2}(\lambda_{nm} r) Z_{n+1/2}(\lambda_{nm}\xi)\times$$
$$\times P_n^k(\cos\theta) P_n^k(\cos\eta)\cos\bigl[k(\varphi-\zeta)\bigr]\sin(\lambda_{nm} at).$$

Здесь

$$Z_{n+1/2}(\lambda_{nm}r) = J_{n+1/2}(\lambda_{nm}R_1)Y_{n+1/2}(\lambda_{nm}r) - Y_{n+1/2}(\lambda_{nm}R_1)J_{n+1/2}(\lambda_{nm}r),$$

$$A_k = \begin{cases} 1 & \text{при } k=0,\\ 2 & \text{при } k\neq 0,\end{cases} \qquad B_{nmk} = \frac{\lambda_{nm}(2n+1)(n-k)!\,J_{n+1/2}^2(\lambda_{nm}R_2)}{(n+k)!\bigl[J_{n+1/2}^2(\lambda_{nm}R_1) - J_{n+1/2}^2(\lambda_{nm}R_2)\bigr]},$$

где $J_{n+1/2}(r)$ — функции Бесселя, $P_n^k(\mu)$ — присоединенные функции Лежандра, которые выражаются через полиномы Лежандра $P_n(\mu)$ по формулам

$$P_n^k(\mu) = (1-\mu^2)^{k/2}\frac{d^k}{d\mu^k}P_n(\mu), \qquad P_n(\mu) = \frac{1}{n!\,2^n}\frac{d^n}{d\mu^n}(\mu^2-1)^n;$$

λ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$Z_{n+1/2}(\lambda R_2) = 0.$$

6.1.3-5. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Вторая краевая задача.

Рассматривается сферический слой. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r,\theta,\varphi) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(r,\theta,\varphi) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_r w &= g_1(\theta,\varphi,t) &&\text{при}\quad r=R_1 &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_r w &= g_2(\theta,\varphi,t) &&\text{при}\quad r=R_2 &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,\theta,\varphi,t) = {}& \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi}\!\!\int_{R_1}^{R_2} f_0(\xi,\eta,\zeta)G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t)\xi^2\sin\eta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,+\\ &+\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi}\!\!\int_{R_1}^{R_2} f_1(\xi,\eta,\zeta)G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t)\xi^2\sin\eta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,-\\ &-a^2R_1^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau)G(r,\theta,\varphi,R_1,\eta,\zeta,t-\tau)\,\sin\eta\,d\eta\,d\zeta\,d\tau\,+\\ &+a^2R_2^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} g_2(\eta,\zeta,\tau)G(r,\theta,\varphi,R_2,\eta,\zeta,t-\tau)\,\sin\eta\,d\eta\,d\zeta\,d\tau, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t) = {}& \frac{3t}{4\pi(R_2^3-R_1^3)}+\frac{1}{4\pi a\sqrt{r\xi}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{A_k}{B_{nmk}}Z_{n+1/2}(\lambda_{nm}r)Z_{n+1/2}(\lambda_{nm}\xi)\,\times\\ &\times P_n^k(\cos\theta)P_n^k(\cos\eta)\cos\bigl[k(\varphi-\zeta)\bigr]\sin(\lambda_{nm}at). \end{aligned}$$

Здесь

$$A_k = \begin{cases} 1 & \text{при}\quad k=0,\\ 2 & \text{при}\quad k\neq 0,\end{cases}\qquad B_{nmk} = \frac{\lambda_{nm}(n+k)!}{(2n+1)(n-k)!}\int_{R_1}^{R_2} rZ_{n+1/2}^2(\lambda_{nm}r)\,dr,$$

$$\begin{aligned} Z_{n+1/2}(\lambda_{nm}r) = {}& \Bigl[\lambda_{nm}J'_{n+1/2}(\lambda_{nm}R_1)-\frac{1}{2R_1}J_{n+1/2}(\lambda_{nm}R_1)\Bigr]Y_{n+1/2}(\lambda_{nm}r)\,-\\ &-\Bigl[\lambda_{nm}Y'_{n+1/2}(\lambda_{nm}R_1)-\frac{1}{2R_1}Y_{n+1/2}(\lambda_{nm}R_1)\Bigr]J_{n+1/2}(\lambda_{nm}r), \end{aligned}$$

где $J_{n+1/2}(r)$ и $Y_{n+1/2}(r)$ — функции Бесселя, $P_n^k(\mu)$ — присоединенные функции Лежандра (см. разд. 6.1.3-4), λ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\lambda Z'_{n+1/2}(\lambda R_2)-\frac{1}{2R_2}Z_{n+1/2}(\lambda R_2)=0.$$

6.1.3-6. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Третья краевая задача.

Рассматривается сферический слой. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r,\theta,\varphi) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(r,\theta,\varphi) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_r w - k_1 w &= g_1(\theta,\varphi,t) &&\text{при}\quad r=R_1 &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_r w + k_2 w &= g_2(\theta,\varphi,t) &&\text{при}\quad r=R_2 &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(r,\theta,\varphi,t)$ определяется по формуле из разд. 6.1.3-5, где

$$\begin{aligned} G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t) = {}& \frac{1}{4\pi a\sqrt{r\xi}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{A_s}{B_{nms}}Z_{n+1/2}(\lambda_{nm}r)Z_{n+1/2}(\lambda_{nm}\xi)\,\times\\ &\times P_n^s(\cos\theta)P_n^s(\cos\eta)\cos\bigl[s(\varphi-\zeta)\bigr]\sin(\lambda_{nm}at). \end{aligned}$$

Здесь

$$A_s = \begin{cases} 1 & \text{при } s=0, \\ 2 & \text{при } s\neq 0, \end{cases} \qquad B_{nms} = \frac{\lambda_{nm}(n+s)!}{(2n+1)(n-s)!}\int_{R_1}^{R_2} rZ^2_{n+1/2}(\lambda_{nm}r)\,dr,$$

$$Z_{n+1/2}(\lambda r) = \Big[\lambda J'_{n+1/2}(\lambda R_1) - \Big(k_1 + \frac{1}{2R_1}\Big)J_{n+1/2}(\lambda R_1)\Big]Y_{n+1/2}(\lambda r) -$$

$$- \Big[\lambda Y'_{n+1/2}(\lambda R_1) - \Big(k_1 + \frac{1}{2R_1}\Big)Y_{n+1/2}(\lambda R_1)\Big]J_{n+1/2}(\lambda r),$$

где $J_{n+1/2}(r)$ и $Y_{n+1/2}(r)$ — функции Бесселя, $P_n^s(\mu)$ — присоединенные функции Лежандра (см. разд. 6.1.3-4), λ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\lambda Z'_{n+1/2}(\lambda R_2) + \Big(k_2 - \frac{1}{2R_2}\Big)Z_{n+1/2}(\lambda R_2) = 0.$$

6.2. Неоднородное волновое уравнение $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\Delta_3 w + \Phi(x,y,z,t)$

6.2.1. Задачи в декартовой системе координат

6.2.1-1. Область: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$. Задача Коши.

Заданы начальные условия:

$$w = f(x,y,z) \quad \text{при} \quad t=0,$$
$$\partial_t w = g(x,y,z) \quad \text{при} \quad t=0.$$

Решение:

$$w(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{r=at}\frac{f(\xi,\eta,\zeta)}{r}\,dS + \frac{1}{4\pi a}\iint\limits_{r=at}\frac{g(\xi,\eta,\zeta)}{r}\,dS +$$

$$+ \frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{r\leqslant at}\frac{1}{r}\Phi\Big(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\Big)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta, \quad r = \sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2},$$

где интегрирование проводится по поверхности шара ($r = at$) и объему шара ($r \leqslant at$) с центром в точке (x,y,z).

⊙ *Литература*: Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов (1970, стр. 98–107).

6.2.1-2. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, $0 \leqslant z \leqslant l_3$. Различные краевые задачи.

1°. Решение первой краевой задачи для параллелепипеда дается формулой из разд. 6.1.1-3 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\int_0^{l_3}\Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\zeta\,d\eta\,d\xi\,d\tau,$$

которое учитывает неоднородность уравнения (это слагаемое является решением неоднородного уравнения с однородными начальными и граничными условиями).

2°. Решение второй краевой задачи для параллелепипеда дается формулой из разд. 6.1.1-4 с дополнительным слагаемым, указанным в разд. 6.2.1-2, п. 1° (функция Грина берется из разд. 6.1.1-4).

3°. Решение третьей краевой задачи для параллелепипеда является суммой решения однородного уравнения с неоднородными начальными и граничными условиями (см. разд. 6.1.1-5) и решения неоднородного уравнения с однородными начальными и граничными условиями (это решение дается формулой из п. 1° разд. 6.2.1-2, в которую следует подставить функцию Грина из разд. 6.1.1-5).

4°. Решение смешанных краевых задач для параллелепипеда дается формулами из разд. 6.1.1-6, к которым следует прибавить дополнительное слагаемое, указанное в разд. 6.2.1-2 (п. 1°).

6.2.2. Задачи в цилиндрической системе координат

Неоднородное волновое уравнение в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right] + \Phi(r,\varphi,z,t).$$

6.2.2-1. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Различные краевые задачи.

1°. Решение первой краевой задачи для кругового цилиндра конечной длины дается формулой из разд. 6.1.2-1 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^R \Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau, \tag{1}$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

2°. Решение второй краевой задачи для кругового цилиндра конечной длины дается формулой из разд. 6.1.2-2 с дополнительным слагаемым (1).

3°. Решение третьей краевой задачи для кругового цилиндра конечной длины дается суммой решения, указанного в разд. 6.1.2-3, и выражения (1).

4°. Решения смешанных краевых задач для кругового цилиндра конечной длины даются формулами из разд. 6.1.2-4 с дополнительными слагаемыми вида (1).

6.2.2-2. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Различные краевые задачи.

1°. Решение первой краевой задачи для полого цилиндра конечных размеров дается формулой из разд. 6.1.2-5 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} \Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau, \tag{2}$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

2°. Решение второй краевой задачи для полого цилиндра конечных размеров дается формулой из разд. 6.1.2-6 с дополнительным слагаемым (2).

3°. Решение третьей краевой задачи для полого цилиндра конечных размеров дается суммой решения, указанного в разд. 6.1.2-7, и выражения (2).

4°. Решения смешанных краевых задач для полого цилиндра конечных размеров дается формулами из разд. 6.1.2-8 с дополнительными слагаемыми вида (2).

6.2.2-3. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Различные краевые задачи.

1°. Решение первой краевой задачи для цилиндрического сектора конечной толщины дается формулой из разд. 6.1.2-9 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t\int_0^l\int_0^{\varphi_0}\int_0^R \Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau, \tag{3}$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

2°. Решение смешанной краевой задачи для цилиндрического сектора конечной толщины формулой из разд. 6.1.2-10 с дополнительным слагаемым (3).

6.2.3. Задачи в сферической системе координат

Неоднородное волновое уравнение в сферической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial w}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right] + \Phi(r,\theta,\varphi,t).$$

6.2.3-1. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Различные краевые задачи.

1°. Решение первой краевой задачи для шара дается формулой из разд. 6.1.3-1 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R \Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau) G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\xi^2 \sin\eta\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\tau, \tag{1}$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

2°. Решение второй краевой задачи для шара дается формулой из разд. 6.1.3-2 с дополнительным слагаемым (1).

3°. Решение третьей краевой задачи для шара дается суммой решения, указанного в разд. 6.1.3-3, и выражения (1).

6.2.3-2. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Различные краевые задачи.

1°. Решение первой краевой задачи для сферического слоя дается формулой из разд. 6.1.3-4 с дополнительным слагаемым

$$\int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{R_1}^{R_2} \Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau) G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\xi^2 \sin\eta\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\tau, \tag{2}$$

которое учитывает неоднородность уравнения.

2°. Решение второй краевой задачи для сферического слоя дается формулой из разд. 6.1.3-5 с дополнительным слагаемым (2).

3°. Решение третьей краевой задачи для сферического слоя дается суммой решения, указанного в разд. 6.1.3-6, и выражения (2).

6.3. Уравнение вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \Delta_3 w - bw + \Phi(x,y,z,t)$

6.3.1. Задачи в декартовой системе координат

Трехмерное неоднородное уравнение Клейна — Гордона в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) - bw + \Phi(x,y,z,t).$$

6.3.1-1. Фундаментальные решения:

$$\mathscr{E}(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a^2}\left[\frac{\delta(t-r/a)}{r} - \frac{c}{a}\frac{I_1\bigl(c\sqrt{t^2-r^2/a^2}\bigr)}{\sqrt{t^2-r^2/a^2}}\vartheta(t-r/a)\right] \quad \text{при} \quad b=-c^2<0,$$

$$\mathscr{E}(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a^2}\left[\frac{\delta(t-r/a)}{r} - \frac{c}{a}\frac{J_1\bigl(c\sqrt{t^2-r^2/a^2}\bigr)}{\sqrt{t^2-r^2/a^2}}\vartheta(t-r/a)\right] \quad \text{при} \quad b=c^2>0,$$

где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\delta(\xi)$ — дельта-функция, $\vartheta(\xi)$ — единичная функция Хевисайда, $I_1(z)$ — модифицированная функция Бесселя, $J_1(z)$ — функция Бесселя.

⊙ *Литература*: В. С. Владимиров (1974, стр. 122).

6.3.1-2. Область: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$. Задача Коши.

Заданы начальные условия:

$$w = f(x,y,z) \quad \text{при} \quad t=0,$$
$$\partial_t w = g(x,y,z) \quad \text{при} \quad t=0.$$

Пусть $a=1$ и $\Phi(x,y,z,t) \equiv 0$.

1°. Решение при $b = -c^2 < 0$:

$$w(x,y,z,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t r^2 I_0\big(c\sqrt{t^2-r^2}\big)T_r\big[f(x,y,z)\big]\,dr\right] + \\ + \frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t r^2 I_0\big(c\sqrt{t^2-r^2}\big)T_r\big[g(x,y,z)\big]\,dr.$$

Здесь $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя, $T_r\big[h(x,y,z)\big]$ — среднее от функции $h(x,y,z)$ по сфере с центром в точке (x,y,z) и радиусом r:

$$T_r\big[h(x,y,z)\big] = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} h(x + r\sin\theta\cos\varphi,\ y + r\sin\theta\sin\varphi,\ z + r\cos\theta)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi.$$

2°. Решение при $b = c^2 > 0$:

$$w(x,y,z,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t r^2 J_0\big(c\sqrt{t^2-r^2}\big)T_r\big[f(x,y,z)\big]\,dr\right] + \\ + \frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t r^2 J_0\big(c\sqrt{t^2-r^2}\big)T_r\big[g(x,y,z)\big]\,dr,$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя.

⊙ *Литература*: В. И. Смирнов (1974, т. 2, стр. 592).

6.3.1-3. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, $0 \leqslant z \leqslant l_3$. Первая краевая задача.

Рассматривается прямоугольный параллелепипед. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(x,y,z) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(x,y,z) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(y,z,t) &&\text{при}\quad x = 0 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(y,z,t) &&\text{при}\quad x = l_1 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_3(x,z,t) &&\text{при}\quad y = 0 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_4(x,z,t) &&\text{при}\quad y = l_2 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_5(x,y,t) &&\text{при}\quad z = 0 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_6(x,y,t) &&\text{при}\quad z = l_3 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(x,y,z,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_2}\!\!\int_0^{l_1} f_0(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\ +\\
&+ \int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_2}\!\!\int_0^{l_1} f_1(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\ +\\
&+ a^2\int_0^t\!\!\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_2} g_1(\eta,\zeta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\right]_{\xi=0} d\eta\,d\zeta\,d\tau\ -\\
&- a^2\int_0^t\!\!\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_2} g_2(\eta,\zeta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\right]_{\xi=l_1} d\eta\,d\zeta\,d\tau\ +\\
&+ a^2\int_0^t\!\!\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_1} g_3(\xi,\zeta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\right]_{\eta=0} d\xi\,d\zeta\,d\tau\ -\\
&- a^2\int_0^t\!\!\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_1} g_4(\xi,\zeta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\right]_{\eta=l_2} d\xi\,d\zeta\,d\tau\ +\\
&+ a^2\int_0^t\!\!\int_0^{l_2}\!\!\int_0^{l_1} g_5(\xi,\eta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\right]_{\zeta=0} d\xi\,d\eta\,d\tau\ -\\
&- a^2\int_0^t\!\!\int_0^{l_2}\!\!\int_0^{l_1} g_6(\xi,\eta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\right]_{\zeta=l_3} d\xi\,d\eta\,d\tau\ +\\
&+ \int_0^t\!\!\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_2}\!\!\int_0^{l_1} \Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau.
\end{aligned}$$

Здесь

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{8}{l_1 l_2 l_3} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_{nmk}}} \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \sin(\gamma_k z) \times$$

$$\times \sin(\alpha_n \xi) \sin(\beta_m \eta) \sin(\gamma_k \zeta) \sin\bigl(t\sqrt{\lambda_{nmk}}\,\bigr),$$

где

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{l_1}, \quad \beta_m = \frac{m\pi}{l_2}, \quad \gamma_k = \frac{k\pi}{l_3},$$

$$\lambda_{nmk} = a^2(\alpha_n^2 + \beta_m^2 + \gamma_k^2) + b.$$

6.3.1-4. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, $0 \leqslant z \leqslant l_3$. Вторая краевая задача.

Рассматривается прямоугольный параллелепипед. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f_0(x,y,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(x,y,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_x w &= g_1(y,z,t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_x w &= g_2(y,z,t) &&\text{при}\quad x=l_1 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_3(x,z,t) &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_4(x,z,t) &&\text{при}\quad y=l_2 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_5(x,y,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_6(x,y,t) &&\text{при}\quad z=l_3 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(x,y,z,t) = {}& \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{l_3}\!\int_0^{l_2}\!\int_0^{l_1} f_0(\xi,\eta,\zeta) G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta \,+\\
&+ \int_0^{l_3}\!\int_0^{l_2}\!\int_0^{l_1} f_1(\xi,\eta,\zeta) G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta \,-\\
&- a^2 \int_0^{t}\!\int_0^{l_3}\!\int_0^{l_2} g_1(\eta,\zeta,\tau) G(x,y,z,0,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau \,+\\
&+ a^2 \int_0^{t}\!\int_0^{l_3}\!\int_0^{l_2} g_2(\eta,\zeta,\tau) G(x,y,z,l_1,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau \,-\\
&- a^2 \int_0^{t}\!\int_0^{l_3}\!\int_0^{l_1} g_3(\xi,\zeta,\tau) G(x,y,z,\xi,0,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\tau \,+\\
&+ a^2 \int_0^{t}\!\int_0^{l_3}\!\int_0^{l_1} g_4(\xi,\zeta,\tau) G(x,y,z,\xi,l_2,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\tau \,-\\
&- a^2 \int_0^{t}\!\int_0^{l_2}\!\int_0^{l_1} g_5(\xi,\eta,\tau) G(x,y,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau \,+\\
&+ a^2 \int_0^{t}\!\int_0^{l_2}\!\int_0^{l_1} g_6(\xi,\eta,\tau) G(x,y,z,\xi,\eta,l_3,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau \,+\\
&+ \int_0^{t}\!\int_0^{l_3}\!\int_0^{l_2}\!\int_0^{l_1} \Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau) G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau,
\end{aligned}
$$

где

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{\sin\bigl(t\sqrt{b}\bigr)}{l_1 l_2 l_3 \sqrt{b}} + \frac{1}{l_1 l_2 l_3} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_n A_m A_k}{\sqrt{\lambda_{nmk}}} \cos(\alpha_n x) \cos(\beta_m y) \cos(\gamma_k z) \times$$

$$\times \cos(\alpha_n \xi) \cos(\beta_m \eta) \cos(\gamma_k \zeta) \sin\bigl(t\sqrt{\lambda_{nmk}}\,\bigr),$$

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{l_1}, \quad \beta_m = \frac{m\pi}{l_2}, \quad \gamma_k = \frac{k\pi}{l_3}, \quad \lambda_{nmk} = a^2(\alpha_n^2 + \beta_m^2 + \gamma_k^2) + b, \quad A_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 2 & \text{при } n > 0. \end{cases}$$

Суммируются члены, удовлетворяющие условию $n + m + k > 0$ (член, соответствующий $n = m = k = 0$, выделен отдельно).

6.3.1-5. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, $0 \leqslant z \leqslant l_3$. Третья краевая задача.

Рассматривается прямоугольный параллелепипед. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f_0(x,y,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(x,y,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_x w - s_1 w &= g_1(y,z,t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_x w + s_2 w &= g_2(y,z,t) &&\text{при}\quad x=l_1 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_y w - s_3 w &= g_3(x,z,t) &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_y w + s_4 w &= g_4(x,z,t) &&\text{при}\quad y=l_2 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w - s_5 w &= g_5(x,y,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w + s_6 w &= g_6(x,y,t) &&\text{при}\quad z=l_3 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение $w(x,y,z,t)$ определяется по формуле из разд. 6.3.1-4, где

$$
G(x,y,\xi,\eta,t) = 8\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{E_{nmk}\sqrt{\lambda_{nmk}}}\sin(\alpha_n x+\varepsilon_n)\sin(\beta_m y+\sigma_m)\sin(\gamma_k z+\nu_k)\times
$$
$$
\times\sin(\alpha_n\xi+\varepsilon_n)\sin(\beta_m\eta+\sigma_m)\sin(\gamma_k\zeta+\nu_k)\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_{nmk}}\,\bigr).
$$

Здесь

$$
\varepsilon_n = \operatorname{arctg}\frac{\alpha_n}{l_1},\quad \sigma_m = \operatorname{arctg}\frac{\beta_m}{l_2},\quad \nu_k = \operatorname{arctg}\frac{\gamma_k}{l_3},\quad \lambda_{nmk} = a^2(\alpha_n^2+\beta_m^2+\gamma_k^2)+b,
$$
$$
E_{nmk} = \left[l_1 + \frac{(s_1s_2+\alpha_n^2)(s_1+s_2)}{(s_1^2+\alpha_n^2)(s_2^2+\alpha_n^2)}\right]\left[l_2 + \frac{(s_3s_4+\beta_m^2)(s_3+s_4)}{(s_3^2+\beta_m^2)(s_4^2+\beta_m^2)}\right]\left[l_3 + \frac{(s_5s_6+\gamma_k^2)(s_5+s_6)}{(s_5^2+\gamma_k^2)(s_6^2+\gamma_k^2)}\right],
$$

где α_n, β_m, γ_k — положительные корни трансцендентных уравнений

$$
\alpha^2 - s_1s_2 = (s_1+s_2)\alpha\operatorname{ctg}(l_1\alpha),\quad \beta^2 - s_3s_4 = (s_3+s_4)\beta\operatorname{ctg}(l_2\beta),\quad \gamma^2 - s_5s_6 = (s_5+s_6)\gamma\operatorname{ctg}(l_3\gamma).
$$

6.3.1-6. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, $0 \leqslant z \leqslant l_3$. Смешанные краевые задачи.

1°. Рассматривается прямоугольный параллелепипед. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f_0(x,y,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(x,y,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(y,z,t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(y,z,t) &&\text{при}\quad x=l_1 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_3(x,z,t) &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_4(x,z,t) &&\text{при}\quad y=l_2 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_5(x,y,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_6(x,y,t) &&\text{при}\quad z=l_3 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(x,y,z,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_2}\!\!\int_0^{l_1} f_0(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,+\\
&+\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_2}\!\!\int_0^{l_1} f_1(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,+\\
&+a^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_2} g_1(\eta,\zeta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\right]_{\xi=0}d\eta\,d\zeta\,d\tau\,-\\
&-a^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_2} g_2(\eta,\zeta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\right]_{\xi=l_1}d\eta\,d\zeta\,d\tau\,-\\
&-a^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_1} g_3(\xi,\zeta,\tau)G(x,y,z,\xi,0,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\tau\,+\\
&+a^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_1} g_4(\xi,\zeta,\tau)G(x,y,z,\xi,l_2,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\tau\,-\\
&-a^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{l_2}\!\!\int_0^{l_1} g_5(\xi,\eta,\tau)G(x,y,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau\,+\\
&+a^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{l_2}\!\!\int_0^{l_1} g_6(\xi,\eta,\tau)G(x,y,z,\xi,\eta,l_3,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau\,+\\
&+\int_0^{t}\!\!\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_2}\!\!\int_0^{l_1}\Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)=\frac{2}{l_1l_2l_3}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A_mA_k}{\sqrt{\lambda_{nmk}}}\sin(\alpha_n x)\cos(\beta_m y)\cos(\gamma_k z)\times$$
$$\times\sin(\alpha_n\xi)\cos(\beta_m\eta)\cos(\gamma_k\zeta)\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_{nmk}}\,\bigr),$$

где

$$A_m=\begin{cases}1 & \text{при } m=0,\\ 2 & \text{при } m>0,\end{cases}\quad A_k=\begin{cases}1 & \text{при } k=0,\\ 2 & \text{при } k>0,\end{cases}$$
$$\alpha_n=\frac{n\pi}{l_1},\quad \beta_m=\frac{m\pi}{l_2},\quad \gamma_k=\frac{k\pi}{l_3},$$
$$\lambda_{nmk}=a^2(\alpha_n^2+\beta_m^2+\gamma_k^2)+b.$$

2°. Рассматривается прямоугольный параллелепипед. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w&=f_0(x,y,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w&=f_1(x,y,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
w&=g_1(y,z,t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_x w&=g_2(y,z,t) &&\text{при}\quad x=l_1 &&\text{(граничное условие)},\\
w&=g_3(x,z,t) &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_y w&=g_4(x,z,t) &&\text{при}\quad y=l_2 &&\text{(граничное условие)},\\
w&=g_5(x,y,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w&=g_6(x,y,t) &&\text{при}\quad z=l_3 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,y,z,t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_2}\!\!\int_0^{l_1} f_0(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta+$$
$$+\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_2}\!\!\int_0^{l_1} f_1(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta+$$
$$+a^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_2} g_1(\eta,\zeta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=0}d\eta\,d\zeta\,d\tau+$$
$$+a^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_2} g_2(\eta,\zeta,\tau)G(x,y,z,l_1,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau+$$
$$+a^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_1} g_3(\xi,\zeta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\eta=0}d\xi\,d\zeta\,d\tau+$$
$$+a^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_1} g_4(\xi,\zeta,\tau)G(x,y,z,\xi,l_2,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\tau+$$
$$+a^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{l_2}\!\!\int_0^{l_1} g_5(\xi,\eta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\zeta=0}d\xi\,d\eta\,d\tau+$$
$$+a^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{l_2}\!\!\int_0^{l_1} g_6(\xi,\eta,\tau)G(x,y,z,\xi,\eta,l_3,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau+$$
$$+\int_0^{t}\!\!\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_2}\!\!\int_0^{l_1}\Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau.$$

Здесь

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)=\frac{8}{l_1l_2l_3}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\lambda_{nmk}}}\sin(\alpha_n x)\sin(\beta_m y)\sin(\gamma_k z)\times$$
$$\times\sin(\alpha_n\xi)\sin(\beta_m\eta)\sin(\gamma_k\zeta)\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_{nmk}}\,\bigr),$$

где

$$\alpha_n=\frac{\pi(2n+1)}{2l_1},\quad \beta_m=\frac{\pi(2m+1)}{2l_2},\quad \gamma_k=\frac{\pi(2k+1)}{2l_3},$$
$$\lambda_{nmk}=a^2(\alpha_n^2+\beta_m^2+\gamma_k^2)+b.$$

6.3.2. Задачи в цилиндрической системе координат

Неоднородное уравнение Клейна — Гордона в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right] - bw + \Phi(r,\varphi,z,t), \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Одномерные задачи с осевой симметрией, имеющие решения $w = w(r,t)$, рассматриваются в разд. 4.2.5. Двумерные задачи, решение которых имеет вид $w = w(r,\varphi,t)$ и $w = w(r,z,t)$, исследуются в разд. 5.3.2–5.3.3.

6.3.2-1. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Первая краевая задача.

Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(\varphi,z,t) &&\text{при}\quad r=R &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_3(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=l &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(r,\varphi,z,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi f_0(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,+\\
&+\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi f_1(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,-\\
&-a^2R\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\right]_{\xi=R}d\eta\,d\zeta\,d\tau\,+\\
&+a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi g_2(\xi,\eta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\right]_{\zeta=0}d\xi\,d\eta\,d\tau\,-\\
&-a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi g_3(\xi,\eta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\right]_{\zeta=l}d\xi\,d\eta\,d\tau\,+\\
&+\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi\Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{2}{\pi R^2 l}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_n}{[J_n'(\mu_{nm}R)]^2\sqrt{\lambda_{nmk}}}J_n(\mu_{nm}r)J_n(\mu_{nm}\xi)\times\\
\times\cos[n(\varphi-\eta)]\sin\left(\frac{k\pi z}{l}\right)\sin\left(\frac{k\pi\zeta}{l}\right)\sin\left(t\sqrt{\lambda_{nmk}}\right),
\end{aligned}$$

где

$$\lambda_{nmk} = a^2\mu_{nm}^2 + \frac{a^2k^2\pi^2}{l^2} + b, \qquad A_n = \begin{cases} 1 & \text{при}\ n=0,\\ 2 & \text{при}\ n>0,\end{cases}$$

$J_n(\xi)$ — функции Бесселя (штрих означает производную по аргументу), μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_n(\mu R) = 0$.

6.3.2-2. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Вторая краевая задача.

Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_r w &= g_1(\varphi,z,t) &&\text{при}\quad r=R &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_2(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_3(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=l &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,\varphi,z,t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi f_0(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta+$$
$$+\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi f_1(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta+$$
$$+a^2R\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,R,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau-$$
$$-a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi g_2(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau+$$
$$+a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi g_3(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,l,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi\Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)=\frac{\sin(t\sqrt{b})}{\pi R^2 l\sqrt{b}}+\frac{2}{\pi R^2 l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\beta_k}}\cos\Bigl(\frac{k\pi x}{l}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{k\pi\xi}{l}\Bigr)\sin\bigl(t\sqrt{\beta_k}\bigr)+$$
$$+\frac{1}{\pi l}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A_nA_k\mu_{nm}^2J_n(\mu_{nm}r)J_n(\mu_{nm}\xi)}{(\mu_{nm}^2R^2-n^2)[J_n(\mu_{nm}R)]^2}\cos[n(\varphi-\eta)]\cos\Bigl(\frac{k\pi x}{l}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{k\pi\xi}{l}\Bigr)\frac{\sin(\lambda_{nmk}t)}{\lambda_{nmk}},$$
$$\beta_k=\frac{a^2k^2\pi^2}{l^2}+b,\quad \lambda_{nmk}=\sqrt{a^2\mu_{nm}^2+\frac{a^2k^2\pi^2}{l^2}+b},\quad A_n=\begin{cases}1 & \text{при } n=0,\\ 2 & \text{при } n>0,\end{cases}$$

где $J_n(\xi)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_n'(\mu R)=0$.

6.3.2-3. Область: $0\leqslant r\leqslant R,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant z\leqslant l$. Третья краевая задача.

Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w&=f_0(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w&=f_1(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_r w+k_1w&=g(\varphi,z,t) &&\text{при}\quad r=R &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w-k_2w&=g_2(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w+k_3w&=g_3(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=l &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение $w(r,\varphi,z,t)$ определяется по формуле из разд. 6.3.2-2, где

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{A_n\mu_{nm}^2J_n(\mu_{nm}r)J_n(\mu_{nm}\xi)\cos[n(\varphi-\eta)]\,h_s(z)h_s(\zeta)\sin(\lambda_{nms}t)}{(\mu_{nm}^2R^2+k_1^2R^2-n^2)[J_n(\mu_{nm}R)]^2\|h_s\|^2\lambda_{nms}}.$$

Здесь

$$A_n=\begin{cases}1 & \text{при } n=0,\\ 2 & \text{при } n>0,\end{cases}\qquad \lambda_{nms}=\sqrt{a^2\mu_{nm}^2+a^2\beta_s^2+b},$$
$$h_s(z)=\cos(\beta_s z)+\frac{k_2}{\beta_s}\sin(\beta_s z),\quad \|h_s\|^2=\frac{k_3}{2\beta_s^2}\,\frac{\beta_s^2+k_2^2}{\beta_s^2+k_3^2}+\frac{k_2}{2\beta_s^2}+\frac{l}{2}\Bigl(1+\frac{k_2^2}{\beta_s^2}\Bigr);$$

$J_n(\xi)$ — функции Бесселя, μ_{nm} и β_s — положительные корни трансцендентных уравнений

$$\mu J_n'(\mu R)+k_1J_n(\mu R)=0,\qquad \frac{\operatorname{tg}(\beta l)}{\beta}=\frac{k_2+k_3}{\beta^2-k_2k_3}.$$

6.3.2-4. Область: $0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant z \leqslant l$. Смешанные краевые задачи.

1°. Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(r,\varphi,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,\varphi,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(\varphi,z,t) && \text{при} \quad r=R && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_2(r,\varphi,t) && \text{при} \quad z=0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_3(r,\varphi,t) && \text{при} \quad z=l && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(r,\varphi,z,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi f_0(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta \,+\\
&+\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi f_1(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta \,-\\
&- a^2R\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\xi=R}d\eta\,d\zeta\,d\tau \,-\\
&- a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi g_2(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau \,+\\
&+ a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi g_3(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,l,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau \,+\\
&+\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi\Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau.
\end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{\pi R^2 l}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A_nA_k}{[J_n'(\mu_{nm}R)]^2\sqrt{\lambda_{nmk}}}J_n(\mu_{nm}r)J_n(\mu_{nm}\xi)\times$$
$$\times\cos\big[n(\varphi-\eta)\big]\cos\Big(\frac{k\pi z}{l}\Big)\cos\Big(\frac{k\pi\zeta}{l}\Big)\sin\big(t\sqrt{\lambda_{nmk}}\,\big),$$

$$\lambda_{nmk} = a^2\mu_{nm}^2 + \frac{a^2k^2\pi^2}{l^2} + b, \quad A_n = \begin{cases}1 & \text{при} \ \ n=0,\\ 2 & \text{при} \ \ n>0,\end{cases}$$

где $J_n(\xi)$ — функции Бесселя (штрих означает производную по аргументу), μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_n(\mu R) = 0$.

2°. Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(r,\varphi,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,\varphi,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_r w &= g_1(\varphi,z,t) && \text{при} \quad r=R && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(r,\varphi,t) && \text{при} \quad z=0 && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_3(r,\varphi,t) && \text{при} \quad z=l && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(r,\varphi,z,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi f_0(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta \,+\\
&+\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi f_1(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta \,+\\
&+ a^2R\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,R,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau \,+\\
&+ a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi g_2(\xi,\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\zeta=0}d\xi\,d\eta\,d\tau \,-\\
&- a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi g_3(\xi,\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\zeta=l}d\xi\,d\eta\,d\tau \,+\\
&+\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi\Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau.
\end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)=\frac{2}{\pi R^2 l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\beta_k}}\sin\Bigl(\frac{k\pi z}{l}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{k\pi\zeta}{l}\Bigr)\sin\bigl(t\sqrt{\beta_k}\bigr)+$$
$$+\frac{2}{\pi l}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_n\mu_{nm}^2}{(\mu_{nm}^2R^2-n^2)[J_n(\mu_{nm}R)]^2\sqrt{\lambda_{nmk}}}J_n(\mu_{nm}r)J_n(\mu_{nm}\xi)\times$$
$$\times\cos\bigl[n(\varphi-\eta)\bigr]\sin\Bigl(\frac{k\pi z}{l}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{k\pi\zeta}{l}\Bigr)\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_{nmk}}\bigr),$$
$$\beta_k=\frac{a^2k^2\pi^2}{l^2}+b,\quad \lambda_{nmk}=a^2\mu_{nm}^2+\frac{a^2k^2\pi^2}{l^2}+b,\quad A_n=\begin{cases}1 & \text{при } n=0,\\ 2 & \text{при } n>0,\end{cases}$$

где $J_n(\xi)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J'_n(\mu R)=0$.

6.3.2-5. Область: $R_1\leqslant r\leqslant R_2$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $0\leqslant z\leqslant l$. Первая краевая задача.

Рассматривается полый круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w&=f_0(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w&=f_1(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
w&=g_1(\varphi,z,t) &&\text{при}\quad r=R_1 &&\text{(граничное условие)},\\
w&=g_2(\varphi,z,t) &&\text{при}\quad r=R_2 &&\text{(граничное условие)},\\
w&=g_3(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\
w&=g_4(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=l &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,\varphi,z,t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}f_0(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta+$$
$$+\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}f_1(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta+$$
$$+a^2R_1\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi}g_1(\eta,\zeta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=R_1}d\eta\,d\zeta\,d\tau-$$
$$-a^2R_2\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi}g_2(\eta,\zeta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=R_2}d\eta\,d\zeta\,d\tau+$$
$$+a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}g_3(\xi,\eta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\zeta=0}\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau-$$
$$-a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}g_4(\xi,\eta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\zeta=l}\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)=\frac{\pi}{2l}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_n\mu_{nm}^2J_n^2(\mu_{nm}R_2)}{J_n^2(\mu_{nm}R_1)-J_n^2(\mu_{nm}R_2)}Z_{nm}(r)Z_{nm}(\xi)\times$$
$$\times\cos\bigl[n(\varphi-\eta)\bigr]\sin\Bigl(\frac{k\pi z}{l}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{k\pi\zeta}{l}\Bigr)\frac{\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_{nmk}}\bigr)}{\sqrt{\lambda_{nmk}}},$$

где

$$A_n=\begin{cases}1 & \text{при } n=0,\\ 2 & \text{при } n\neq 0,\end{cases}\qquad \lambda_{nmk}=a^2\mu_{nm}^2+\frac{a^2k^2\pi^2}{l^2}+b,$$
$$Z_{nm}(r)=J_n(\mu_{nm}R_1)Y_n(\mu_{nm}r)-Y_n(\mu_{nm}R_1)J_n(\mu_{nm}r);$$

$J_n(r)$ и $Y_n(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_n(\mu R_1)Y_n(\mu R_2)-Y_n(\mu R_1)J_n(\mu R_2)=0.$$

6.3.2-6. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Вторая краевая задача.

Рассматривается полый круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_r w &= g_1(\varphi,z,t) &&\text{при}\quad r=R_1 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_r w &= g_2(\varphi,z,t) &&\text{при}\quad r=R_2 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_3(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_4(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=l &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(r,\varphi,z,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} f_0(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,+\\
&+\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} f_1(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,-\\
&-a^2R_1\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,R_1,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau\,+\\
&+a^2R_2\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi} g_2(\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,R_2,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau\,-\\
&-a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} g_3(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau\,+\\
&+a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} g_4(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,l,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau\,+\\
&+\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} \Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) &= \frac{\sin\bigl(t\sqrt{b}\bigr)}{\pi(R_2^2-R_1^2)l\sqrt{b}} + \frac{2}{\pi(R_2^2-R_1^2)l}\sum_{k=1}^{\infty}\cos\Bigl(\frac{k\pi z}{l}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{k\pi\zeta}{l}\Bigr)\frac{\sin\bigl(t\sqrt{\beta_k}\bigr)}{\sqrt{\beta_k}}\,+\\
&+\frac{1}{\pi l}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A_nA_k\mu_{nm}^2 Z_{nm}(r)Z_{nm}(\xi)}{(\mu_{nm}^2R_2^2-n^2)Z_{nm}^2(R_2)-(\mu_{nm}^2R_1^2-n^2)Z_{nm}^2(R_1)}\,\times\\
&\qquad\times\cos\bigl[n(\varphi-\eta)\bigr]\cos\Bigl(\frac{k\pi z}{l}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{k\pi\zeta}{l}\Bigr)\frac{\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_{nmk}}\bigr)}{\sqrt{\lambda_{nmk}}},
\end{aligned}$$

где

$$A_n = \begin{cases}1 & \text{при}\ n=0,\\ 2 & \text{при}\ n\neq 0,\end{cases}\qquad \beta_k = \frac{a^2k^2\pi^2}{l^2}+b,\qquad \lambda_{nmk} = a^2\mu_{nm}^2+\frac{a^2k^2\pi^2}{l^2}+b,$$

$$Z_{nm}(r) = J_n'(\mu_{nm}R_1)Y_n(\mu_{nm}r) - Y_n'(\mu_{nm}R_1)J_n(\mu_{nm}r);$$

$J_n(r)$ и $Y_n(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_n'(\mu R_1)Y_n'(\mu R_2) - Y_n'(\mu R_1)J_n'(\mu R_2) = 0.$$

6.3.2-7. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Третья краевая задача.

Рассматривается полый круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_r w - k_1 w &= g_1(\varphi,z,t) &&\text{при}\quad r=R_1 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_r w + k_2 w &= g_2(\varphi,z,t) &&\text{при}\quad r=R_2 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w - k_3 w &= g_3(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w + k_4 w &= g_4(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=l &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение $w(r,\varphi,z,t)$ определяется по формуле из разд. 6.3.2-6, где

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{A_n\mu_{nm}^2}{\|h_s\|^2\sqrt{a^2\mu_{nm}^2+a^2\lambda_s^2+b}}\times$$
$$\times\frac{Z_{nm}(r)Z_{nm}(\xi)\cos\bigl[n(\varphi-\eta)\bigr]h_s(z)h_s(\zeta)\sin\bigl(t\sqrt{a^2\mu_{nm}^2+a^2\lambda_s^2+b}\,\bigr)}{(k_2^2R_2^2+\mu_{nm}^2R_2^2-n^2)Z_{nm}^2(R_2)-(k_1^2R_1^2+\mu_{nm}^2R_1^2-n^2)Z_{nm}^2(R_1)}.$$

Здесь

$$Z_{nm}(r)=\bigl[\mu_{nm}J_n'(\mu_{nm}R_1)-k_1J_n(\mu_{nm}R_1)\bigr]Y_n(\mu_{nm}r)-$$
$$-\bigl[\mu_{nm}Y_n'(\mu_{nm}R_1)-k_1Y_n(\mu_{nm}R_1)\bigr]J_n(\mu_{nm}r),$$

$$A_n=\begin{cases}1 & \text{при } n=0,\\ 2 & \text{при } n\neq 0,\end{cases}\quad h_s(z)=\cos(\lambda_s z)+\frac{k_3}{\lambda_s}\sin(\lambda_s z),\quad \|h_s\|^2=\frac{k_4}{2\lambda_s^2}\,\frac{\lambda_s^2+k_3^2}{\lambda_s^2+k_4^2}+\frac{k_3}{2\lambda_s^2}+\frac{l}{2}\Bigl(1+\frac{k_3^2}{\lambda_s^2}\Bigr),$$

где $J_n(r)$ и $Y_n(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\bigl[\mu J_n'(\mu R_1)-k_1J_n(\mu R_1)\bigr]\bigl[\mu Y_n'(\mu R_2)+k_2Y_n(\mu R_2)\bigr]=$$
$$=\bigl[\mu Y_n'(\mu R_1)-k_1Y_n(\mu R_1)\bigr]\bigl[\mu J_n'(\mu R_2)+k_2J_n(\mu R_2)\bigr];$$

λ_s — положительные корни трансцендентного уравнения $\dfrac{\operatorname{tg}(\lambda l)}{\lambda}=\dfrac{k_3+k_4}{\lambda^2-k_3k_4}$.

6.3.2-8. Область: $R_1\leqslant r\leqslant R_2,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant z\leqslant l$. Смешанные краевые задачи.

1°. Рассматривается полый круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w&=f_0(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w&=f_1(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
w&=g_1(\varphi,z,t) &&\text{при}\quad r=R_1 &&\text{(граничное условие)},\\
w&=g_2(\varphi,z,t) &&\text{при}\quad r=R_2 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w&=g_3(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w&=g_4(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=l &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,\varphi,z,t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}f_0(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta+$$
$$+\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}f_1(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta+$$
$$+a^2R_1\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi}g_1(\eta,\zeta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=R_1}d\eta\,d\zeta\,d\tau-$$
$$-a^2R_2\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi}g_2(\eta,\zeta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=R_2}d\eta\,d\zeta\,d\tau-$$
$$-a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}g_3(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau+$$
$$+a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}g_4(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,l,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)=\frac{\pi}{4l}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A_nA_k\mu_{nm}^2J_n^2(\mu_{nm}R_2)}{J_n^2(\mu_{nm}R_1)-J_n^2(\mu_{nm}R_2)}Z_{nm}(r)Z_{nm}(\xi)\times$$
$$\times\cos\bigl[n(\varphi-\eta)\bigr]\cos\Bigl(\frac{k\pi z}{l}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{k\pi\zeta}{l}\Bigr)\frac{\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_{nmk}}\,\bigr)}{\sqrt{\lambda_{nmk}}},$$

где

$$A_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 2 & \text{при } n \neq 0, \end{cases} \qquad \lambda_{nmk} = a^2\mu_{nm}^2 + \frac{a^2k^2\pi^2}{l^2} + b,$$
$$Z_{nm}(r) = J_n(\mu_{nm}R_1)Y_n(\mu_{nm}r) - Y_n(\mu_{nm}R_1)J_n(\mu_{nm}r);$$

$J_n(r)$ и $Y_n(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_n(\mu R_1)Y_n(\mu R_2) - Y_n(\mu R_1)J_n(\mu R_2) = 0.$$

2°. Рассматривается полый круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r,\varphi,z) && \text{при } t = 0 && \text{(начальное условие)}, \\ \partial_t w &= f_1(r,\varphi,z) && \text{при } t = 0 && \text{(начальное условие)}, \\ \partial_r w &= g_1(\varphi,z,t) && \text{при } r = R_1 && \text{(граничное условие)}, \\ \partial_r w &= g_2(\varphi,z,t) && \text{при } r = R_2 && \text{(граничное условие)}, \\ w &= g_3(r,\varphi,t) && \text{при } z = 0 && \text{(граничное условие)}, \\ w &= g_4(r,\varphi,t) && \text{при } z = l && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,\varphi,z,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} f_0(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta + \\ &+ \int_0^l\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} f_1(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta - \\ &- a^2R_1\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,R_1,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau + \\ &+ a^2R_2\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi} g_2(\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,R_2,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau + \\ &+ a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} g_3(\xi,\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\zeta=0}\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau - \\ &- a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} g_4(\xi,\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\zeta=l}\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau + \\ &+ \int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} \Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) &= \frac{2}{\pi(R_2^2-R_1^2)l}\sum_{k=1}^{\infty}\sin\Big(\frac{k\pi z}{l}\Big)\sin\Big(\frac{k\pi\zeta}{l}\Big)\frac{\sin\big(t\sqrt{\beta_k}\big)}{\sqrt{\beta_k}} + \\ &+ \frac{2}{\pi l}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_n\mu_{nm}^2Z_{nm}(r)Z_{nm}(\xi)}{(\mu_{nm}^2R_2^2-n^2)Z_{nm}^2(R_2)-(\mu_{nm}^2R_1^2-n^2)Z_{nm}^2(R_1)}\times \\ &\times\cos[n(\varphi-\eta)]\sin\Big(\frac{k\pi z}{l}\Big)\sin\Big(\frac{k\pi\zeta}{l}\Big)\frac{\sin\big(t\sqrt{\lambda_{nmk}}\big)}{\sqrt{\lambda_{nmk}}}, \end{aligned}$$

где

$$A_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 2 & \text{при } n \neq 0, \end{cases} \qquad \beta_k = \frac{a^2k^2\pi^2}{l^2} + b, \qquad \lambda_{nmk} = a^2\mu_{nm}^2 + \frac{a^2k^2\pi^2}{l^2} + b,$$
$$Z_{nm}(r) = J_n'(\mu_{nm}R_1)Y_n(\mu_{nm}r) - Y_n'(\mu_{nm}R_1)J_n(\mu_{nm}r);$$

$J_n(r)$ и $Y_n(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_n'(\mu R_1)Y_n'(\mu R_2) - Y_n'(\mu R_1)J_n'(\mu R_2) = 0.$$

6.3.2-9. Область: $0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0,\ 0 \leqslant z \leqslant l$. Первая краевая задача.

Рассматривается цилиндрический сектор конечной толщины. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f_0(r,\varphi,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,\varphi,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(\varphi,z,t) && \text{при} \quad r=R && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(r,z,t) && \text{при} \quad \varphi=0 && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_3(r,z,t) && \text{при} \quad \varphi=\varphi_0 && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_4(r,\varphi,t) && \text{при} \quad z=0 && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_5(r,\varphi,t) && \text{при} \quad z=l && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(r,\varphi,z,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\int_0^{\varphi_0}\int_0^R f_0(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,+\\
&+\int_0^l\int_0^{\varphi_0}\int_0^R f_1(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,-\\
&-a^2R\int_0^t\int_0^l\int_0^{\varphi_0} g_1(\eta,\zeta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=R}\,d\eta\,d\zeta\,d\tau\,+\\
&+a^2\int_0^t\int_0^l\int_0^R g_2(\xi,\zeta,\tau)\frac{1}{\xi}\Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\eta=0}\,d\xi\,d\zeta\,d\tau\,-\\
&-a^2\int_0^t\int_0^l\int_0^R g_3(\xi,\zeta,\tau)\frac{1}{\xi}\Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\eta=\varphi_0}\,d\xi\,d\zeta\,d\tau\,+\\
&+a^2\int_0^t\int_0^{\varphi_0}\int_0^R g_4(\xi,\eta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\zeta=0}\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau\,-\\
&-a^2\int_0^t\int_0^{\varphi_0}\int_0^R g_5(\xi,\eta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\zeta=l}\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau\,+\\
&+\int_0^t\int_0^l\int_0^{\varphi_0}\int_0^R f_1(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) &= \frac{8}{R^2l\varphi_0}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}r)J_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}\xi)}{[J'_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}R)]^2}\sin\Bigl(\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{n\pi\eta}{\varphi_0}\Bigr)\times\\
&\times\sin\Bigl(\frac{k\pi z}{l}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{k\pi\zeta}{l}\Bigr)\frac{\sin\bigl(t\sqrt{a^2\mu_{nm}^2+a^2k^2\pi^2l^{-2}+b}\bigr)}{\sqrt{a^2\mu_{nm}^2+a^2k^2\pi^2l^{-2}+b}},
\end{aligned}
$$

где $J_{n\pi/\varphi_0}(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_{n\pi/\varphi_0}(\mu R)=0$.

6.3.2-10. Область: $0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0,\ 0 \leqslant z \leqslant l$. Смешанная краевая задача.

Рассматривается цилиндрический сектор конечной толщины. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f_0(r,\varphi,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,\varphi,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(\varphi,z,t) && \text{при} \quad r=R && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(r,z,t) && \text{при} \quad \varphi=0 && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_3(r,z,t) && \text{при} \quad \varphi=\varphi_0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_4(r,\varphi,t) && \text{при} \quad z=0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_5(r,\varphi,t) && \text{при} \quad z=l && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$w(r,\varphi,z,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\int_0^{\varphi_0}\int_0^R f_0(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta +$$
$$+\int_0^l\int_0^{\varphi_0}\int_0^R f_1(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta -$$
$$-a^2R\int_0^t\int_0^l\int_0^{\varphi_0} g_1(\eta,\zeta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\right]_{\xi=R} d\eta\,d\zeta\,d\tau +$$
$$+a^2\int_0^t\int_0^l\int_0^R g_2(\xi,\zeta,\tau)\frac{1}{\xi}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\right]_{\eta=0} d\xi\,d\zeta\,d\tau -$$
$$-a^2\int_0^t\int_0^l\int_0^R g_3(\xi,\zeta,\tau)\frac{1}{\xi}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\right]_{\eta=\varphi_0} d\xi\,d\zeta\,d\tau -$$
$$-a^2\int_0^t\int_0^{\varphi_0}\int_0^R g_4(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau +$$
$$+a^2\int_0^t\int_0^{\varphi_0}\int_0^R g_5(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,l,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau +$$
$$+\int_0^t\int_0^l\int_0^{\varphi_0}\int_0^R f_1(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{4}{R^2 l\varphi_0}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A_k J_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}r)J_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}\xi)}{[J'_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}R)]^2}\sin\left(\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\right)\sin\left(\frac{n\pi\eta}{\varphi_0}\right)\times$$
$$\times\cos\left(\frac{k\pi z}{l}\right)\cos\left(\frac{k\pi\zeta}{l}\right)\frac{\sin\left(t\sqrt{a^2\mu_{nm}^2 + a^2k^2\pi^2l^{-2} + b}\right)}{\sqrt{a^2\mu_{nm}^2 + a^2k^2\pi^2l^{-2} + b}},$$

где $A_0 = 1$, $A_k = 2$ при $k \geqslant 1$; $J_{n\pi/\varphi_0}(r)$ — функции Бесселя; μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_{n\pi/\varphi_0}(\mu R) = 0$.

6.3.3. Задачи в сферической системе координат

Неоднородное уравнение Клейна — Гордона в сферической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial w}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right] - bw + \Phi(r,\theta,\varphi,t).$$

Одномерные задачи с центральной симметрией, которые имеют решения $w = w(r,t)$, рассматриваются в разд. 4.2.6.

6.3.3-1. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Первая краевая задача.

Рассматривается сферическая область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r,\theta,\varphi) \quad &\text{при}\quad t = 0 \quad &\text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(r,\theta,\varphi) \quad &\text{при}\quad t = 0 \quad &\text{(начальное условие)},\\ w &= g(\theta,\varphi,t) \quad &\text{при}\quad r = R \quad &\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,\theta,\varphi,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^R f_0(\xi,\eta,\zeta)G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t)\xi^2\sin\eta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta +$$
$$+\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^R f_1(\xi,\eta,\zeta)G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t)\xi^2\sin\eta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta -$$
$$-a^2R^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} g(\eta,\zeta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\right]_{\xi=R}\sin\eta\,d\eta\,d\zeta\,d\tau +$$
$$+\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^R \Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\xi^2\sin\eta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{2\pi R^2\sqrt{r\xi}} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} A_k B_{nmk} J_{n+1/2}(\lambda_{nm} r) J_{n+1/2}(\lambda_{nm}\xi)\times$$

$$\times P_n^k(\cos\theta) P_n^k(\cos\eta)\cos\bigl[k(\varphi-\zeta)\bigr]\sin\bigl(t\sqrt{a^2\lambda_{nm}^2+b}\,\bigr),$$

где

$$A_k = \begin{cases} 1 & \text{при } k=0, \\ 2 & \text{при } k\neq 0, \end{cases} \qquad B_{nmk} = \frac{(2n+1)(n-k)!}{(n+k)!\bigl[J'_{n+1/2}(\lambda_{nm}R)\bigr]^2\sqrt{a^2\lambda_{nm}^2+b}};$$

$J_{n+1/2}(r)$ — функции Бесселя, $P_n^k(\mu)$ — присоединенные функции Лежандра, которые выражаются через полиномы Лежандра $P_n(\mu)$ по формулам

$$P_n^k(\mu) = (1-\mu^2)^{k/2}\frac{d^k}{d\mu^k}P_n(\mu), \qquad P_n(\mu) = \frac{1}{n!\,2^n}\frac{d^n}{d\mu^n}(\mu^2-1)^n;$$

λ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_{n+1/2}(\lambda R)=0$.

6.3.3-2. Область: $0\leqslant r\leqslant R$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$. Вторая краевая задача.

Рассматривается сферическая область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r,\theta,\varphi) && \text{при } t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(r,\theta,\varphi) && \text{при } t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_r w &= g(\theta,\varphi,t) && \text{при } r=R && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,\theta,\varphi,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} f_0(\xi,\eta,\zeta)G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t)\xi^2\sin\eta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta +$$

$$+\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} f_1(\xi,\eta,\zeta)G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t)\xi^2\sin\eta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta +$$

$$+a^2R^2\int_0^{t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} g(\eta,\zeta,\tau)G(r,\theta,\varphi,R,\eta,\zeta,t-\tau)\sin\eta\,d\eta\,d\zeta\,d\tau +$$

$$+\int_0^{t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\xi^2\sin\eta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{3\sin\bigl(t\sqrt{b}\bigr)}{4\pi R^3\sqrt{b}} + \frac{1}{2\pi\sqrt{r\xi}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{A_kB_{nmk}}{\sqrt{a^2\lambda_{nm}^2+b}}J_{n+1/2}(\lambda_{nm}r)J_{n+1/2}(\lambda_{nm}\xi)\times$$

$$\times P_n^k(\cos\theta)P_n^k(\cos\eta)\cos\bigl[k(\varphi-\zeta)\bigr]\sin\bigl(t\sqrt{a^2\lambda_{nm}^2+b}\,\bigr),$$

где

$$A_k = \begin{cases} 1 & \text{при } k=0, \\ 2 & \text{при } k\neq 0, \end{cases} \qquad B_{nmk} = \frac{\lambda_{nm}^2(2n+1)(n-k)!}{(n+k)!\bigl[R^2\lambda_{nm}^2-n(n+1)\bigr]\bigl[J_{n+1/2}(\lambda_{nm}R)\bigr]^2};$$

$J_{n+1/2}(r)$ — функции Бесселя, $P_n^k(\mu)$ — присоединенные функции Лежандра (см. разд. 6.3.3-1), λ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$2\lambda R J'_{n+1/2}(\lambda R) - J_{n+1/2}(\lambda R) = 0.$$

6.3.3-3. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Третья краевая задача.

Рассматривается сферическая область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r,\theta,\varphi) \quad &\text{при}\quad t=0 \quad &\text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(r,\theta,\varphi) \quad &\text{при}\quad t=0 \quad &\text{(начальное условие)},\\ \partial_r w + kw &= g(\theta,\varphi,t) \quad &\text{при}\quad r=R \quad &\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение $w(r,\theta,\varphi,t)$ определяется по формуле из разд. 6.3.3-2, где

$$G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{r\xi}} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n} \frac{A_s B_{nms}}{\sqrt{a^2\lambda_{nm}^2+b}} J_{n+1/2}(\lambda_{nm} r) J_{n+1/2}(\lambda_{nm}\xi)\times$$
$$\times P_n^s(\cos\theta) P_n^s(\cos\eta)\cos\bigl[s(\varphi-\zeta)\bigr]\sin\bigl(t\sqrt{a^2\lambda_{nm}^2+b}\bigr).$$

Здесь

$$A_s = \begin{cases} 1 & \text{при}\ s=0,\\ 2 & \text{при}\ s\neq 0, \end{cases} \qquad B_{nms} = \frac{\lambda_{nm}^2(2n+1)(n-s)!}{(n+s)!\bigl[R^2\lambda_{nm}^2 + (kR+n)(kR-n-1)\bigr]\bigl[J_{n+1/2}(\lambda_{nm}R)\bigr]^2};$$

$J_{n+1/2}(r)$ — функции Бесселя, $P_n^s(\mu)$ — присоединенные функции Лежандра (см. разд. 6.3.3-1), λ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\lambda R J'_{n+1/2}(\lambda R) + \bigl(kR - \tfrac{1}{2}\bigr) J_{n+1/2}(\lambda R) = 0.$$

6.3.3-4. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Первая краевая задача.

Рассматривается сферический слой. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r,\theta,\varphi) \quad &\text{при}\quad t=0 \quad &\text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(r,\theta,\varphi) \quad &\text{при}\quad t=0 \quad &\text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(\theta,\varphi,t) \quad &\text{при}\quad r=R_1 \quad &\text{(граничное условие)},\\ w &= g_2(\theta,\varphi,t) \quad &\text{при}\quad r=R_2 \quad &\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,\theta,\varphi,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi}\!\!\int_{R_1}^{R_2} f_0(\xi,\eta,\zeta) G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t)\xi^2\sin\eta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta +$$
$$+\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi}\!\!\int_{R_1}^{R_2} f_1(\xi,\eta,\zeta) G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t)\xi^2\sin\eta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta +$$
$$+a^2R_1^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=R_1}\sin\eta\,d\eta\,d\zeta\,d\tau -$$
$$-a^2R_2^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} g_2(\eta,\zeta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=R_2}\sin\eta\,d\eta\,d\zeta\,d\tau +$$
$$+\int_0^{t}\!\!\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi}\!\!\int_{R_1}^{R_2} \Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau) G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\xi^2\sin\eta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau,$$

где

$$G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{\pi}{8\sqrt{r\xi}} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{A_k B_{nmk}}{\sqrt{a^2\lambda_{nm}^2+b}} Z_{n+1/2}(\lambda_{nm} r) Z_{n+1/2}(\lambda_{nm}\xi)\times$$
$$\times P_n^k(\cos\theta) P_n^k(\cos\eta)\cos\bigl[k(\varphi-\zeta)\bigr]\sin\bigl(t\sqrt{a^2\lambda_{nm}^2+b}\bigr).$$

Здесь

$$Z_{n+1/2}(\lambda_{nm}r) = J_{n+1/2}(\lambda_{nm}R_1)Y_{n+1/2}(\lambda_{nm}r) - Y_{n+1/2}(\lambda_{nm}R_1)J_{n+1/2}(\lambda_{nm}r),$$

$$A_k = \begin{cases} 1 & \text{при } k=0, \\ 2 & \text{при } k\neq 0, \end{cases} \qquad B_{nmk} = \frac{\lambda_{nm}(2n+1)(n-k)!\,J^2_{n+1/2}(\lambda_{nm}R_2)}{(n+k)!\left[J^2_{n+1/2}(\lambda_{nm}R_1) - J^2_{n+1/2}(\lambda_{nm}R_2)\right]},$$

где $J_{n+1/2}(r)$ — функции Бесселя, $P_n^k(\mu)$ — присоединенные функции Лежандра, которые выражаются через полиномы Лежандра $P_n(\mu)$ по формулам

$$P_n^k(\mu) = (1-\mu^2)^{k/2}\frac{d^k}{d\mu^k}P_n(\mu), \qquad P_n(\mu) = \frac{1}{n!\,2^n}\frac{d^n}{d\mu^n}(\mu^2-1)^n;$$

λ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$Z_{n+1/2}(\lambda R_2) = 0.$$

6.3.3-5. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Вторая краевая задача.

Рассматривается сферический слой. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r,\theta,\varphi) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)}, \\ \partial_t w &= f_1(r,\theta,\varphi) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)}, \\ \partial_r w &= g_1(\theta,\varphi,t) && \text{при} \quad r=R_1 && \text{(граничное условие)}, \\ \partial_r w &= g_2(\theta,\varphi,t) && \text{при} \quad r=R_2 && \text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,\theta,\varphi,t) = {}& \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi}\!\!\int_{R_1}^{R_2} f_0(\xi,\eta,\zeta)G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t)\xi^2\sin\eta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta + {} \\ &+ \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi}\!\!\int_{R_1}^{R_2} f_1(\xi,\eta,\zeta)G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t)\xi^2\sin\eta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta - {} \\ &- a^2R_1^2\int_0^t\!\!\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau)G(r,\theta,\varphi,R_1,\eta,\zeta,t-\tau)\,\sin\eta\,d\eta\,d\zeta\,d\tau + {} \\ &+ a^2R_2^2\int_0^t\!\!\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} g_2(\eta,\zeta,\tau)G(r,\theta,\varphi,R_2,\eta,\zeta,t-\tau)\,\sin\eta\,d\eta\,d\zeta\,d\tau + {} \\ &+ \int_0^t\!\!\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi}\!\!\int_{R_1}^{R_2} \Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\xi^2\sin\eta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t) = {}& \frac{3\sin\bigl(t\sqrt{b}\bigr)}{4\pi(R_2^3-R_1^3)\sqrt{b}} + \frac{1}{4\pi\sqrt{r\xi}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{A_k}{B_{nmk}}Z_{n+1/2}(\lambda_{nm}r)Z_{n+1/2}(\lambda_{nm}\xi)\times \\ &\times P_n^k(\cos\theta)P_n^k(\cos\eta)\cos\bigl[k(\varphi-\zeta)\bigr]\frac{\sin\bigl(t\sqrt{a^2\lambda_{nm}^2+b}\bigr)}{\sqrt{a^2\lambda_{nm}^2+b}}. \end{aligned}$$

Здесь

$$A_k = \begin{cases} 1 & \text{при } k=0, \\ 2 & \text{при } k\neq 0, \end{cases} \qquad B_{nmk} = \frac{(n+k)!}{(2n+1)(n-k)!}\int_{R_1}^{R_2} rZ^2_{n+1/2}(\lambda_{nm}r)\,dr,$$

$$\begin{aligned} Z_{n+1/2}(\lambda_{nm}r) = {}& \Bigl[\lambda_{nm}J'_{n+1/2}(\lambda_{nm}R_1) - \frac{1}{2R_1}J_{n+1/2}(\lambda_{nm}R_1)\Bigr]Y_{n+1/2}(\lambda_{nm}r) - {} \\ &- \Bigl[\lambda_{nm}Y'_{n+1/2}(\lambda_{nm}R_1) - \frac{1}{2R_1}Y_{n+1/2}(\lambda_{nm}R_1)\Bigr]J_{n+1/2}(\lambda_{nm}r), \end{aligned}$$

где $J_{n+1/2}(r)$ и $Y_{n+1/2}(r)$ — функции Бесселя, $P_n^k(\mu)$ — присоединенные функции Лежандра (см. разд. 6.3.3-4), λ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\lambda Z'_{n+1/2}(\lambda R_2) - \frac{1}{2R_2}Z_{n+1/2}(\lambda R_2) = 0.$$

6.3.3-6. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Третья краевая задача.

Рассматривается сферический слой. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(r,\theta,\varphi) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,\theta,\varphi) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_r w - k_1 w &= g_1(\theta,\varphi,t) && \text{при} \quad r=R_1 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_r w + k_2 w &= g_2(\theta,\varphi,t) && \text{при} \quad r=R_2 && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение $w(r,\theta,\varphi,t)$ определяется по формуле из разд. 6.3.3-5, где

$$G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{4\pi\sqrt{r\xi}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{A_s}{B_{nms}}Z_{n+1/2}(\lambda_{nm}r)Z_{n+1/2}(\lambda_{nm}\xi)\times$$
$$\times P_n^s(\cos\theta)P_n^s(\cos\eta)\cos\bigl[s(\varphi-\zeta)\bigr]\frac{\sin\bigl(t\sqrt{a^2\lambda_{nm}^2+b}\bigr)}{\sqrt{a^2\lambda_{nm}^2+b}}.$$

Здесь

$$A_s = \begin{cases}1 & \text{при}\ \ s=0,\\ 2 & \text{при}\ \ s\neq 0,\end{cases}\qquad B_{nms} = \frac{(n+s)!}{(2n+1)(n-s)!}\int_{R_1}^{R_2} rZ_{n+1/2}^2(\lambda_{nm}r)\,dr,$$

$$Z_{n+1/2}(\lambda r) = \Bigl[\lambda J'_{n+1/2}(\lambda R_1) - \Bigl(k_1+\frac{1}{2R_1}\Bigr)J_{n+1/2}(\lambda R_1)\Bigr]Y_{n+1/2}(\lambda r) -$$
$$-\Bigl[\lambda Y'_{n+1/2}(\lambda R_1) - \Bigl(k_1+\frac{1}{2R_1}\Bigr)Y_{n+1/2}(\lambda R_1)\Bigr]J_{n+1/2}(\lambda r),$$

где $J_{n+1/2}(r)$ и $Y_{n+1/2}(r)$ — функции Бесселя, $P_n^s(\mu)$ — присоединенные функции Лежандра (см. разд. 6.3.3-4), λ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\lambda Z'_{n+1/2}(\lambda R_2) + \Bigl(k_2 - \frac{1}{2R_2}\Bigr)Z_{n+1/2}(\lambda R_2) = 0.$$

6.4. Телеграфное уравнение $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k\frac{\partial w}{\partial t} = a^2\Delta_3 w - bw + \Phi(x,y,z,t)$

6.4.1. Задачи в декартовой системе координат

Трехмерное неоднородное телеграфное уравнение в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k\frac{\partial w}{\partial t} = a^2\Bigl(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\Bigr) - bw + \Phi(x,y,z,t).$$

6.4.1-1. Сведение к трехмерному уравнению Клейна — Гордона.

Замена $w(x,y,z,t) = \exp\bigl(-\frac{1}{2}kt\bigr)u(x,y,z,t)$ приводит к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Bigl(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Bigr) - \bigl(b-\tfrac{1}{4}k^2\bigr)u + \exp\bigl(\tfrac{1}{2}kt\bigr)\Phi(x,y,z,t),$$

которое рассматривается в разд. 6.3.1.

6.4.1-2. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, $0 \leqslant z \leqslant l_3$. Первая краевая задача.

Рассматривается прямоугольный параллелепипед. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f_0(x,y,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(x,y,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(y,z,t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(y,z,t) &&\text{при}\quad x=l_1 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_3(x,z,t) &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_4(x,z,t) &&\text{при}\quad y=l_2 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_5(x,y,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_6(x,y,t) &&\text{при}\quad z=l_3 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(x,y,z,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{l_3}\!\int_0^{l_2}\!\int_0^{l_1} f_0(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,+\\
&+\int_0^{l_3}\!\int_0^{l_2}\!\int_0^{l_1}\bigl[f_1(\xi,\eta,\zeta)+kf_0(\xi,\eta,\zeta)\bigr]G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,+\\
&+a^2\int_0^t\!\int_0^{l_3}\!\int_0^{l_2} g_1(\eta,\zeta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=0}d\eta\,d\zeta\,d\tau\,-\\
&-a^2\int_0^t\!\int_0^{l_3}\!\int_0^{l_2} g_2(\eta,\zeta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=l_1}d\eta\,d\zeta\,d\tau\,+\\
&+a^2\int_0^t\!\int_0^{l_3}\!\int_0^{l_1} g_3(\xi,\zeta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\eta=0}d\xi\,d\zeta\,d\tau\,-\\
&-a^2\int_0^t\!\int_0^{l_3}\!\int_0^{l_1} g_4(\xi,\zeta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\eta=l_2}d\xi\,d\zeta\,d\tau\,+\\
&+a^2\int_0^t\!\int_0^{l_2}\!\int_0^{l_1} g_5(\xi,\eta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\zeta=0}d\xi\,d\eta\,d\tau\,-\\
&-a^2\int_0^t\!\int_0^{l_2}\!\int_0^{l_1} g_6(\xi,\eta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\zeta=l_3}d\xi\,d\eta\,d\tau\,+\\
&+\int_0^t\!\int_0^{l_3}\!\int_0^{l_2}\!\int_0^{l_1}\Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{8}{l_1l_2l_3}\exp\bigl(-\tfrac12 kt\bigr)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\lambda_{nms}}}\sin(\alpha_n x)\sin(\beta_m y)\sin(\gamma_s z)\times\\
\times\sin(\alpha_n\xi)\sin(\beta_m\eta)\sin(\gamma_s\zeta)\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_{nms}}\,\bigr),
\end{aligned}
$$

где

$$
\alpha_n=\frac{n\pi}{l_1},\quad \beta_m=\frac{m\pi}{l_2},\quad \gamma_s=\frac{s\pi}{l_3},\quad \lambda_{nms}=a^2(\alpha_n^2+\beta_m^2+\gamma_s^2)+b-\tfrac14 k^2.
$$

6.4.1-3. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, $0 \leqslant z \leqslant l_3$. Вторая краевая задача.

Рассматривается прямоугольный параллелепипед. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f_0(x,y,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(x,y,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_x w &= g_1(y,z,t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_x w &= g_2(y,z,t) &&\text{при}\quad x=l_1 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_3(x,z,t) &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_4(x,z,t) &&\text{при}\quad y=l_2 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_5(x,y,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_6(x,y,t) &&\text{при}\quad z=l_3 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(x,y,z,t) = {} & \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{l_3}\int_0^{l_2}\int_0^{l_1} f_0(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta + \\
& + \int_0^{l_3}\int_0^{l_2}\int_0^{l_1}\big[f_1(\xi,\eta,\zeta)+kf_0(\xi,\eta,\zeta)\big]G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta - \\
& - a^2\int_0^{t}\int_0^{l_3}\int_0^{l_2} g_1(\eta,\zeta,\tau)G(x,y,z,0,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau + \\
& + a^2\int_0^{t}\int_0^{l_3}\int_0^{l_2} g_2(\eta,\zeta,\tau)G(x,y,z,l_1,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau - \\
& - a^2\int_0^{t}\int_0^{l_3}\int_0^{l_1} g_3(\xi,\zeta,\tau)G(x,y,z,\xi,0,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\tau + \\
& + a^2\int_0^{t}\int_0^{l_3}\int_0^{l_1} g_4(\xi,\zeta,\tau)G(x,y,z,\xi,l_2,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\tau - \\
& - a^2\int_0^{t}\int_0^{l_2}\int_0^{l_1} g_5(\xi,\eta,\tau)G(x,y,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau + \\
& + a^2\int_0^{t}\int_0^{l_2}\int_0^{l_1} g_6(\xi,\eta,\tau)G(x,y,z,\xi,\eta,l_3,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau + \\
& + \int_0^{t}\int_0^{l_3}\int_0^{l_2}\int_0^{l_1} \Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau,
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{e^{-kt/2}}{l_1 l_2 l_3}\Bigg[\frac{\sin(t\sqrt{c})}{\sqrt{c}} + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{A_n A_m A_s}{\sqrt{\lambda_{nms}}}\cos(\alpha_n x)\cos(\beta_m y)\cos(\gamma_s z)\times \\
\times\cos(\alpha_n\xi)\cos(\beta_m\eta)\cos(\gamma_s\zeta)\sin\big(t\sqrt{\lambda_{nms}}\big)\Bigg],
\end{aligned}
$$

$$
A_n=\begin{cases}1 & \text{при } n=0,\\ 2 & \text{при } n>0,\end{cases}\quad \alpha_n=\frac{n\pi}{l_1},\quad \beta_m=\frac{m\pi}{l_2},\quad \gamma_s=\frac{s\pi}{l_3},
$$
$$
c=b-\tfrac14 k^2,\quad \lambda_{nms}=a^2(\alpha_n^2+\beta_m^2+\gamma_s^2)+b-\tfrac14 k^2.
$$

Суммируются члены, удовлетворяющие условию $n+m+s>0$ (член, соответствующий $n=m=s=0$, выделен отдельно).

6.4.1-4. Область: $0\leqslant x\leqslant l_1,\ 0\leqslant y\leqslant l_2,\ 0\leqslant z\leqslant l_3$. Третья краевая задача.

Рассматривается прямоугольный параллелепипед. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f_0(x,y,z) && \text{при} && t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(x,y,z) && \text{при} && t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_x w - s_1 w &= g_1(y,z,t) && \text{при} && x=0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_x w + s_2 w &= g_2(y,z,t) && \text{при} && x=l_1 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_y w - s_3 w &= g_3(x,z,t) && \text{при} && y=0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_y w + s_4 w &= g_4(x,z,t) && \text{при} && y=l_2 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w - s_5 w &= g_5(x,y,t) && \text{при} && z=0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w + s_6 w &= g_6(x,y,t) && \text{при} && z=l_3 && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение $w(x,y,z,t)$ определяется по формуле из разд. 6.4.1-3, где

$$
\begin{aligned}
G(x,y,\xi,\eta,t)=8\exp\big(-\tfrac12 kt\big)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{E_{npq}\sqrt{\lambda_{npq}}}\sin(\alpha_n x+\varepsilon_n)\sin(\beta_p y+\sigma_p)\sin(\gamma_q z+\nu_q)\times \\
\times\sin(\alpha_n\xi+\varepsilon_n)\sin(\beta_p\eta+\sigma_p)\sin(\gamma_q\zeta+\nu_q)\sin\big(t\sqrt{\lambda_{npq}}\big).
\end{aligned}
$$

Здесь

$$\varepsilon_n = \operatorname{arctg}\frac{\alpha_n}{l_1}, \quad \sigma_p = \operatorname{arctg}\frac{\beta_p}{l_2}, \quad \nu_q = \operatorname{arctg}\frac{\gamma_q}{l_3}, \quad \lambda_{npq} = a^2(\alpha_n^2+\beta_p^2+\gamma_q^2)+b-\tfrac{1}{4}k^2,$$

$$E_{npq} = \left[l_1 + \frac{(s_1s_2+\alpha_n^2)(s_1+s_2)}{(s_1^2+\alpha_n^2)(s_2^2+\alpha_n^2)}\right]\left[l_2 + \frac{(s_3s_4+\beta_p^2)(s_3+s_4)}{(s_3^2+\beta_p^2)(s_4^2+\beta_p^2)}\right]\left[l_3 + \frac{(s_5s_6+\gamma_q^2)(s_5+s_6)}{(s_5^2+\gamma_q^2)(s_6^2+\gamma_q^2)}\right],$$

где α_n, β_p, γ_q — положительные корни трансцендентных уравнений

$$\alpha^2 - s_1s_2 = (s_1+s_2)\alpha\operatorname{ctg}(l_1\alpha),$$
$$\beta^2 - s_3s_4 = (s_3+s_4)\beta\operatorname{ctg}(l_2\beta),$$
$$\gamma^2 - s_5s_6 = (s_5+s_6)\gamma\operatorname{ctg}(l_3\gamma).$$

6.4.1-5. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, $0 \leqslant z \leqslant l_3$. Смешанные краевые задачи.

1°. Рассматривается прямоугольный параллелепипед. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(x,y,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(x,y,z) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(y,z,t) && \text{при} \quad x=0 && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(y,z,t) && \text{при} \quad x=l_1 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_3(x,z,t) && \text{при} \quad y=0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_4(x,z,t) && \text{при} \quad y=l_2 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_5(x,y,t) && \text{при} \quad z=0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_6(x,y,t) && \text{при} \quad z=l_3 && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(x,y,z,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_2}\!\!\int_0^{l_1} f_0(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta +\\
&+ \int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_2}\!\!\int_0^{l_1}\bigl[f_1(\xi,\eta,\zeta)+kf_0(\xi,\eta,\zeta)\bigr]G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta +\\
&+ a^2\int_0^t\!\!\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_2} g_1(\eta,\zeta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=0}d\eta\,d\zeta\,d\tau -\\
&- a^2\int_0^t\!\!\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_2} g_2(\eta,\zeta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=l_1}d\eta\,d\zeta\,d\tau -\\
&- a^2\int_0^t\!\!\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_1} g_3(\xi,\zeta,\tau)G(x,y,z,\xi,0,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\tau +\\
&+ a^2\int_0^t\!\!\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_1} g_4(\xi,\zeta,\tau)G(x,y,z,\xi,l_2,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\tau -\\
&- a^2\int_0^t\!\!\int_0^{l_2}\!\!\int_0^{l_1} g_5(\xi,\eta,\tau)G(x,y,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau +\\
&+ a^2\int_0^t\!\!\int_0^{l_2}\!\!\int_0^{l_1} g_6(\xi,\eta,\tau)G(x,y,z,\xi,\eta,l_3,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau +\\
&+ \int_0^t\!\!\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_2}\!\!\int_0^{l_1}\Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau,
\end{aligned}$$

где

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{2}{l_1l_2l_3}\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}kt\bigr)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{A_mA_s}{\sqrt{\lambda_{nms}}}\sin(\alpha_nx)\cos(\beta_my)\cos(\gamma_sz)\times$$
$$\times\sin(\alpha_n\xi)\cos(\beta_m\eta)\cos(\gamma_s\zeta)\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_{nms}}\bigr),$$

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{l_1},\ \beta_m = \frac{m\pi}{l_2},\ \gamma_s = \frac{s\pi}{l_3},\ \lambda_{nms} = a^2(\alpha_n^2+\beta_m^2+\gamma_s^2)+b-\tfrac{1}{4}k^2,\ A_m = \begin{cases}1 & \text{при } m=0,\\ 2 & \text{при } m>0.\end{cases}$$

2°. Рассматривается прямоугольный параллелепипед. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f_0(x,y,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(x,y,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(y,z,t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_x w &= g_2(y,z,t) &&\text{при}\quad x=l_1 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_3(x,z,t) &&\text{при}\quad y=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_y w &= g_4(x,z,t) &&\text{при}\quad y=l_2 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_5(x,y,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_6(x,y,t) &&\text{при}\quad z=l_3 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(x,y,z,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_2}\!\!\int_0^{l_1} f_0(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,+\\
&+\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_2}\!\!\int_0^{l_1}\bigl[f_1(\xi,\eta,\zeta)+kf_0(\xi,\eta,\zeta)\bigr]G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,+\\
&+a^2\int_0^t\!\!\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_2} g_1(\eta,\zeta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=0}d\eta\,d\zeta\,d\tau\,+\\
&+a^2\int_0^t\!\!\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_2} g_2(\eta,\zeta,\tau)G(x,y,z,l_1,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau\,+\\
&+a^2\int_0^t\!\!\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_1} g_3(\xi,\zeta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\eta=0}d\xi\,d\zeta\,d\tau\,+\\
&+a^2\int_0^t\!\!\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_1} g_4(\xi,\zeta,\tau)G(x,y,z,\xi,l_2,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\zeta\,d\tau\,+\\
&+a^2\int_0^t\!\!\int_0^{l_2}\!\!\int_0^{l_1} g_5(\xi,\eta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\zeta=0}d\xi\,d\eta\,d\tau\,+\\
&+a^2\int_0^t\!\!\int_0^{l_2}\!\!\int_0^{l_1} g_6(\xi,\eta,\tau)G(x,y,z,\xi,\eta,l_3,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau\,+\\
&+\int_0^t\!\!\int_0^{l_3}\!\!\int_0^{l_2}\!\!\int_0^{l_1}\Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau,
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{gathered}
G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{8}{l_1l_2l_3}\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}kt\bigr)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\lambda_{nms}}}\sin(\alpha_n x)\sin(\beta_m y)\sin(\gamma_s z)\times\\
\times\sin(\alpha_n\xi)\sin(\beta_m\eta)\sin(\gamma_s\zeta)\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_{nms}}\bigr),\\
\alpha_n = \frac{\pi(2n+1)}{2l_1},\quad \beta_m = \frac{\pi(2m+1)}{2l_2},\quad \gamma_s = \frac{\pi(2s+1)}{2l_3},\quad \lambda_{nms} = a^2(\alpha_n^2+\beta_m^2+\gamma_s^2)+b-\tfrac{1}{4}k^2.
\end{gathered}
$$

6.4.2. Задачи в цилиндрической системе координат

Трехмерное неоднородное телеграфное уравнение в цилиндрической системе координат имеет вид

$$
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k\frac{\partial w}{\partial t} = a^2\Bigl[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Bigl(r\frac{\partial w}{\partial r}\Bigr)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\Bigr] - bw + \Phi(r,\varphi,z,t),\qquad r=\sqrt{x^2+y^2}.
$$

Одномерные задачи с осевой симметрией, имеющие решения $w=w(r,t)$, рассматриваются в разд. 4.4.2. Двумерные задачи, решение которых имеет вид $w=w(r,\varphi,t)$ и $w=w(r,z,t)$, исследуются в разд. 5.4.2–5.4.3.

6.4.2-1. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Первая краевая задача.

Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(\varphi,z,t) &&\text{при}\quad r=R &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_3(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=l &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(r,\varphi,z,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi f_0(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,+\\
&+\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi\big[f_1(\xi,\eta,\zeta)+kf_0(\xi,\eta,\zeta)\big]G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,-\\
&-a^2R\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\xi=R}d\eta\,d\zeta\,d\tau\,+\\
&+a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi g_2(\xi,\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\zeta=0}d\xi\,d\eta\,d\tau\,-\\
&-a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi g_3(\xi,\eta,\tau)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Big]_{\zeta=l}d\xi\,d\eta\,d\tau\,+\\
&+\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi\Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{2e^{-kt/2}}{\pi R^2 l}\sum_{n=0}^\infty\sum_{m=1}^\infty\sum_{s=1}^\infty \frac{A_n}{[J_n'(\mu_{nm}R)]^2}J_n(\mu_{nm}r)J_n(\mu_{nm}\xi)\cos\big[n(\varphi-\eta)\big]\times\\
\times\sin\Big(\frac{s\pi z}{l}\Big)\sin\Big(\frac{s\pi\zeta}{l}\Big)\frac{\sin\big(t\sqrt{\lambda_{nms}}\big)}{\sqrt{\lambda_{nms}}},
\end{aligned}$$

где

$$\lambda_{nms} = a^2\mu_{nm}^2 + \frac{a^2s^2\pi^2}{l^2} + b - \tfrac{1}{4}k^2,\qquad A_n = \begin{cases}1 & \text{при } n=0,\\ 2 & \text{при } n>0,\end{cases}$$

$J_n(\xi)$ — функции Бесселя (штрих означает производную по аргументу), μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_n(\mu R)=0$.

6.4.2-2. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Вторая краевая задача.

Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_r w &= g_1(\varphi,z,t) &&\text{при}\quad r=R &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_2(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_3(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=l &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,\varphi,z,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi f_0(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta +$$
$$+\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi\bigl[f_1(\xi,\eta,\zeta)+kf_0(\xi,\eta,\zeta)\bigr]G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta +$$
$$+a^2R\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,R,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau -$$
$$-a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi g_2(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau +$$
$$+a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi g_3(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,l,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau +$$
$$+\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi\Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)=\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}kt\bigr)\left[\frac{\sin(t\sqrt{c})}{\pi R^2 l\sqrt{c}}+\frac{2}{\pi R^2 l}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\beta_s}}\cos\Bigl(\frac{s\pi x}{l}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{s\pi\xi}{l}\Bigr)\sin\bigl(t\sqrt{\beta_s}\bigr)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\pi l}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{A_nA_s\mu_{nm}^2 J_n(\mu_{nm}r)J_n(\mu_{nm}\xi)}{(\mu_{nm}^2R^2-n^2)[J_n(\mu_{nm}R)]^2}\cos[n(\varphi-\eta)]\cos\Bigl(\frac{s\pi x}{l}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{s\pi\xi}{l}\Bigr)\frac{\sin(\lambda_{nms}t)}{\lambda_{nms}}\right],$$

$$c=b-\tfrac{1}{4}k^2,\quad \beta_s=\frac{a^2s^2\pi^2}{l^2}+b-\tfrac{1}{4}k^2,\quad \lambda_{nms}=\sqrt{a^2\mu_{nm}^2+\frac{a^2s^2\pi^2}{l^2}+b-\tfrac{1}{4}k^2},\quad A_n=\begin{cases}1 & \text{при } n=0,\\ 2 & \text{при } n>0,\end{cases}$$

где $J_n(\xi)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_n'(\mu R)=0$.

6.4.2-3. Область: $0\leqslant r\leqslant R$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $0\leqslant z\leqslant l$. Третья краевая задача.

Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_r w+s_1w &= g(\varphi,z,t) &&\text{при}\quad r=R &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w-s_2w &= g_2(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w+s_3w &= g_3(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=l &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение $w(r,\varphi,z,t)$ определяется по формуле из разд. 6.4.2-2, где

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)=\frac{1}{\pi}\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}kt\bigr)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{A_n\mu_{nm}^2J_n(\mu_{nm}r)J_n(\mu_{nm}\xi)}{(\mu_{nm}^2R^2+s_1^2R^2-n^2)[J_n(\mu_{nm}R)]^2}\times$$
$$\times\cos[n(\varphi-\eta)]\frac{h_p(z)h_p(\zeta)}{\|h_p\|^2}\frac{\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_{nmp}}\bigr)}{\sqrt{\lambda_{nmp}}}.$$

Здесь $J_n(\xi)$ — функции Бесселя,

$$A_n=\begin{cases}1 & \text{при } n=0,\\ 2 & \text{при } n>0,\end{cases}\qquad \lambda_{nmp}=a^2\mu_{nm}^2+a^2\beta_p^2+b-\tfrac{1}{4}k^2,$$
$$h_p(z)=\cos(\beta_pz)+\frac{s_2}{\beta_p}\sin(\beta_pz),\qquad \|h_p\|^2=\frac{s_3}{2\beta_p^2}\frac{\beta_p^2+s_2^2}{\beta_p^2+s_3^2}+\frac{s_2}{2\beta_p^2}+\frac{l}{2}\Bigl(1+\frac{s_2^2}{\beta_p^2}\Bigr);$$

μ_{nm} и β_p — положительные корни трансцендентных уравнений

$$\mu J_n'(\mu R)+s_1J_n(\mu R)=0,\qquad \frac{\operatorname{tg}(\beta l)}{\beta}=\frac{s_2+s_3}{\beta^2-s_2s_3}.$$

6.4.2-4. Область: $0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant z \leqslant l$. Смешанные краевые задачи.

1°. Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ w &= g_1(\varphi,z,t) &&\text{при}\quad r=R &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_z w &= g_2(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_z w &= g_3(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=l &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,\varphi,z,t) = {}&\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi f_0(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta+\\ &+\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi\bigl[f_1(\xi,\eta,\zeta)+kf_0(\xi,\eta,\zeta)\bigr]G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta-\\ &-a^2R\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=R}d\eta\,d\zeta\,d\tau-\\ &-a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi g_2(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau+\\ &+a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi g_3(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,l,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau+\\ &+\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi\Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau. \end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)=\frac{1}{\pi R^2 l}\exp\bigl(-\tfrac12 kt\bigr)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{A_nA_s}{[J_n'(\mu_{nm}R)]^2\sqrt{\lambda_{nms}}}J_n(\mu_{nm}r)J_n(\mu_{nm}\xi)\times$$
$$\times\cos\bigl[n(\varphi-\eta)\bigr]\cos\Bigl(\frac{s\pi z}{l}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{s\pi\zeta}{l}\Bigr)\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_{nms}}\,\bigr),$$

$$\lambda_{nms}=a^2\mu_{nm}^2+\frac{a^2s^2\pi^2}{l^2}+b-\tfrac14 k^2,\qquad A_n=\begin{cases}1 & \text{при}\ \ n=0,\\ 2 & \text{при}\ \ n>0,\end{cases}$$

где $J_n(\xi)$ — функции Бесселя (штрих означает производную по аргументу), μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_n(\mu R)=0$.

2°. Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_r w &= g_1(\varphi,z,t) &&\text{при}\quad r=R &&\text{(граничное условие)},\\ w &= g_2(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\ w &= g_3(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=l &&\text{(граничное условие)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,\varphi,z,t) = {}&\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi f_0(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta+\\ &+\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi\bigl[f_1(\xi,\eta,\zeta)+kf_0(\xi,\eta,\zeta)\bigr]G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta+\\ &+a^2R\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,R,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau+\\ &+a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi g_2(\xi,\eta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\zeta=0}d\xi\,d\eta\,d\tau-\\ &-a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi g_3(\xi,\eta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\zeta=l}d\xi\,d\eta\,d\tau+\\ &+\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi\Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau. \end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{2}{\pi R^2 l}\exp\left(-\tfrac{1}{2}kt\right)\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\beta_s}}\sin\left(\frac{s\pi z}{l}\right)\sin\left(\frac{s\pi\zeta}{l}\right)\sin\left(t\sqrt{\beta_s}\right) +$$

$$+\frac{2}{\pi l}\exp\left(-\tfrac{1}{2}kt\right)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{A_n\mu_{nm}^2}{(\mu_{nm}^2R^2-n^2)[J_n(\mu_{nm}R)]^2}J_n(\mu_{nm}r)J_n(\mu_{nm}\xi)\times$$

$$\times\cos[n(\varphi-\eta)]\sin\left(\frac{s\pi z}{l}\right)\sin\left(\frac{s\pi\zeta}{l}\right)\frac{\sin\left(t\sqrt{\lambda_{nms}}\right)}{\sqrt{\lambda_{nms}}},$$

$$\beta_s = \frac{a^2s^2\pi^2}{l^2}+b-\tfrac{1}{4}k^2,\quad \lambda_{nms} = a^2\mu_{nm}^2+\frac{a^2s^2\pi^2}{l^2}+b-\tfrac{1}{4}k^2,\quad A_n = \begin{cases}1 & \text{при } n=0,\\ 2 & \text{при } n>0,\end{cases}$$

где $J_n(\xi)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_n'(\mu R) = 0$.

6.4.2-5. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Первая краевая задача.

Рассматривается полый круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(\varphi,z,t) &&\text{при}\quad r=R_1 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(\varphi,z,t) &&\text{при}\quad r=R_2 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_3(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_4(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=l &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,\varphi,z,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} f_0(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta +$$

$$+\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\left[f_1(\xi,\eta,\zeta)+kf_0(\xi,\eta,\zeta)\right]G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta +$$

$$+a^2R_1\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\right]_{\xi=R_1}d\eta\,d\zeta\,d\tau -$$

$$-a^2R_2\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi} g_2(\eta,\zeta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\right]_{\xi=R_2}d\eta\,d\zeta\,d\tau +$$

$$+a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} g_3(\xi,\eta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\right]_{\zeta=0}\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau -$$

$$-a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} g_4(\xi,\eta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\right]_{\zeta=l}\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau +$$

$$+\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{\pi}{2l}\exp\left(-\tfrac{1}{2}kt\right)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{A_n\mu_{nm}^2J_n^2(\mu_{nm}R_2)}{J_n^2(\mu_{nm}R_1)-J_n^2(\mu_{nm}R_2)}Z_{nm}(r)Z_{nm}(\xi)\times$$

$$\times\cos[n(\varphi-\eta)]\sin\left(\frac{s\pi z}{l}\right)\sin\left(\frac{s\pi\zeta}{l}\right)\frac{\sin\left(t\sqrt{\lambda_{nms}}\right)}{\sqrt{\lambda_{nms}}},$$

$$A_n = \begin{cases}1 & \text{при } n=0,\\ 2 & \text{при } n\neq 0,\end{cases}\quad \lambda_{nms} = a^2\mu_{nm}^2+\frac{a^2s^2\pi^2}{l^2}+b-\tfrac{1}{4}k^2,$$

$$Z_{nm}(r) = J_n(\mu_{nm}R_1)Y_n(\mu_{nm}r) - Y_n(\mu_{nm}R_1)J_n(\mu_{nm}r),$$

где $J_n(r)$ и $Y_n(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_n(\mu R_1)Y_n(\mu R_2) - Y_n(\mu R_1)J_n(\mu R_2) = 0.$$

6.4.2-6. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant z \leqslant l$. Вторая краевая задача.

Рассматривается полый круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f_0(r,\varphi,z) && \text{при}\quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,\varphi,z) && \text{при}\quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_r w &= g_1(\varphi,z,t) && \text{при}\quad r=R_1 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_r w &= g_2(\varphi,z,t) && \text{при}\quad r=R_2 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_3(r,\varphi,t) && \text{при}\quad z=0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_4(r,\varphi,t) && \text{при}\quad z=l && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(r,\varphi,z,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} f_0(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,+\\
&+\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\bigl[f_1(\xi,\eta,\zeta)+kf_0(\xi,\eta,\zeta)\bigr]G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,-\\
&-a^2R_1\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,R_1,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau\,+\\
&+a^2R_2\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi} g_2(\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,R_2,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau\,-\\
&-a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} g_3(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau\,+\\
&+a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} g_4(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,l,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau\,+\\
&+\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) &= \frac{e^{-kt/2}}{\pi(R_2^2-R_1^2)l}\left[\frac{\sin(t\sqrt{c})}{\sqrt{c}}+2\sum_{s=1}^{\infty}\cos\Bigl(\frac{s\pi z}{l}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{s\pi\zeta}{l}\Bigr)\frac{\sin\bigl(t\sqrt{\beta_s}\bigr)}{\sqrt{\beta_s}}\right]+\\
&+\frac{e^{-kt/2}}{\pi l}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{A_nA_s\mu_{nm}^2Z_{nm}(r)Z_{nm}(\xi)}{(\mu_{nm}^2R_2^2-n^2)Z_{nm}^2(R_2)-(\mu_{nm}^2R_1^2-n^2)Z_{nm}^2(R_1)}\times\\
&\qquad\times\cos[n(\varphi-\eta)]\cos\Bigl(\frac{s\pi z}{l}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{s\pi\zeta}{l}\Bigr)\frac{\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_{nms}}\bigr)}{\sqrt{\lambda_{nms}}},
\end{aligned}
$$

где

$$
A_n=\begin{cases}1 & \text{при}\ n=0,\\ 2 & \text{при}\ n\neq 0,\end{cases}\quad c=b-\tfrac14k^2,\quad \beta_s=\frac{a^2s^2\pi^2}{l^2}+b-\tfrac14k^2,\quad \lambda_{nms}=a^2\mu_{nm}^2+\frac{a^2s^2\pi^2}{l^2}+b-\tfrac14k^2,
$$

$$
Z_{nm}(r)=J_n'(\mu_{nm}R_1)Y_n(\mu_{nm}r)-Y_n'(\mu_{nm}R_1)J_n(\mu_{nm}r);
$$

$J_n(r)$ и $Y_n(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$
J_n'(\mu R_1)Y_n'(\mu R_2)-Y_n'(\mu R_1)J_n'(\mu R_2)=0.
$$

6.4.2-7. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant z \leqslant l$. Третья краевая задача.

Рассматривается полый круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f_0(r,\varphi,z) && \text{при}\quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,\varphi,z) && \text{при}\quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_r w - s_1w &= g_1(\varphi,z,t) && \text{при}\quad r=R_1 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_r w + s_2w &= g_2(\varphi,z,t) && \text{при}\quad r=R_2 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w - s_3w &= g_3(r,\varphi,t) && \text{при}\quad z=0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w + s_4w &= g_4(r,\varphi,t) && \text{при}\quad z=l && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение $w(r,\varphi,z,t)$ определяется по формуле из разд. 6.4.2-6, где

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{\pi}\exp\left(-\tfrac{1}{2}kt\right)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{A_n\mu_{nm}^2}{\|h_p\|^2\sqrt{a^2\mu_{nm}^2 + a^2\lambda_p^2 + b - \frac{1}{4}k^2}}\times$$
$$\times\frac{Z_{nm}(r)Z_{nm}(\xi)\cos[n(\varphi-\eta)]h_p(z)h_p(\zeta)\sin\left(t\sqrt{a^2\mu_{nm}^2 + a^2\lambda_p^2 + b - \frac{1}{4}k^2}\right)}{(s_2^2R_2^2 + \mu_{nm}^2R_2^2 - n^2)Z_{nm}^2(R_2) - (s_1^2R_1^2 + \mu_{nm}^2R_1^2 - n^2)Z_{nm}^2(R_1)}.$$

Здесь

$$Z_{nm}(r) = \left[\mu_{nm}J_n'(\mu_{nm}R_1) - s_1J_n(\mu_{nm}R_1)\right]Y_n(\mu_{nm}r) -$$
$$-\left[\mu_{nm}Y_n'(\mu_{nm}R_1) - s_1Y_n(\mu_{nm}R_1)\right]J_n(\mu_{nm}r),$$

$$A_n = \begin{cases}1 & \text{при } n=0,\\ 2 & \text{при } n\neq 0,\end{cases}\quad h_p(z) = \cos(\lambda_p z) + \frac{s_3}{\lambda_p}\sin(\lambda_p z),\quad \|h_p\|^2 = \frac{s_4}{2\lambda_p^2}\frac{\lambda_p^2+s_3^2}{\lambda_p^2+s_4^2} + \frac{s_3}{2\lambda_p^2} + \frac{l}{2}\left(1+\frac{s_3^2}{\lambda_p^2}\right),$$

где $J_n(r)$ и $Y_n(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\left[\mu J_n'(\mu R_1) - s_1J_n(\mu R_1)\right]\left[\mu Y_n'(\mu R_2) + s_2Y_n(\mu R_2)\right] =$$
$$= \left[\mu Y_n'(\mu R_1) - s_1Y_n(\mu R_1)\right]\left[\mu J_n'(\mu R_2) + s_2J_n(\mu R_2)\right];$$

λ_p — положительные корни трансцендентного уравнения $\dfrac{\operatorname{tg}(\lambda l)}{\lambda} = \dfrac{s_3+s_4}{\lambda^2 - s_3s_4}$.

6.4.2-8. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Смешанные краевые задачи.

1°. Рассматривается полый круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(r,\varphi,z) && \text{при}\quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,\varphi,z) && \text{при}\quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(\varphi,z,t) && \text{при}\quad r=R_1 && \text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(\varphi,z,t) && \text{при}\quad r=R_2 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_3(r,\varphi,t) && \text{при}\quad z=0 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_4(r,\varphi,t) && \text{при}\quad z=l && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,\varphi,z,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} f_0(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta +$$
$$+\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\left[f_1(\xi,\eta,\zeta) + kf_0(\xi,\eta,\zeta)\right]G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta +$$
$$+a^2R_1\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\right]_{\xi=R_1}d\eta\,d\zeta\,d\tau -$$
$$-a^2R_2\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi} g_2(\eta,\zeta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\right]_{\xi=R_2}d\eta\,d\zeta\,d\tau -$$
$$-a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} g_3(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau +$$
$$+a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} g_4(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,l,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau +$$
$$+\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)=\frac{\pi}{4l}\exp\left(-\tfrac{1}{2}kt\right)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{A_nA_s\mu_{nm}^2J_n^2(\mu_{nm}R_2)}{J_n^2(\mu_{nm}R_1)-J_n^2(\mu_{nm}R_2)}Z_{nm}(r)Z_{nm}(\xi)\times$$

$$\times\cos\bigl[n(\varphi-\eta)\bigr]\cos\left(\frac{s\pi z}{l}\right)\cos\left(\frac{s\pi\zeta}{l}\right)\frac{\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_{nms}}\bigr)}{\sqrt{\lambda_{nms}}},$$

$$A_n=\begin{cases}1 & \text{при } n=0,\\ 2 & \text{при } n\neq 0,\end{cases}\qquad \lambda_{nms}=a^2\mu_{nm}^2+\frac{a^2s^2\pi^2}{l^2}+b-\tfrac{1}{4}k^2,$$

$$Z_{nm}(r)=J_n(\mu_{nm}R_1)Y_n(\mu_{nm}r)-Y_n(\mu_{nm}R_1)J_n(\mu_{nm}r),$$

где $J_n(r)$ и $Y_n(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_n(\mu R_1)Y_n(\mu R_2)-Y_n(\mu R_1)J_n(\mu R_2)=0.$$

2°. Рассматривается полый круговой цилиндр конечной длины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w&=f_0(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_t w&=f_1(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_r w&=g_1(\varphi,z,t) &&\text{при}\quad r=R_1 &&\text{(граничное условие)},\\ \partial_r w&=g_2(\varphi,z,t) &&\text{при}\quad r=R_2 &&\text{(граничное условие)},\\ w&=g_3(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\ w&=g_4(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=l &&\text{(граничное условие)}.\end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,\varphi,z,t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}f_0(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta+$$

$$+\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\bigl[f_1(\xi,\eta,\zeta)+kf_0(\xi,\eta,\zeta)\bigr]G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta-$$

$$-a^2R_1\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi}g_1(\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,R_1,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau+$$

$$+a^2R_2\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi}g_2(\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,R_2,\eta,\zeta,t-\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau+$$

$$+a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}g_3(\xi,\eta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\right]_{\zeta=0}\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau-$$

$$-a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}g_4(\xi,\eta,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\right]_{\zeta=l}\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)=\frac{2e^{-kt/2}}{\pi(R_2^2-R_1^2)l}\sum_{s=1}^{\infty}\sin\left(\frac{s\pi z}{l}\right)\sin\left(\frac{s\pi\zeta}{l}\right)\frac{\sin\bigl(t\sqrt{\beta_s}\bigr)}{\sqrt{\beta_s}}+$$

$$+\frac{2e^{-kt/2}}{\pi l}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{A_n\mu_{nm}^2Z_{nm}(r)Z_{nm}(\xi)}{(\mu_{nm}^2R_2^2-n^2)Z_{nm}^2(R_2)-(\mu_{nm}^2R_1^2-n^2)Z_{nm}^2(R_1)}\times$$

$$\times\cos\bigl[n(\varphi-\eta)\bigr]\sin\left(\frac{s\pi z}{l}\right)\sin\left(\frac{s\pi\zeta}{l}\right)\frac{\sin\bigl(t\sqrt{\lambda_{nms}}\bigr)}{\sqrt{\lambda_{nms}}},$$

где

$$A_n=\begin{cases}1 & \text{при } n=0,\\ 2 & \text{при } n\neq 0,\end{cases}\qquad \beta_s=\frac{a^2s^2\pi^2}{l^2}+b-\tfrac{1}{4}k^2,\qquad \lambda_{nms}=a^2\mu_{nm}^2+\frac{a^2s^2\pi^2}{l^2}+b-\tfrac{1}{4}k^2,$$

$$Z_{nm}(r)=J_n'(\mu_{nm}R_1)Y_n(\mu_{nm}r)-Y_n'(\mu_{nm}R_1)J_n(\mu_{nm}r);$$

$J_n(r)$ и $Y_n(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_n'(\mu R_1)Y_n'(\mu R_2)-Y_n'(\mu R_1)J_n'(\mu R_2)=0.$$

6.4.2-9. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Первая краевая задача.

Рассматривается цилиндрический сектор конечной толщины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(\varphi,z,t) &&\text{при}\quad r=R &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(r,z,t) &&\text{при}\quad \varphi=0 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_3(r,z,t) &&\text{при}\quad \varphi=\varphi_0 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_4(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_5(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=l &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(r,\varphi,z,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\int_0^{\varphi_0}\int_0^R f_0(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,+\\
&+\int_0^l\int_0^{\varphi_0}\int_0^R\bigl[f_1(\xi,\eta,\zeta)+kf_0(\xi,\eta,\zeta)\bigr]G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,-\\
&-a^2R\int_0^t\int_0^l\int_0^{\varphi_0} g_1(\eta,\zeta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=R}d\eta\,d\zeta\,d\tau\,+\\
&+a^2\int_0^t\int_0^l\int_0^R g_2(\xi,\zeta,\tau)\frac{1}{\xi}\Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\eta=0}d\xi\,d\zeta\,d\tau\,-\\
&-a^2\int_0^t\int_0^l\int_0^R g_3(\xi,\zeta,\tau)\frac{1}{\xi}\Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\eta=\varphi_0}d\xi\,d\zeta\,d\tau\,+\\
&+a^2\int_0^t\int_0^{\varphi_0}\int_0^R g_4(\xi,\eta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\zeta=0}\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau\,-\\
&-a^2\int_0^t\int_0^{\varphi_0}\int_0^R g_5(\xi,\eta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\zeta=l}\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau\,+\\
&+\int_0^t\int_0^l\int_0^{\varphi_0}\int_0^R f_1(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t) &= \frac{8e^{-kt/2}}{R^2l\varphi_0}\sum_{n=1}^\infty\sum_{m=1}^\infty\sum_{s=1}^\infty\frac{J_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}r)J_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}\xi)}{[J'_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}R)]^2}\sin\Bigl(\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{n\pi\eta}{\varphi_0}\Bigr)\times\\
&\times\sin\Bigl(\frac{s\pi z}{l}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{s\pi\zeta}{l}\Bigr)\frac{\sin\bigl(t\sqrt{a^2\mu_{nm}^2+a^2s^2\pi^2l^{-2}+b-\frac14k^2}\bigr)}{\sqrt{a^2\mu_{nm}^2+a^2s^2\pi^2l^{-2}+b-\frac14k^2}},
\end{aligned}$$

где $J_{n\pi/\varphi_0}(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_{n\pi/\varphi_0}(\mu R)=0$.

6.4.2-10. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, $0 \leqslant z \leqslant l$. Смешанная краевая задача.

Рассматривается цилиндрический сектор конечной толщины. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w &= f_0(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,\varphi,z) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
w &= g_1(\varphi,z,t) &&\text{при}\quad r=R &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_2(r,z,t) &&\text{при}\quad \varphi=0 &&\text{(граничное условие)},\\
w &= g_3(r,z,t) &&\text{при}\quad \varphi=\varphi_0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_4(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=0 &&\text{(граничное условие)},\\
\partial_z w &= g_5(r,\varphi,t) &&\text{при}\quad z=l &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,\varphi,z,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\int_0^{\varphi_0}\int_0^R f_0(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta +$$
$$+\int_0^l\int_0^{\varphi_0}\int_0^R\bigl[f_1(\xi,\eta,\zeta)+kf_0(\xi,\eta,\zeta)\bigr]G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta -$$
$$-a^2R\int_0^t\int_0^l\int_0^{\varphi_0} g_1(\eta,\zeta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=R}d\eta\,d\zeta\,d\tau +$$
$$+a^2\int_0^t\int_0^l\int_0^R g_2(\xi,\zeta,\tau)\frac{1}{\xi}\Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\eta=0}d\xi\,d\zeta\,d\tau -$$
$$-a^2\int_0^t\int_0^l\int_0^R g_3(\xi,\zeta,\tau)\frac{1}{\xi}\Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\eta=\varphi_0}d\xi\,d\zeta\,d\tau -$$
$$-a^2\int_0^t\int_0^{\varphi_0}\int_0^R g_4(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,0,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau +$$
$$+a^2\int_0^t\int_0^{\varphi_0}\int_0^R g_5(\xi,\eta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,l,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\tau +$$
$$+\int_0^t\int_0^l\int_0^{\varphi_0}\int_0^R f_1(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau.$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta,t)=\frac{4e^{-kt/2}}{R^2l\varphi_0}\sum_{n=1}^\infty\sum_{m=1}^\infty\sum_{s=0}^\infty\frac{A_sJ_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}r)J_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}\xi)}{[J'_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}R)]^2}\sin\Bigl(\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{n\pi\eta}{\varphi_0}\Bigr)\times$$
$$\times\cos\Bigl(\frac{s\pi z}{l}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{s\pi\zeta}{l}\Bigr)\frac{\sin\bigl(t\sqrt{a^2\mu_{nm}^2+a^2s^2\pi^2l^{-2}+b-\frac14k^2}\bigr)}{\sqrt{a^2\mu_{nm}^2+a^2s^2\pi^2l^{-2}+b-\frac14k^2}},$$

где $A_0=1$, $A_s=2$ при $s\geqslant 1$; $J_{n\pi/\varphi_0}(r)$ — функции Бесселя; μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_{n\pi/\varphi_0}(\mu R)=0$.

6.4.3. Задачи в сферической системе координат

Трехмерное неоднородное телеграфное уравнение в сферической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2w}{\partial t^2}+k\frac{\partial w}{\partial t}=a^2\biggl[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Bigl(r^2\frac{\partial w}{\partial r}\Bigr)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Bigl(\sin\theta\frac{\partial w}{\partial\theta}\Bigr)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2w}{\partial\varphi^2}\biggr]-bw+\Phi(r,\theta,\varphi,t).$$

6.4.3-1. Область: $0\leqslant r\leqslant R$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$. Первая краевая задача.

Рассматривается сферическая область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w&=f_0(r,\theta,\varphi) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_t w&=f_1(r,\theta,\varphi) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ w&=g(\theta,\varphi,t) &&\text{при}\quad r=R &&\text{(граничное условие)}.\end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,\theta,\varphi,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^R f_0(\xi,\eta,\zeta)G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t)\xi^2\sin\eta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta +$$
$$+\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^R\bigl[f_1(\xi,\eta,\zeta)+kf_0(\xi,\eta,\zeta)\bigr]G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t)\xi^2\sin\eta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta -$$
$$-a^2R^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} g(\eta,\zeta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=R}\sin\eta\,d\eta\,d\zeta\,d\tau +$$
$$+\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^R \Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\xi^2\sin\eta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau,$$

где

$$G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t)=\frac{1}{2\pi R^2\sqrt{r\xi}}\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}kt\bigr)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}A_sB_{nms}J_{n+1/2}(\lambda_{nm}r)J_{n+1/2}(\lambda_{nm}\xi)\times$$
$$\times P_n^s(\cos\theta)P_n^s(\cos\eta)\cos\bigl[s(\varphi-\zeta)\bigr]\frac{\sin\bigl(t\sqrt{a^2\lambda_{nm}^2+b-\frac{1}{4}k^2}\,\bigr)}{\sqrt{a^2\lambda_{nm}^2+b-\frac{1}{4}k^2}},$$

$$A_s=\begin{cases}1 & \text{при } s=0,\\ 2 & \text{при } s\neq 0,\end{cases}\qquad B_{nms}=\frac{(2n+1)(n-s)!}{(n+s)!\bigl[J'_{n+1/2}(\lambda_{nm}R)\bigr]^2}.$$

Здесь $J_{n+1/2}(r)$ — функции Бесселя, $P_n^s(\mu)$ — присоединенные функции Лежандра, которые выражаются через полиномы Лежандра $P_n(\mu)$ по формулам

$$P_n^s(\mu)=(1-\mu^2)^{s/2}\frac{d^s}{d\mu^s}P_n(\mu),\qquad P_n(\mu)=\frac{1}{n!\,2^n}\frac{d^n}{d\mu^n}(\mu^2-1)^n;$$

λ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_{n+1/2}(\lambda R)=0.$$

6.4.3-2. Область: $0\leqslant r\leqslant R$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$. Вторая краевая задача.

Рассматривается сферическая область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w&=f_0(r,\theta,\varphi) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_t w&=f_1(r,\theta,\varphi) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_r w&=g(\theta,\varphi,t) &&\text{при}\quad r=R &&\text{(граничное условие)}.\end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,\theta,\varphi,t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\!\int_0^{\pi}\!\int_0^{R}f_0(\xi,\eta,\zeta)G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t)\xi^2\sin\eta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta+$$
$$+\int_0^{2\pi}\!\int_0^{\pi}\!\int_0^{R}\bigl[f_1(\xi,\eta,\zeta)+kf_0(\xi,\eta,\zeta)\bigr]G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t)\xi^2\sin\eta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta+$$
$$+a^2R^2\int_0^{t}\!\int_0^{2\pi}\!\int_0^{\pi}g(\eta,\zeta,\tau)G(r,\theta,\varphi,R,\eta,\zeta,t-\tau)\sin\eta\,d\eta\,d\zeta\,d\tau+$$
$$+\int_0^{t}\!\int_0^{2\pi}\!\int_0^{\pi}\!\int_0^{R}\Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\xi^2\sin\eta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau,$$

где

$$G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t)=\frac{3e^{-kt/2}}{4\pi R^3}\frac{\sin(t\sqrt{c})}{\sqrt{c}}+\frac{e^{-kt/2}}{2\pi\sqrt{r\xi}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}A_sB_{nms}J_{n+1/2}(\lambda_{nm}r)\times$$
$$\times J_{n+1/2}(\lambda_{nm}\xi)P_n^s(\cos\theta)P_n^s(\cos\eta)\cos\bigl[s(\varphi-\zeta)\bigr]\frac{\sin\bigl(t\sqrt{a^2\lambda_{nm}^2+c}\,\bigr)}{\sqrt{a^2\lambda_{nm}^2+c}},$$

$$A_s=\begin{cases}1 & \text{при } s=0,\\ 2 & \text{при } s\neq 0,\end{cases}\qquad B_{nms}=\frac{\lambda_{nm}^2(2n+1)(n-s)!}{(n+s)!\bigl[R^2\lambda_{nm}^2-n(n+1)\bigr]\bigl[J_{n+1/2}(\lambda_{nm}R)\bigr]^2},\qquad c=b-\tfrac{1}{4}k^2.$$

Здесь $J_{n+1/2}(r)$ — функции Бесселя, $P_n^s(\mu)$ — присоединенные функции Лежандра (см. разд. 6.4.3-1), λ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$2\lambda RJ'_{n+1/2}(\lambda R)-J_{n+1/2}(\lambda R)=0.$$

6.4.3-3. Область: $0\leqslant r\leqslant R$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$. Третья краевая задача.

Рассматривается сферическая область. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w&=f_0(r,\theta,\varphi) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_t w&=f_1(r,\theta,\varphi) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\ \partial_r w+sw&=g(\theta,\varphi,t) &&\text{при}\quad r=R &&\text{(граничное условие)}.\end{aligned}$$

Решение $w(r,\theta,\varphi,t)$ определяется по формуле из разд. 6.4.3-2, где

$$G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t)=\frac{e^{-kt/2}}{2\pi\sqrt{r\xi}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}A_lB_{nml}J_{n+1/2}(\lambda_{nm}r)J_{n+1/2}(\lambda_{nm}\xi)\times$$
$$\times P_n^l(\cos\theta)P_n^l(\cos\eta)\cos\bigl[l(\varphi-\zeta)\bigr]\frac{\sin\bigl(t\sqrt{a^2\lambda_{nm}^2+b-\frac14k^2}\,\bigr)}{\sqrt{a^2\lambda_{nm}^2+b-\frac14k^2}},$$

$$A_l=\begin{cases}1 & \text{при } l=0,\\ 2 & \text{при } l\neq 0,\end{cases}\qquad B_{nml}=\frac{\lambda_{nm}^2(2n+1)(n-l)!}{(n+l)!\bigl[R^2\lambda_{nm}^2+(sR+n)(sR-n-1)\bigr]\bigl[J_{n+1/2}(\lambda_{nm}R)\bigr]^2}.$$

Здесь $J_{n+1/2}(r)$ — функции Бесселя, $P_n^l(\mu)$ — присоединенные функции Лежандра (см. разд. 6.4.3-1), λ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\lambda RJ'_{n+1/2}(\lambda R)+\bigl(sR-\tfrac12\bigr)J_{n+1/2}(\lambda R)=0.$$

6.4.3-4. Область: $R_1\leqslant r\leqslant R_2,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$. Первая краевая задача.

Рассматривается сферический слой. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w&=f_0(r,\theta,\varphi) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w&=f_1(r,\theta,\varphi) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
w&=g_1(\theta,\varphi,t) &&\text{при}\quad r=R_1 &&\text{(граничное условие)},\\
w&=g_2(\theta,\varphi,t) &&\text{при}\quad r=R_2 &&\text{(граничное условие)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(r,\theta,\varphi,t)&=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi}\!\!\int_{R_1}^{R_2}f_0(\xi,\eta,\zeta)G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t)\xi^2\sin\eta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,+\\
&+\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi}\!\!\int_{R_1}^{R_2}\bigl[f_1(\xi,\eta,\zeta)+kf_0(\xi,\eta,\zeta)\bigr]G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t)\xi^2\sin\eta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,+\\
&+a^2R_1^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi}g_1(\eta,\zeta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=R_1}\sin\eta\,d\eta\,d\zeta\,d\tau\,-\\
&-a^2R_2^2\int_0^{t}\!\!\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi}g_2(\eta,\zeta,\tau)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\Bigr]_{\xi=R_2}\sin\eta\,d\eta\,d\zeta\,d\tau\,+\\
&+\int_0^{t}\!\!\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi}\!\!\int_{R_1}^{R_2}\Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\xi^2\sin\eta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau,
\end{aligned}$$

где

$$G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t)=\frac{\pi e^{-kt/2}}{8\sqrt{r\xi}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}A_sB_{nms}Z_{n+1/2}(\lambda_{nm}r)Z_{n+1/2}(\lambda_{nm}\xi)\times$$
$$\times P_n^s(\cos\theta)P_n^s(\cos\eta)\cos\bigl[s(\varphi-\zeta)\bigr]\frac{\sin\bigl(t\sqrt{a^2\lambda_{nm}^2+b-\frac14k^2}\,\bigr)}{\sqrt{a^2\lambda_{nm}^2+b-\frac14k^2}}.$$

Здесь

$$Z_{n+1/2}(\lambda_{nm}r)=J_{n+1/2}(\lambda_{nm}R_1)Y_{n+1/2}(\lambda_{nm}r)-Y_{n+1/2}(\lambda_{nm}R_1)J_{n+1/2}(\lambda_{nm}r),$$
$$A_s=\begin{cases}1 & \text{при } s=0,\\ 2 & \text{при } s\neq 0,\end{cases}\qquad B_{nms}=\frac{\lambda_{nm}(2n+1)(n-s)!\,J_{n+1/2}^2(\lambda_{nm}R_2)}{(n+s)!\bigl[J_{n+1/2}^2(\lambda_{nm}R_1)-J_{n+1/2}^2(\lambda_{nm}R_2)\bigr]},$$

где $J_{n+1/2}(r)$ — функции Бесселя, $P_n^s(\mu)$ — присоединенные функции Лежандра, которые выражаются через полиномы Лежандра $P_n(\mu)$ по формулам

$$P_n^s(\mu)=(1-\mu^2)^{s/2}\frac{d^s}{d\mu^s}P_n(\mu),\qquad P_n(\mu)=\frac{1}{n!\,2^n}\frac{d^n}{d\mu^n}(\mu^2-1)^n;$$

λ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$Z_{n+1/2}(\lambda R_2)=0.$$

6.4.3-5. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Вторая краевая задача.

Рассматривается сферический слой. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f_0(r,\theta,\varphi) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,\theta,\varphi) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_r w &= g_1(\theta,\varphi,t) && \text{при} \quad r=R_1 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_r w &= g_2(\theta,\varphi,t) && \text{при} \quad r=R_2 && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(r,\theta,\varphi,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi}\!\!\int_{R_1}^{R_2} f_0(\xi,\eta,\zeta)G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t)\xi^2\sin\eta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta +\\
&+ \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi}\!\!\int_{R_1}^{R_2}\bigl[f_1(\xi,\eta,\zeta)+kf_0(\xi,\eta,\zeta)\bigr]G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t)\xi^2\sin\eta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta -\\
&- a^2R_1^2\int_0^t\!\!\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} g_1(\eta,\zeta,\tau)G(r,\theta,\varphi,R_1,\eta,\zeta,t-\tau)\,\sin\eta\,d\eta\,d\zeta\,d\tau +\\
&+ a^2R_2^2\int_0^t\!\!\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} g_2(\eta,\zeta,\tau)G(r,\theta,\varphi,R_2,\eta,\zeta,t-\tau)\,\sin\eta\,d\eta\,d\zeta\,d\tau +\\
&+ \int_0^t\!\!\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi}\!\!\int_{R_1}^{R_2}\Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)\xi^2\sin\eta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau,
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t) &= \frac{3e^{-kt/2}\sin\bigl(t\sqrt{c}\bigr)}{4\pi(R_2^3-R_1^3)\sqrt{c}} + \frac{e^{-kt/2}}{4\pi\sqrt{r\xi}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{A_s}{B_{nms}}Z_{n+1/2}(\lambda_{nm}r)\times\\
&\times Z_{n+1/2}(\lambda_{nm}\xi)P_n^s(\cos\theta)P_n^s(\cos\eta)\cos\bigl[s(\varphi-\zeta)\bigr]\frac{\sin\bigl(t\sqrt{a^2\lambda_{nm}^2+c}\bigr)}{\sqrt{a^2\lambda_{nm}^2+c}}.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
A_s = \begin{cases} 1 & \text{при } s=0,\\ 2 & \text{при } s\neq 0,\end{cases}\quad B_{nms} = \frac{(n+s)!}{(2n+1)(n-s)!}\int_{R_1}^{R_2} rZ_{n+1/2}^2(\lambda_{nm}r)\,dr,\quad c = b-\tfrac{1}{4}k^2,
$$

$$
\begin{aligned}
Z_{n+1/2}(\lambda_{nm}r) &= \Bigl[\lambda_{nm}J'_{n+1/2}(\lambda_{nm}R_1) - \frac{1}{2R_1}J_{n+1/2}(\lambda_{nm}R_1)\Bigr]Y_{n+1/2}(\lambda_{nm}r) -\\
&- \Bigl[\lambda_{nm}Y'_{n+1/2}(\lambda_{nm}R_1) - \frac{1}{2R_1}Y_{n+1/2}(\lambda_{nm}R_1)\Bigr]J_{n+1/2}(\lambda_{nm}r),
\end{aligned}
$$

где $J_{n+1/2}(r)$ и $Y_{n+1/2}(r)$ — функции Бесселя, $P_n^s(\mu)$ — присоединенные функции Лежандра (см. разд. 6.4.3-4), λ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$
\lambda Z'_{n+1/2}(\lambda R_2) - \frac{1}{2R_2}Z_{n+1/2}(\lambda R_2) = 0.
$$

6.4.3-6. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Третья краевая задача.

Рассматривается сферический слой. Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f_0(r,\theta,\varphi) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(r,\theta,\varphi) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_r w - s_1 w &= g_1(\theta,\varphi,t) && \text{при} \quad r=R_1 && \text{(граничное условие)},\\
\partial_r w + s_2 w &= g_2(\theta,\varphi,t) && \text{при} \quad r=R_2 && \text{(граничное условие)}.
\end{aligned}
$$

Решение $w(r,\theta,\varphi,t)$ определяется по формуле из разд. 6.4.3-5, где

$$
\begin{aligned}
G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta,t) &= \frac{e^{-kt/2}}{4\pi\sqrt{r\xi}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}\frac{A_l}{B_{nml}}Z_{n+1/2}(\lambda_{nm}r)Z_{n+1/2}(\lambda_{nm}\xi)\times\\
&\times P_n^l(\cos\theta)P_n^l(\cos\eta)\cos\bigl[l(\varphi-\zeta)\bigr]\frac{\sin\bigl(t\sqrt{a^2\lambda_{nm}^2+c}\bigr)}{\sqrt{a^2\lambda_{nm}^2+c}}.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$A_l = \begin{cases} 1 & \text{при } l = 0, \\ 2 & \text{при } l \neq 0, \end{cases} \quad B_{nml} = \frac{(n+l)!}{(2n+1)(n-l)!} \int_{R_1}^{R_2} r Z_{n+1/2}^2(\lambda_{nm} r)\, dr, \quad c = b - \tfrac{1}{4}k^2,$$

$$Z_{n+1/2}(\lambda r) = \Big[\lambda J'_{n+1/2}(\lambda R_1) - \Big(s_1 + \frac{1}{2R_1}\Big) J_{n+1/2}(\lambda R_1)\Big] Y_{n+1/2}(\lambda r) -$$

$$- \Big[\lambda Y'_{n+1/2}(\lambda R_1) - \Big(s_1 + \frac{1}{2R_1}\Big) Y_{n+1/2}(\lambda R_1)\Big] J_{n+1/2}(\lambda r),$$

где $J_{n+1/2}(r)$ и $Y_{n+1/2}(r)$ — функции Бесселя, $P_n^l(\mu)$ — присоединенные функции Лежандра (см. разд. 6.4.3-4), λ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\lambda Z'_{n+1/2}(\lambda R_2) + \Big(s_2 - \frac{1}{2R_2}\Big) Z_{n+1/2}(\lambda R_2) = 0.$$

6.5. Другие уравнения с тремя пространственными переменными

6.5.1. Уравнения, содержащие произвольные параметры

1. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(ax^n \frac{\partial w}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(by^m \frac{\partial w}{\partial y}\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(cz^k \frac{\partial w}{\partial z}\Big).$

Это уравнение имеет решения с разделяющимися переменными. Кроме того, при $n \neq 2$, $m \neq 2$, $k \neq 2$ существуют частные решения вида

$$w = w(\xi, t), \qquad \xi^2 = 4\Big[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{z^{2-k}}{c(2-k)^2}\Big],$$

где функция $w(\xi, t)$ определяется одномерным нестационарным уравнением

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{A}{\xi}\frac{\partial w}{\partial \xi}, \qquad A = 2\Big(\frac{1}{2-n} + \frac{1}{2-m} + \frac{1}{2-k}\Big) - 1.$$

2. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k\frac{\partial w}{\partial t} = a^2\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\Big) + b_1\frac{\partial w}{\partial x} + b_2\frac{\partial w}{\partial y} + b_3\frac{\partial w}{\partial z} + cw.$

Преобразование

$$w(x, y, z, t) = u(x, y, z, \tau) \exp\Big(-\frac{1}{2}kt - \frac{b_1 x + b_2 y + b_3 z}{2a^2}\Big), \quad \tau = at$$

приводит к уравнению из разд. 6.3.1:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \beta u, \qquad \beta = \frac{c}{a^2} + \frac{k^2}{4a^2} - \frac{1}{4a^4}\big(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\big).$$

6.5.2. Уравнения вида $\rho(x,y,z)\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \operatorname{div}[a(x,y,z)\nabla w] - q(x,y,z)w + \Phi(x,y,z,t)$

Уравнения этого вида встречаются в задачах о колебаниях ограниченных объемов. При записи уравнения использовано краткое обозначение:

$$\operatorname{div}\big[a(\mathbf{r})\nabla w\big] = \frac{\partial}{\partial x}\Big[a(\mathbf{r})\frac{\partial w}{\partial x}\Big] + \frac{\partial}{\partial y}\Big[a(\mathbf{r})\frac{\partial w}{\partial y}\Big] + \frac{\partial}{\partial z}\Big[a(\mathbf{r})\frac{\partial w}{\partial z}\Big], \qquad \mathbf{r} = \{x, y, z\}.$$

Задачи для данного уравнения будем рассматривать внутри ограниченной области V с гладкой поверхностью S. Далее считается, что $\rho(\mathbf{r}) > 0$, $a(\mathbf{r}) > 0$, $q(\mathbf{r}) \geqslant 0$.

6.5.2-1. Первая краевая задача.

Решение данного уравнения с начальными условиями

$$\begin{aligned} w &= f_0(\mathbf{r}) \quad \text{при} \quad t = 0, \\ \partial_t w &= f_1(\mathbf{r}) \quad \text{при} \quad t = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

и неоднородным граничным условием первого рода

$$w = g(\mathbf{r}, t) \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \in S \tag{2}$$

можно записать в виде суммы

$$w(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_V f_0(\boldsymbol{\xi})\rho(\boldsymbol{\xi})\mathcal{G}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}, t)\, dV_\xi + \int_V f_1(\boldsymbol{\xi})\rho(\boldsymbol{\xi})\mathcal{G}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}, t)\, dV_\xi -$$
$$- \int_0^t \int_S g(\boldsymbol{\xi}, \tau) a(\boldsymbol{\xi}) \Big[\frac{\partial}{\partial N_\xi}\mathcal{G}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}, t-\tau)\Big]\, dS_\xi\, d\tau + \int_0^t \int_V \Phi(\boldsymbol{\xi}, \tau)\mathcal{G}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}, t-\tau)\, dV_\xi\, d\tau. \tag{3}$$

Здесь модифицированная функция Грина определяется по формуле

$$\begin{gathered} \mathcal{G}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}\|u_n\|^2} u_n(\mathbf{r}) u_n(\boldsymbol{\xi}) \sin(\sqrt{\lambda_n}\, t), \\ \|u_n\|^2 = \int_V \rho(\mathbf{r}) u_n^2(\mathbf{r})\, dV, \qquad \boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}, \end{gathered} \tag{4}$$

где λ_n и $u_n(\mathbf{r})$ — собственные значения и собственные функции задачи Штурма — Лиувилля для эллиптического уравнения второго порядка с однородным граничным условием первого рода:

$$\operatorname{div}\big[a(\mathbf{r})\nabla u\big] - q(\mathbf{r})u + \lambda\rho(\mathbf{r})u = 0, \tag{5}$$
$$u = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \in S. \tag{6}$$

Интегрирование в решении (3) ведется по переменным ξ_1, ξ_2, ξ_3; $\frac{\partial}{\partial N_\xi}$ — производная по внешней нормали к поверхности S относительно этих же переменных.

Общие свойства задачи Штурма — Лиувилля (5)–(6):

1°. Существует счетное множество собственных значений. Все собственные значения вещественны и могут быть упорядочены $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \cdots$, причем $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$ (поэтому может быть лишь конечное число отрицательных собственных значений).

2°. При $\rho(\mathbf{r}) > 0$, $a(\mathbf{r}) > 0$, $q(\mathbf{r}) \geqslant 0$ все собственные значения положительны: $\lambda_n > 0$.

3°. Собственные функции определяются с точностью до постоянного множителя. Собственные функции $u_n(\mathbf{r})$ и $u_m(\mathbf{r})$, отвечающие различным собственным значениям λ_n и λ_m, ортогональны между собой с весом $\rho(\mathbf{r})$ в области V:

$$\int_V \rho(\mathbf{r}) u_n(\mathbf{r}) u_m(\mathbf{r})\, dV = 0 \quad \text{при} \quad n \neq m.$$

4°. Произвольная функция $F(\mathbf{r})$, дважды непрерывно дифференцируемая и удовлетворяющая граничному условию задачи Штурма — Лиувилля ($F = 0$ для $\mathbf{r} \in S$), разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям:

$$F(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n u_n(\mathbf{r}), \quad F_n = \frac{1}{\|u_n\|^2} \int_V F(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}) u_n(\mathbf{r})\, dV,$$

где формула для $\|u_n\|^2$ приведена в (4).

Замечание. В трехмерной задаче каждому собственному значению λ_n вообще говоря соответствует конечное число линейно независимых собственных функций $u_n^{(1)}, u_n^{(2)}, \ldots, u_n^{(m)}$. Эти функции всегда можно заменить такими их линейными комбинациями

$$\bar{u}_n^{(k)} = A_{k,1}u_n^{(1)} + \cdots + A_{k,k-1}u_n^{(k-1)} + u_n^{(k)}, \qquad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, m,$$

что $\bar{u}_n^{(1)}, \bar{u}_n^{(2)}, \ldots, \bar{u}_n^{(m)}$ будут уже попарно ортогональны. Поэтому без ограничения общности можно считать, что все собственные функции ортогональны.

6.5.2-2. Вторая краевая задача.

Решение уравнения с начальными условиями (1) и неоднородным граничным условием второго рода

$$\frac{\partial w}{\partial N} = g(\mathbf{r}, t) \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \in S$$

можно записать в виде суммы

$$w(\mathbf{r},t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_V f_0(\boldsymbol{\xi})\rho(\boldsymbol{\xi})\mathcal{G}(\mathbf{r},\boldsymbol{\xi},t)\,dV_\xi + \int_V f_1(\boldsymbol{\xi})\rho(\boldsymbol{\xi})\mathcal{G}(\mathbf{r},\boldsymbol{\xi},t)\,dV_\xi +$$
$$+ \int_0^t\int_S g(\boldsymbol{\xi},\tau)a(\boldsymbol{\xi})\mathcal{G}(\mathbf{r},\boldsymbol{\xi},t-\tau)\,dS_\xi\,d\tau + \int_0^t\int_V \Phi(\boldsymbol{\xi},\tau)\mathcal{G}(\mathbf{r},\boldsymbol{\xi},t-\tau)\,dV_\xi\,d\tau. \qquad (7)$$

Здесь модифицированная функция Грина определяется по формуле (4), где λ_n и $u_n(\mathbf{r})$ — собственные значения и собственные функции задачи Штурма — Лиувилля для эллиптического уравнения второго порядка (5) с однородным граничным условием второго рода

$$\frac{\partial u}{\partial N} = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{r}\in S. \qquad (8)$$

При $q(\mathbf{r}) > 0$ общие свойства задачи на собственные значения (5), (8) будут такими же, как и для первой краевой задачи (все $\lambda_n > 0$).

6.5.2-3. Третья краевая задача.

Решение уравнения с начальными условиями (1) и неоднородным граничным условием третьего рода

$$\frac{\partial w}{\partial N} + k(\mathbf{r})w = g(\mathbf{r},t) \quad \text{при} \quad \mathbf{r}\in S$$

описывается формулами (7) и (4), где λ_n и $u_n(\mathbf{r})$ — собственные значения и собственные функции задачи Штурма — Лиувилля для эллиптического уравнения второго порядка (5) с однородным граничным условием третьего рода

$$\frac{\partial u}{\partial N} + k(\mathbf{r})u = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{r}\in S. \qquad (9)$$

При $q(\mathbf{r}) \geqslant 0$, $k(\mathbf{r}) > 0$ общие свойства задачи на собственные значения (5), (9) будут такими же, как и для первой краевой задачи (см. разд. 6.5.2-1).

Пусть $k(\mathbf{r}) = k$. Обозначим функции Грина второй и третьей краевых задач соответственно $G_2(\mathbf{r},\boldsymbol{\xi},t)$ и $G_3(\mathbf{r},\boldsymbol{\xi},t,k)$. При $q(\mathbf{r}) > 0$ справедливо предельное соотношение: $G_2(\mathbf{r},\boldsymbol{\xi},t) = \lim\limits_{k\to 0} G_3(\mathbf{r},\boldsymbol{\xi},t,k)$.

⊙ *Литература к разделу 6.5.2*: В. С. Владимиров (1971, стр. 473–474, 502–509), А. Д. Полянин (2000 *а*).

6.6. Уравнения с n пространственными переменными

Обозначения: $\Delta_n w = \sum\limits_{k=1}^n \frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2}$, $\mathbf{x} = \{x_1,\ldots,x_n\}$, $\mathbf{y} = \{y_1,\ldots,y_n\}$, $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$.

6.6.1. Волновое уравнение $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\Delta_n w$

6.6.1-1. Фундаментальное решение:

$$\mathscr{E}(\mathbf{x},t) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{n-2}{2}}}{2a\pi^{\frac{n+1}{2}}}\Gamma\Bigl(\dfrac{n-1}{2}\Bigr)\dfrac{\vartheta(at-|\mathbf{x}|)}{(a^2t^2-|\mathbf{x}|^2)^{\frac{n-1}{2}}}, & \text{если } n\geqslant 2 \text{ — четное;}\\ \dfrac{1}{2\pi a}\Bigl(\dfrac{1}{2\pi a^2 t}\dfrac{\partial}{\partial t}\Bigr)^{\frac{n-3}{2}}\delta(a^2t^2-|\mathbf{x}|^2), & \text{если } n\geqslant 3 \text{ — нечетное;}\end{cases}$$

где $\vartheta(z)$ — единичная функция Хевисайда, $\delta(z)$ — дельта-функция.

⊙ *Литература*: В. С. Владимиров (1971, стр. 206).

6.6.1-2. Свойства решений.

Пусть $w(x_1,\dots,x_n,t)$ — решение волнового уравнения. Тогда функции

$$w_1 = Aw(\pm\lambda x_1 + C_1,\dots,\pm\lambda x_n + C_n, \pm\lambda t + C_{n+1}),$$
$$w_2 = Aw\Bigl(\frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-(v/a)^2}}, x_2,\dots,x_n, \frac{t - va^{-2}x_1}{\sqrt{1-(v/a)^2}}\Bigr),$$
$$w_3 = A|r^2 - a^2t^2|^{-\frac{n-1}{2}} w\Bigl(\frac{x_1}{r^2-a^2t^2},\dots,\frac{x_n}{r^2-a^2t^2},\frac{t}{r^2-a^2t^2}\Bigr), \quad r=|\mathbf{x}|,$$

также будут решениями этого уравнения всюду, где они определены (A, $C_1,\dots,C_{n+1}$, v, λ — произвольные постоянные). Знаки при λ в формуле для w_1 выбираются произвольно независимо друг от друга.

6.6.1-3. Область: $-\infty < x_k < \infty$; $k=1,\dots,n$. Задача Коши.

Заданы начальные условия:

$$w = f(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad t=0,$$
$$\partial_t w = g(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad t=0.$$

Решение:

$$w(\mathbf{x},t) = \frac{1}{a^{n-1}(n-2)!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\int_0^{at}(a^2t^2-r^2)^{\frac{n-3}{2}} rT_r[f(\mathbf{x})]\,dr +$$
$$+ \frac{1}{a^{n-1}(n-2)!}\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}\int_0^{at}(a^2t^2-r^2)^{\frac{n-3}{2}} rT_r[g(\mathbf{x})]\,dr.$$

Здесь $T_r[f(\mathbf{x})]$ — усреднение функции f по сфере радиуса r с центром в точке $\mathbf{x}$:

$$T_r[f(\mathbf{x})] \equiv \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}}\int\limits_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|=r} f(\mathbf{y})\,dS_y, \qquad \sigma_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)},$$

где $\sigma_n r^{n-1}$ — площадь поверхности n-мерной сферы радиуса r, dS_y — элемент этой площади, $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2 = (x_1-y_1)^2+\dots+(x_n-y_n)^2$.

Другая форма представления решения для нечетных n:

$$w(\mathbf{x},t) = \frac{1}{1\cdot3\cdots(n-2)}\frac{\partial}{\partial t}\Bigl(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\Bigr)^{\frac{n-3}{2}}\Bigl(t^{n-2}T_{at}[f(\mathbf{x})]\Bigr) +$$
$$+ \frac{1}{1\cdot3\cdots(n-2)}\Bigl(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\Bigr)^{\frac{n-3}{2}}\Bigl(t^{n-2}T_{at}[g(\mathbf{x})]\Bigr).$$

Другая форма представления решения для четных n:

$$w(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2\cdot4\cdots(n-2)a^{n-1}}\frac{\partial}{\partial t}\Bigl(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\Bigr)^{\frac{n-2}{2}}\int_0^{at} T_r[f(\mathbf{x})]\frac{r^{n-1}\,dr}{\sqrt{a^2t^2-r^2}} +$$
$$+ \frac{1}{2\cdot4\cdots(n-2)a^{n-1}}\Bigl(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\Bigr)^{\frac{n-2}{2}}\int_0^{at} T_r[g(\mathbf{x})]\frac{r^{n-1}\,dr}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}.$$

⊙ *Литература*: Р. Курант (1964, стр. 678–684), В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 57–58), D. Zwillinger (1989, стр. 379–380).

6.6.1-4. Область: $0 \leqslant x_k \leqslant l_k$; $k=1,\dots,n$. Различные краевые задачи.

О решениях первой, второй, третьей и смешанной краевых задач с неоднородными условиями общего вида см. соответственно в разд. 6.6.2-2, 6.6.2-3, 6.6.2-4, 6.6.2-5 при $\Phi \equiv 0$.

6.6.2. Неоднородное волновое уравнение $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\Delta_n w + \Phi(x_1, \ldots, x_n, t)$

6.6.2-1. Область: $-\infty < x_k < \infty$; $k = 1, \ldots, n$. Задача Коши.

Заданы начальные условия:

$$w = f(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad t = 0,$$
$$\partial_t w = g(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x},t) &= \frac{1}{a^{n-1}(n-2)!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\int_0^{at}(a^2t^2 - r^2)^{\frac{n-3}{2}} rT_r[f(\mathbf{x})]\,dr + \\ &+ \frac{1}{a^{n-1}(n-2)!}\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}\int_0^{at}(a^2t^2 - r^2)^{\frac{n-3}{2}} rT_r[g(\mathbf{x})]\,dr + \\ &+ \frac{1}{a^{n-1}(n-2)!}\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}\int_0^{at}d\tau\int_0^{a\tau}(a^2\tau^2 - r^2)^{\frac{n-3}{2}} rT_r[\Phi(\mathbf{x}, t-\tau)]\,dr. \end{aligned}$$

Здесь $T_r[f(\mathbf{x})]$ — усреднение функции f по сфере радиуса r с центром в точке $\mathbf{x}$:

$$T_r[f(\mathbf{x})] \equiv \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}}\int\limits_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|=r} f(\mathbf{y})\,dS_y, \qquad \sigma_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)},$$

где $\sigma_n r^{n-1}$ — площадь поверхности n-мерной сферы радиуса r, dS_y — элемент этой площади.

⊙ *Литература*: Р. Курант (1964, стр. 678–684, 687), В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 57–58).

6.6.2-2. Область: $V = \{0 \leqslant x_k \leqslant l_k;\ k = 1, \ldots, n\}$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(\mathbf{x}) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(\mathbf{x}) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)},\\ w &= g_k(\mathbf{x}, t) && \text{при} \quad x_k = 0 && \text{(граничные условия)},\\ w &= h_k(\mathbf{x}, t) && \text{при} \quad x_k = l_k && \text{(граничные условия)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x},t) &= \int_0^t\int_V \Phi(\mathbf{y},\tau)G(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\,d\mathbf{y}\,d\tau + \\ &+ \frac{\partial}{\partial t}\int_V f_0(\mathbf{y})G(\mathbf{x},\mathbf{y},t)\,d\mathbf{y} + \int_V f_1(\mathbf{y})G(\mathbf{x},\mathbf{y},t)\,d\mathbf{y} + \\ &+ a^2\sum_{k=1}^n\int_0^t\int_{S^{(k)}}\Bigl[g_k(\mathbf{y},\tau)\frac{\partial}{\partial y_k}G(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\Bigr]_{y_k=0}dS_y^{(k)}\,d\tau - \\ &- a^2\sum_{k=1}^n\int_0^t\int_{S^{(k)}}\Bigl[h_k(\mathbf{y},\tau)\frac{\partial}{\partial y_k}G(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\Bigr]_{y_k=l_k}dS_y^{(k)}\,d\tau, \end{aligned}$$

где использованы обозначения

$$\mathbf{x} = \{x_1,\ldots,x_n\},\ \ \mathbf{y} = \{y_1,\ldots,y_n\},\ \ d\mathbf{y} = dy_1\,dy_2\ldots dy_n,\ \ dS_y^{(k)} = dy_1\ldots dy_{k-1}\,dy_{k+1}\ldots dy_n,$$
$$S^{(k)} = \{0 \leqslant y_m \leqslant l_m \ \ \text{при} \ \ m = 1,\ \ldots,\ k-1,\ k+1,\ \ldots,\ n\}.$$

Функция Грина:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x},\mathbf{y},t) = \frac{2^n}{l_1l_2\ldots l_n}\sum_{s_1=1}^\infty\sum_{s_2=1}^\infty\ldots\sum_{s_n=1}^\infty \sin(\lambda_{s_1}x_1)\sin(\lambda_{s_2}x_2)\ldots\sin(\lambda_{s_n}x_n)\times \\ \times\sin(\lambda_{s_1}y_1)\sin(\lambda_{s_2}y_2)\ldots\sin(\lambda_{s_n}y_n)\frac{\sin\bigl(at\sqrt{\lambda_{s_1}^2 + \cdots + \lambda_{s_n}^2}\,\bigr)}{a\sqrt{\lambda_{s_1}^2 + \cdots + \lambda_{s_n}^2}}, \end{aligned}$$

где

$$\lambda_{s_1} = \frac{s_1\pi}{l_1}, \quad \lambda_{s_2} = \frac{s_2\pi}{l_2}, \quad \ldots, \quad \lambda_{s_n} = \frac{s_n\pi}{l_n}.$$

6.6.2-3. Область: $V=\{0\leqslant x_k\leqslant l_k;\ k=1,\ \dots,\ n\}$. Вторая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(\mathbf{x}) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(\mathbf{x}) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_{x_k} w &= g_k(\mathbf{x},t) && \text{при} \quad x_k=0 && \text{(граничные условия)},\\ \partial_{x_k} w &= h_k(\mathbf{x},t) && \text{при} \quad x_k=l_k && \text{(граничные условия)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x},t) = &\int_0^t\int_V \Phi(\mathbf{y},\tau)G(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\,d\mathbf{y}\,d\tau+\\ &+\int_V f_0(\mathbf{y})G(\mathbf{x},\mathbf{y},t)\,d\mathbf{y}+\int_V f_1(\mathbf{y})G(\mathbf{x},\mathbf{y},t)\,d\mathbf{y}-\\ &-a^2\sum_{k=1}^n\int_0^t\int_{S^{(k)}}\bigl[g_k(\mathbf{y},\tau)G(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\bigr]_{y_k=0}\,dS_y^{(k)}\,d\tau+\\ &+a^2\sum_{k=1}^n\int_0^t\int_{S^{(k)}}\bigl[h_k(\mathbf{y},\tau)G(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\bigr]_{y_k=l_k}\,dS_y^{(k)}\,d\tau. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x},\mathbf{y},t)=\frac{t}{l_1l_2\dots l_n}+\frac{1}{l_1l_2\dots l_n}\sum_{s_1=0}^\infty\sum_{s_2=0}^\infty\dots\sum_{s_n=0}^\infty\frac{A_{s_1}A_{s_2}\dots A_{s_n}}{a\sqrt{\lambda_{s_1}^2+\dots+\lambda_{s_n}^2}}\sin\Bigl(at\sqrt{\lambda_{s_1}^2+\dots+\lambda_{s_n}^2}\Bigr)\times\\ \times\cos(\lambda_{s_1}x_1)\cos(\lambda_{s_2}x_2)\dots\cos(\lambda_{s_n}x_n)\cos(\lambda_{s_1}y_1)\cos(\lambda_{s_2}y_2)\dots\cos(\lambda_{s_n}y_n), \end{aligned}$$

где

$$\lambda_{s_1}=\frac{s_1\pi}{l_1},\quad \lambda_{s_2}=\frac{s_2\pi}{l_2},\quad \dots,\quad \lambda_{s_n}=\frac{s_n\pi}{l_n};\quad A_{s_m}=\begin{cases}1 & \text{при}\ s_m=0,\\ 2 & \text{при}\ s_m\neq 0,\end{cases}\quad m=1,\ 2,\ \dots,\ n.$$

Суммируются члены, удовлетворяющие условию $s_1+\dots+s_n>0$ (член, соответствующий $s_1=\ldots=s_n=0$, выделен отдельно).

6.6.2-4. Область: $V=\{0\leqslant x_k\leqslant l_k;\ k=1,\ \dots,\ n\}$. Третья краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(\mathbf{x}) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(\mathbf{x}) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_{x_k} w-b_kw &= g_k(\mathbf{x},t) && \text{при} \quad x_k=0 && \text{(граничные условия)},\\ \partial_{x_k} w+c_kw &= h_k(\mathbf{x},t) && \text{при} \quad x_k=l_k && \text{(граничные условия)}. \end{aligned}$$

Решение $w(\mathbf{x},t)$ определяется по формуле из разд. 6.6.2-3, где

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x},\mathbf{y},t)=2^n\sum_{s_1=1}^\infty\sum_{s_2=1}^\infty\dots\sum_{s_n=1}^\infty\frac{\sin\Bigl(at\sqrt{\lambda_{s_1}^2+\lambda_{s_2}^2+\dots+\lambda_{s_n}^2}\Bigr)}{aE_{s_1}E_{s_2}\dots E_{s_n}\sqrt{\lambda_{s_1}^2+\lambda_{s_2}^2+\dots+\lambda_{s_n}^2}}\times\\ \times\sin(\lambda_{s_1}x_1+\varphi_{s_1})\sin(\lambda_{s_2}x_2+\varphi_{s_2})\dots\sin(\lambda_{s_n}x_n+\varphi_{s_n})\times\\ \times\sin(\lambda_{s_1}y_1+\varphi_{s_1})\sin(\lambda_{s_2}y_2+\varphi_{s_2})\dots\sin(\lambda_{s_n}y_n+\varphi_{s_n}). \end{aligned}$$

Здесь

$$\varphi_{s_m}=\operatorname{arctg}\frac{\lambda_{s_m}}{l_m},\quad E_{s_m}=l_m+\frac{(b_mc_m+\lambda_{s_m}^2)(b_m+c_m)}{(b_m^2+\lambda_{s_m}^2)(c_m^2+\lambda_{s_m}^2)},\qquad m=1,\ 2,\ \dots,\ n;$$

λ_{s_m} — положительные корни трансцендентных уравнений

$$\frac{1}{b_m+c_m}\Bigl(\lambda-\frac{b_mc_m}{\lambda}\Bigr)=\operatorname{ctg}(l_m\lambda),\qquad m=1,\ 2,\ \dots,\ n.$$

6.6.2-5. Область: $V=\{0 \leqslant x_k \leqslant l_k;\ k=1, \ldots, n\}$. Смешанная краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f_0(\mathbf{x}) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
\partial_t w &= f_1(\mathbf{x}) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\
w &= g_k(\mathbf{x},t) && \text{при} \quad x_k=0 && \text{(граничные условия)},\\
\partial_{x_k} w &= h_k(\mathbf{x},t) && \text{при} \quad x_k=l_k && \text{(граничные условия)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(\mathbf{x},t) = {} & \int_0^t \int_V \Phi(\mathbf{y},\tau) G(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\, d\mathbf{y}\, d\tau + \\
& + \frac{\partial}{\partial t} \int_V f_0(\mathbf{y}) G(\mathbf{x},\mathbf{y},t)\, d\mathbf{y} + \int_V f_1(\mathbf{y}) G(\mathbf{x},\mathbf{y},t)\, d\mathbf{y} + \\
& + a^2 \sum_{k=1}^n \int_0^t \int_{S^{(k)}} \Bigl[g_k(\mathbf{y},\tau) \frac{\partial}{\partial y_k} G(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau) \Bigr]_{y_k=0} dS_y^{(k)}\, d\tau + \\
& + a^2 \sum_{k=1}^n \int_0^t \int_{S^{(k)}} \Bigl[h_k(\mathbf{y},\tau) G(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau) \Bigr]_{y_k=l_k} dS_y^{(k)}\, d\tau,
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{gathered}
G(\mathbf{x},\mathbf{y},t) = \frac{2^n}{l_1 l_2 \ldots l_n} \sum_{s_1=1}^\infty \sum_{s_2=1}^\infty \ldots \sum_{s_n=1}^\infty \sin(\lambda_{s_1} x_1) \sin(\lambda_{s_2} x_2) \ldots \sin(\lambda_{s_n} x_n) \times \\
\times \sin(\lambda_{s_1} y_1) \sin(\lambda_{s_2} y_2) \ldots \sin(\lambda_{s_n} y_n) \frac{\sin\bigl(at\sqrt{\lambda_{s_1}^2 + \cdots + \lambda_{s_n}^2}\,\bigr)}{a\sqrt{\lambda_{s_1}^2 + \cdots + \lambda_{s_n}^2}}, \\
\lambda_{s_1} = \frac{\pi(2s_1+1)}{2l_1}, \quad \lambda_{s_2} = \frac{\pi(2s_2+1)}{2l_2}, \quad \ldots, \quad \lambda_{s_n} = \frac{\pi(2s_n+1)}{2l_n}.
\end{gathered}
$$

6.6.3. Уравнение вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \Delta_n w - bw + \Phi(x_1, \ldots, x_n, t)$

6.6.3-1. Область: $-\infty < x_k < \infty;\ k=1, \ldots, n$. Задача Коши.

Заданы начальные условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f(\mathbf{x}) && \text{при} \quad t=0,\\
\partial_t w &= g(\mathbf{x}) && \text{при} \quad t=0,
\end{aligned}
$$

где $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

1°. Пусть $b=-c^2<0$ и $\Phi \equiv 0$. Решение ищется методом спуска в виде

$$
w(\mathbf{x},t) = \frac{1}{\exp(cx_{n+1})} u(\mathbf{x}, x_{n+1}, t), \tag{1}
$$

где u — решение задачи Коши для вспомогательного $(n+1)$-мерного волнового уравнения

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta_{n+1} u, \tag{2}
$$

с начальными условиями

$$
\begin{aligned}
u &= \exp(cx_{n+1}) f(\mathbf{x}) && \text{при} \quad t=0,\\
\partial_t u &= \exp(cx_{n+1}) g(\mathbf{x}) && \text{при} \quad t=0.
\end{aligned} \tag{3}
$$

О решении задачи (2), (3) см. разд. 6.6.1-3.

2°. Пусть $b=c^2>0$ и $\Phi \equiv 0$. В этом случае функцию $\exp(cx_{n+1})$ в (1) и (3) следует заменить на $\cos(cx_{n+1})$.

⊙ *Литература*: Р. Курант (1964, стр. 688–690).

6.6.3-2. Область: $V=\{0\leqslant x_k\leqslant l_k;\ k=1,\ \dots,\ n\}$. Первая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(\mathbf{x}) && \text{при}\quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(\mathbf{x}) && \text{при}\quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ w &= g_k(\mathbf{x},t) && \text{при}\quad x_k=0 && \text{(граничные условия)},\\ w &= h_k(\mathbf{x},t) && \text{при}\quad x_k=l_k && \text{(граничные условия)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x},t) &= \int_0^t\int_V \Phi(\mathbf{y},\tau)G(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\,d\mathbf{y}\,d\tau+\\ &+\frac{\partial}{\partial t}\int_V f_0(\mathbf{y})G(\mathbf{x},\mathbf{y},t)\,d\mathbf{y}+\int_V f_1(\mathbf{y})G(\mathbf{x},\mathbf{y},t)\,d\mathbf{y}+\\ &+a^2\sum_{k=1}^n\int_0^t\int_{S^{(k)}}\Bigl[g_k(\mathbf{y},\tau)\frac{\partial}{\partial y_k}G(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\Bigr]_{y_k=0}dS_y^{(k)}\,d\tau-\\ &-a^2\sum_{k=1}^n\int_0^t\int_{S^{(k)}}\Bigl[h_k(\mathbf{y},\tau)\frac{\partial}{\partial y_k}G(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\Bigr]_{y_k=l_k}dS_y^{(k)}\,d\tau, \end{aligned}$$

где использованы обозначения

$$\mathbf{x}=\{x_1,\dots,x_n\},\quad \mathbf{y}=\{y_1,\dots,y_n\},\quad d\mathbf{y}=dy_1\,dy_2\dots dy_n,\quad dS_y^{(k)}=dy_1\dots dy_{k-1}\,dy_{k+1}\dots dy_n,$$
$$S^{(k)}=\{0\leqslant y_m\leqslant l_m\quad\text{при}\quad m=1,\ \dots,\ k-1,\ k+1,\ \dots,\ n\}.$$

Функция Грина:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x},\mathbf{y},t) = \frac{2^n}{l_1l_2\dots l_n}&\sum_{s_1=1}^\infty\sum_{s_2=1}^\infty\dots\sum_{s_n=1}^\infty \sin(\lambda_{s_1}x_1)\sin(\lambda_{s_2}x_2)\dots\sin(\lambda_{s_n}x_n)\times\\ &\times\sin(\lambda_{s_1}y_1)\sin(\lambda_{s_2}y_2)\dots\sin(\lambda_{s_n}y_n)\frac{\sin\Bigl(t\sqrt{a^2(\lambda_{s_1}^2+\dots+\lambda_{s_n}^2)+b}\Bigr)}{\sqrt{a^2(\lambda_{s_1}^2+\dots+\lambda_{s_n}^2)+b}}, \end{aligned}$$

где

$$\lambda_{s_1}=\frac{s_1\pi}{l_1},\quad \lambda_{s_2}=\frac{s_2\pi}{l_2},\quad \dots,\quad \lambda_{s_n}=\frac{s_n\pi}{l_n}.$$

6.6.3-3. Область: $V=\{0\leqslant x_k\leqslant l_k;\ k=1,\ \dots,\ n\}$. Вторая краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(\mathbf{x}) && \text{при}\quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(\mathbf{x}) && \text{при}\quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_{x_k} w &= g_k(\mathbf{x},t) && \text{при}\quad x_k=0 && \text{(граничные условия)},\\ \partial_{x_k} w &= h_k(\mathbf{x},t) && \text{при}\quad x_k=l_k && \text{(граничные условия)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x},t) &= \int_0^t\int_V \Phi(\mathbf{y},\tau)G(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\,d\mathbf{y}\,d\tau+\\ &+\int_V f_0(\mathbf{y})G(\mathbf{x},\mathbf{y},t)\,d\mathbf{y}+\int_V f_1(\mathbf{y})G(\mathbf{x},\mathbf{y},t)\,d\mathbf{y}-\\ &-a^2\sum_{k=1}^n\int_0^t\int_{S^{(k)}}\bigl[g_k(\mathbf{y},\tau)G(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\bigr]_{y_k=0}dS_y^{(k)}\,d\tau+\\ &+a^2\sum_{k=1}^n\int_0^t\int_{S^{(k)}}\bigl[h_k(\mathbf{y},\tau)G(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\bigr]_{y_k=l_k}dS_y^{(k)}\,d\tau. \end{aligned}$$

Здесь

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y},t)=\frac{1}{l_1l_2\dots l_n}\sum_{s_1=0}^{\infty}\sum_{s_2=0}^{\infty}\dots\sum_{s_n=0}^{\infty}A_{s_1}A_{s_2}\dots A_{s_n}\cos(\lambda_{s_1}x_1)\cos(\lambda_{s_2}x_2)\dots\cos(\lambda_{s_n}x_n)\times$$
$$\times\cos(\lambda_{s_1}y_1)\cos(\lambda_{s_2}y_2)\dots\cos(\lambda_{s_n}y_n)\frac{\sin\Bigl(t\sqrt{a^2(\lambda_{s_1}^2+\dots+\lambda_{s_n}^2)+b}\Bigr)}{\sqrt{a^2(\lambda_{s_1}^2+\dots+\lambda_{s_n}^2)+b}},$$

где

$$\lambda_{s_1}=\frac{s_1\pi}{l_1},\quad \lambda_{s_2}=\frac{s_2\pi}{l_2},\quad \dots,\quad \lambda_{s_n}=\frac{s_n\pi}{l_n};\quad A_{s_m}=\begin{cases}1 & \text{при } s_m=0,\\ 2 & \text{при } s_m\neq 0,\end{cases}\quad m=1,\,2,\,\dots,\,n.$$

6.6.3-4. Область: $V=\{0\leqslant x_k\leqslant l_k;\ k=1,\,\dots,\,n\}$. Третья краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w&=f_0(\mathbf{x}) &&\text{при } t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w&=f_1(\mathbf{x}) &&\text{при } t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_{x_k} w-b_kw&=g_k(\mathbf{x},t) &&\text{при } x_k=0 &&\text{(граничные условия)},\\
\partial_{x_k} w+c_kw&=h_k(\mathbf{x},t) &&\text{при } x_k=l_k &&\text{(граничные условия)}.
\end{aligned}$$

Решение $w(\mathbf{x},t)$ определяется по формуле из разд. 6.6.3-3, где

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y},t)=2^n\sum_{s_1=1}^{\infty}\sum_{s_2=1}^{\infty}\dots\sum_{s_n=1}^{\infty}\frac{\sin\Bigl(t\sqrt{a^2(\lambda_{s_1}^2+\lambda_{s_2}^2+\dots+\lambda_{s_n}^2)+b}\Bigr)}{E_{s_1}E_{s_2}\dots E_{s_n}\sqrt{a^2(\lambda_{s_1}^2+\lambda_{s_2}^2+\dots+\lambda_{s_n}^2)+b}}\times$$
$$\times\sin(\lambda_{s_1}x_1+\varphi_{s_1})\sin(\lambda_{s_2}x_2+\varphi_{s_2})\dots\sin(\lambda_{s_n}x_n+\varphi_{s_n})\times$$
$$\times\sin(\lambda_{s_1}y_1+\varphi_{s_1})\sin(\lambda_{s_2}y_2+\varphi_{s_2})\dots\sin(\lambda_{s_n}y_n+\varphi_{s_n}).$$

Здесь

$$\varphi_{s_m}=\operatorname{arctg}\frac{\lambda_{s_m}}{l_m},\quad E_{s_m}=l_m+\frac{(b_mc_m+\lambda_{s_m}^2)(b_m+c_m)}{(b_m^2+\lambda_{s_m}^2)(c_m^2+\lambda_{s_m}^2)},\qquad m=1,\,2,\,\dots,\,n;$$

λ_{s_m} — положительные корни трансцендентных уравнений

$$\frac{1}{b_m+c_m}\Bigl(\lambda-\frac{b_mc_m}{\lambda}\Bigr)=\operatorname{ctg}(l_m\lambda),\qquad m=1,\,2,\,\dots,\,n.$$

6.6.3-5. Область: $V=\{0\leqslant x_k\leqslant l_k;\ k=1,\,\dots,\,n\}$. Смешанная краевая задача.

Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w&=f_0(\mathbf{x}) &&\text{при } t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w&=f_1(\mathbf{x}) &&\text{при } t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
w&=g_k(\mathbf{x},t) &&\text{при } x_k=0 &&\text{(граничные условия)},\\
\partial_{x_k} w&=h_k(\mathbf{x},t) &&\text{при } x_k=l_k &&\text{(граничные условия)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(\mathbf{x},t)&=\int_0^t\int_V\Phi(\mathbf{y},\tau)G(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\,d\mathbf{y}\,d\tau+\\
&+\frac{\partial}{\partial t}\int_V f_0(\mathbf{y})G(\mathbf{x},\mathbf{y},t)\,d\mathbf{y}+\int_V f_1(\mathbf{y})G(\mathbf{x},\mathbf{y},t)\,d\mathbf{y}+\\
&+a^2\sum_{k=1}^{n}\int_0^t\int_{S^{(k)}}\Bigl[g_k(\mathbf{y},\tau)\frac{\partial}{\partial y_k}G(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\Bigr]_{y_k=0}dS_y^{(k)}\,d\tau+\\
&+a^2\sum_{k=1}^{n}\int_0^t\int_{S^{(k)}}\Bigl[h_k(\mathbf{y},\tau)G(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\Bigr]_{y_k=l_k}dS_y^{(k)}\,d\tau.
\end{aligned}$$

Здесь

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y},t)=\frac{2^n}{l_1l_2\dots l_n}\sum_{s_1=1}^{\infty}\sum_{s_2=1}^{\infty}\dots\sum_{s_n=1}^{\infty}\sin(\lambda_{s_1}x_1)\sin(\lambda_{s_2}x_2)\dots\sin(\lambda_{s_n}x_n)\times$$

$$\times\sin(\lambda_{s_1}y_1)\sin(\lambda_{s_2}y_2)\dots\sin(\lambda_{s_n}y_n)\frac{\sin\Bigl(t\sqrt{a^2(\lambda_{s_1}^2+\dots+\lambda_{s_n}^2)+b}\Bigr)}{\sqrt{a^2(\lambda_{s_1}^2+\dots+\lambda_{s_n}^2)+b}},$$

где

$$\lambda_{s_1}=\frac{\pi(2s_1+1)}{2l_1},\quad \lambda_{s_2}=\frac{\pi(2s_2+1)}{2l_2},\quad\dots,\quad \lambda_{s_n}=\frac{\pi(2s_n+1)}{2l_n}.$$

6.6.4. Уравнения, содержащие первую производную по t

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\beta\dfrac{\partial w}{\partial t}=a^2\Delta_n w-bw+\Phi(x_1,\dots,x_n,t).$

Неоднородное телеграфное уравнение с n пространственными переменными.

1°. Замена $w=\exp\bigl(-\frac{1}{2}\beta t\bigr)u$ приводит к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta_n u-\bigl(b-\tfrac{1}{4}\beta^2\bigr)u+\exp\bigl(\tfrac{1}{2}\beta t\bigr)\Phi(x_1,\dots,x_n,t),$$

которое рассматривается в разд. 6.6.3.

2°. Область: $V=\{0\leqslant x_k\leqslant l_k;\ k=1,\,\dots,\,n\}$. Первая краевая задача. Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned}
w&=f_0(\mathbf{x}) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w&=f_1(\mathbf{x}) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
w&=g_k(\mathbf{x},t) &&\text{при}\quad x_k=0 &&\text{(граничные условия)},\\
w&=h_k(\mathbf{x},t) &&\text{при}\quad x_k=l_k &&\text{(граничные условия)}.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(\mathbf{x},t)&=\int_0^t\int_V\Phi(\mathbf{y},\tau)G(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\,d\mathbf{y}\,d\tau+\\
&+\frac{\partial}{\partial t}\int_V f_0(\mathbf{y})G(\mathbf{x},\mathbf{y},t)\,d\mathbf{y}+\int_V\bigl[f_1(\mathbf{y})+\beta f_0(\mathbf{y})\bigr]G(\mathbf{x},\mathbf{y},t)\,d\mathbf{y}+\\
&+a^2\sum_{k=1}^n\int_0^t\int_{S^{(k)}}\Bigl[g_k(\mathbf{y},\tau)\frac{\partial}{\partial y_k}G(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\Bigr]_{y_k=0}dS_y^{(k)}\,d\tau-\\
&-a^2\sum_{k=1}^n\int_0^t\int_{S^{(k)}}\Bigl[h_k(\mathbf{y},\tau)\frac{\partial}{\partial y_k}G(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\Bigr]_{y_k=l_k}dS_y^{(k)}\,d\tau,
\end{aligned}$$

где использованы обозначения

$$\mathbf{x}=\{x_1,\dots,x_n\},\ \ \mathbf{y}=\{y_1,\dots,y_n\},\ \ d\mathbf{y}=dy_1\,dy_2\dots dy_n,\ \ dS_y^{(k)}=dy_1\dots dy_{k-1}\,dy_{k+1}\dots dy_n,$$
$$S^{(k)}=\{0\leqslant y_m\leqslant l_m\ \ \text{при}\ \ m=1,\,\dots,\,k-1,\,k+1,\,\dots,\,n\}.$$

Функция Грина:

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y},t)=\frac{2^n e^{-\beta t/2}}{l_1l_2\dots l_n}\sum_{s_1=1}^{\infty}\sum_{s_2=1}^{\infty}\dots\sum_{s_n=1}^{\infty}\sin(\lambda_{s_1}x_1)\sin(\lambda_{s_2}x_2)\dots\sin(\lambda_{s_n}x_n)\times$$

$$\times\sin(\lambda_{s_1}y_1)\sin(\lambda_{s_2}y_2)\dots\sin(\lambda_{s_n}y_n)\frac{\sin\Bigl(t\sqrt{a^2(\lambda_{s_1}^2+\dots+\lambda_{s_n}^2)+b-\frac{1}{4}\beta^2}\Bigr)}{\sqrt{a^2(\lambda_{s_1}^2+\dots+\lambda_{s_n}^2)+b-\frac{1}{4}\beta^2}},$$

где

$$\lambda_{s_1}=\frac{s_1\pi}{l_1},\quad \lambda_{s_2}=\frac{s_2\pi}{l_2},\quad\dots,\quad \lambda_{s_n}=\frac{s_n\pi}{l_n}.$$

3°. Область: $V=\{0\leqslant x_k\leqslant l_k;\ k=1,\,\dots,\,n\}$. Вторая краевая задача.
Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w&=f_0(\mathbf{x}) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w&=f_1(\mathbf{x}) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_{x_k} w&=g_k(\mathbf{x},t) &&\text{при}\quad x_k=0 &&\text{(граничные условия)},\\
\partial_{x_k} w&=h_k(\mathbf{x},t) &&\text{при}\quad x_k=l_k &&\text{(граничные условия)}.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(\mathbf{x},t)=&\int_0^t\int_V \Phi(\mathbf{y},\tau)G(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\,d\mathbf{y}\,d\tau+\\
&+\int_V f_0(\mathbf{y})G(\mathbf{x},\mathbf{y},t)\,d\mathbf{y}+\int_V\bigl[f_1(\mathbf{y})+\beta f_0(\mathbf{y})\bigr]G(\mathbf{x},\mathbf{y},t)\,d\mathbf{y}-\\
&-a^2\sum_{k=1}^n\int_0^t\int_{S^{(k)}}\bigl[g_k(\mathbf{y},\tau)G(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\bigr]_{y_k=0}\,dS_y^{(k)}\,d\tau+\\
&+a^2\sum_{k=1}^n\int_0^t\int_{S^{(k)}}\bigl[h_k(\mathbf{y},\tau)G(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\bigr]_{y_k=l_k}\,dS_y^{(k)}\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
G(\mathbf{x},\mathbf{y},t)=\frac{e^{-\beta t/2}}{l_1l_2\dots l_n}&\sum_{s_1=0}^{\infty}\sum_{s_2=0}^{\infty}\dots\sum_{s_n=0}^{\infty}A_{s_1}A_{s_2}\dots A_{s_n}\cos(\lambda_{s_1}x_1)\cos(\lambda_{s_2}x_2)\dots\cos(\lambda_{s_n}x_n)\times\\
&\times\cos(\lambda_{s_1}y_1)\cos(\lambda_{s_2}y_2)\dots\cos(\lambda_{s_n}y_n)\frac{\sin\Bigl(t\sqrt{a^2(\lambda_{s_1}^2+\dots+\lambda_{s_n}^2)+b-\frac14\beta^2}\Bigr)}{\sqrt{a^2(\lambda_{s_1}^2+\dots+\lambda_{s_n}^2)+b-\frac14\beta^2}},
\end{aligned}
$$

где

$$
\lambda_{s_1}=\frac{s_1\pi}{l_1},\quad \lambda_{s_2}=\frac{s_2\pi}{l_2},\quad \dots,\quad \lambda_{s_n}=\frac{s_n\pi}{l_n};\quad A_{s_m}=\begin{cases}1 & \text{при}\ \ s_m=0,\\ 2 & \text{при}\ \ s_m\neq0,\end{cases}\qquad m=1,\,2,\,\dots,\,n.
$$

4°. Область: $V=\{0\leqslant x_k\leqslant l_k;\ k=1,\,\dots,\,n\}$. Третья краевая задача.
Заданы следующие условия:

$$
\begin{aligned}
w&=f_0(\mathbf{x}) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_t w&=f_1(\mathbf{x}) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)},\\
\partial_{x_k} w-b_kw&=g_k(\mathbf{x},t) &&\text{при}\quad x_k=0 &&\text{(граничные условия)},\\
\partial_{x_k} w+c_kw&=h_k(\mathbf{x},t) &&\text{при}\quad x_k=l_k &&\text{(граничные условия)}.
\end{aligned}
$$

Решение $w(\mathbf{x},t)$ дается формулой из п. 3°, где

$$
\begin{aligned}
G(\mathbf{x},\mathbf{y},t)=2^ne^{-\beta t/2}\sum_{s_1=1}^{\infty}\sum_{s_2=1}^{\infty}\dots\sum_{s_n=1}^{\infty}&\frac{\sin\Bigl(t\sqrt{a^2(\lambda_{s_1}^2+\lambda_{s_2}^2+\dots+\lambda_{s_n}^2)+b-\frac14\beta^2}\Bigr)}{E_{s_1}E_{s_2}\dots E_{s_n}\sqrt{a^2(\lambda_{s_1}^2+\lambda_{s_2}^2+\dots+\lambda_{s_n}^2)+b-\frac14\beta^2}}\times\\
&\times\sin(\lambda_{s_1}x_1+\varphi_{s_1})\sin(\lambda_{s_2}x_2+\varphi_{s_2})\dots\sin(\lambda_{s_n}x_n+\varphi_{s_n})\times\\
&\times\sin(\lambda_{s_1}y_1+\varphi_{s_1})\sin(\lambda_{s_2}y_2+\varphi_{s_2})\dots\sin(\lambda_{s_n}y_n+\varphi_{s_n}).
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
\varphi_{s_m}=\operatorname{arctg}\frac{\lambda_{s_m}}{l_m},\quad E_{s_m}=l_m+\frac{(b_mc_m+\lambda_{s_m}^2)(b_m+c_m)}{(b_m^2+\lambda_{s_m}^2)(c_m^2+\lambda_{s_m}^2)},\qquad m=1,\,2,\,\dots,\,n;
$$

λ_{s_m} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$
\frac{1}{b_m+c_m}\Bigl(\lambda-\frac{b_mc_m}{\lambda}\Bigr)=\operatorname{ctg}(l_m\lambda),\qquad m=1,\,2,\,\dots,\,n.
$$

5°. Область: $V=\{0\leqslant x_k\leqslant l_k;\ k=1,\ \dots,\ n\}$. Смешанная краевая задача.
Заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} w &= f_0(\mathbf{x}) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ \partial_t w &= f_1(\mathbf{x}) && \text{при} \quad t=0 && \text{(начальное условие)},\\ w &= g_k(\mathbf{x},t) && \text{при} \quad x_k=0 && \text{(граничные условия)},\\ \partial_{x_k} w &= h_k(\mathbf{x},t) && \text{при} \quad x_k=l_k && \text{(граничные условия)}. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x},t) = &\int_0^t\int_V \Phi(\mathbf{y},\tau)G(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\,d\mathbf{y}\,d\tau +\\ &+\frac{\partial}{\partial t}\int_V f_0(\mathbf{y})G(\mathbf{x},\mathbf{y},t)\,d\mathbf{y} + \int_V \big[f_1(\mathbf{y})+\beta f_0(\mathbf{y})\big]G(\mathbf{x},\mathbf{y},t)\,d\mathbf{y} +\\ &+a^2\sum_{k=1}^n\int_0^t\int_{S^{(k)}}\Big[g_k(\mathbf{y},\tau)\frac{\partial}{\partial y_k}G(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\Big]_{y_k=0}\,dS_y^{(k)}\,d\tau +\\ &+a^2\sum_{k=1}^n\int_0^t\int_{S^{(k)}}\Big[h_k(\mathbf{y},\tau)G(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\Big]_{y_k=l_k}\,dS_y^{(k)}\,d\tau, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x},\mathbf{y},t) = \frac{2^n e^{-\beta t/2}}{l_1 l_2\dots l_n}\sum_{s_1=1}^\infty\sum_{s_2=1}^\infty\dots\sum_{s_n=1}^\infty \sin(\lambda_{s_1}x_1)\sin(\lambda_{s_2}x_2)\dots\sin(\lambda_{s_n}x_n)\times\\ \times\sin(\lambda_{s_1}y_1)\sin(\lambda_{s_2}y_2)\dots\sin(\lambda_{s_n}y_n)\frac{\sin\Big(t\sqrt{a^2(\lambda_{s_1}^2+\dots+\lambda_{s_n}^2)+b-\frac14\beta^2}\Big)}{\sqrt{a^2(\lambda_{s_1}^2+\dots+\lambda_{s_n}^2)+b-\frac14\beta^2}}, \end{aligned}$$

$$\lambda_{s_1}=\frac{\pi(2s_1+1)}{2l_1},\quad \lambda_{s_2}=\frac{\pi(2s_2+1)}{2l_2},\quad \dots,\quad \lambda_{s_n}=\frac{\pi(2s_n+1)}{2l_n}.$$

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\beta\dfrac{\partial w}{\partial t}=a^2\Delta_n w+\sum\limits_{k=1}^n b_k\dfrac{\partial w}{\partial x_k}+cw.$

Телеграфное уравнение общего вида с n пространственными переменными.

Преобразование

$$w(x_1,\dots,x_n,t)=u(x_1,\dots,x_n,\tau)\exp\Big(-\frac12\beta t-\frac{1}{2a^2}\sum_{k=1}^n b_k x_k\Big),\qquad \tau=at$$

приводит к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}=\Delta_n u+\lambda u,\qquad \lambda=\frac{c}{a^2}+\frac{\beta^2}{4a^2}-\frac{1}{4a^4}\sum_{k=1}^n b_k^2,$$

которое рассматривается в разд. 6.6.3.

⊙ *Литература*: Р. Курант (1964, стр. 187).

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\dfrac{n-1}{t}\dfrac{\partial w}{\partial t}=\Delta_n w.$

Уравнение Дарбу. Задача Коши.
Заданы начальные условия:

$$\begin{aligned} w &= f(\mathbf{x}) && \text{при} \quad t=0,\\ \partial_t w &= 0 && \text{при} \quad t=0. \end{aligned}$$

Решение:

$$w(\mathbf{x},t)=\frac{1}{\sigma_n t^{n-1}}\int\limits_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|=t} f(\mathbf{y})\,dS_y,\qquad \sigma_n=\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)},$$

где $\sigma_n t^{n-1}$ — площадь поверхности n-мерной сферы радиуса t, dS_y — элемент этой площади (т. е. решение w представляет собой усреднение функции f по сфере радиуса t с центром в точке $\mathbf{x}$).

⊙ *Литература*: Р. Курант (1964, стр. 694–695).

7. Уравнения эллиптического типа с двумя пространственными переменными

7.1. Уравнение Лапласа $\Delta_2 w = 0$

Уравнение Лапласа часто встречается в теории тепло- и массопереноса, гидро- и аэромеханике, теории упругости, электростатике и других областях механики и физики. В теории тепло- и массопереноса оно описывает стационарное распределение температуры при отсутствии источников тепла в рассматриваемой области.

Регулярные решения уравнения Лапласа называются гармоническими функциями. Первая краевая задача для уравнения Лапласа часто называется задачей Дирихле, а вторая краевая задача — задачей Неймана.

Принцип экстремума: гармоническая в области D функция w, отличная от постоянной, ни в одной точке внутри этой области не может достигать своего наибольшего и наименьшего значения.

7.1.1. Задачи в декартовой системе координат

Уравнение Лапласа с двумя пространственными переменными в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

7.1.1-1. Частные решения и метод их построения.

1°. Частные решения:

$$\begin{aligned}
w(x,y) &= Ax + By + C,\\
w(x,y) &= A(x^2 - y^2) + Bxy,\\
w(x,y) &= \frac{Ax + By}{x^2 + y^2} + C,\\
w(x,y) &= \exp(\pm\mu x)(A\cos\mu y + B\sin\mu y),\\
w(x,y) &= (A\cos\mu x + B\sin\mu x)\exp(\pm\mu y),\\
w(x,y) &= (A\,\mathrm{sh}\,\mu x + B\,\mathrm{ch}\,\mu x)(C\cos\mu y + D\sin\mu y),\\
w(x,y) &= (A\cos\mu x + B\sin\mu x)(C\,\mathrm{sh}\,\mu y + D\,\mathrm{ch}\,\mu y),\\
w(x,y) &= A\ln\bigl[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\bigr] + B,
\end{aligned}$$

где A, B, C, D, x_0, y_0, μ — произвольные постоянные.

2°. Фундаментальное решение:

$$\mathscr{E}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

3°. Если $w(x,y)$ — некоторое решение уравнения Лапласа, то функции

$$\begin{aligned}
w_1 &= Aw(\pm\lambda x + C_1, \pm\lambda y + C_2),\\
w_2 &= Aw(x\cos\beta + y\sin\beta,\ -x\sin\beta + y\cos\beta),\\
w_3 &= Aw\Bigl(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\Bigr),
\end{aligned}$$

также являются решениями всюду, где они определены (A, C_1, C_2, β, λ — произвольные постоянные). Знаки перед λ в w_1 выбираются произвольно независимо друг от друга.

4°. Достаточно общий метод построения точных решений заключается в следующем. Пусть $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ — любая аналитическая функция комплексного переменного $z = x + iy$ (u и v — вещественные функции вещественных переменных x и y, $i^2 = -1$). Тогда действительная и мнимая части функции f удовлетворяют двумерному уравнению Лапласа

$$\Delta_2 u = 0, \qquad \Delta_2 v = 0.$$

Напомним, что необходимыми и достаточными условиями аналитичности функции f являются условия Коши — Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Таким образом, задавая любые аналитические функции $f(z)$ и выделяя их действительные и мнимые части, можно получать различные решения двумерного уравнения Лапласа.

⊙ *Литература*: М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат (1973, стр. 198–232), А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов (1974, стр. 184–191), А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко (1985, стр. 68).

7.1.1-2. Особенности постановок краевых задач для уравнения Лапласа.

1°. Для внешних краевых задачи на плоскости (обычно) требуется выставлять дополнительное условие ограниченности решения уравнения Лапласа на бесконечности.

2°. Решение второй краевой задачи определяется с точностью до произвольного аддитивного слагаемого.

3°. Пусть вторая краевая задача в замкнутой ограниченной области D с кусочно-гладкой* границей Σ характеризуется граничным условием

$$\frac{\partial w}{\partial N} = f(\mathbf{r}) \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \in \Sigma,$$

где $\frac{\partial w}{\partial N}$ — производная по (внешней) нормали к Σ. Необходимое и достаточное условие разрешимости этой задачи для уравнения Лапласа имеет вид

$$\int_\Sigma f(\mathbf{r})\,d\Sigma = 0.$$

Замечание. Такое же условие разрешимости будет иметь место и для внешней второй краевой задачи, если рассматриваемая бесконечная область имеет конечную границу.

⊙ *Литература*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 78, 92–94).

7.1.1-3. Область: $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается полуплоскость. Задано граничное условие:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad y = 0.$$

Решение:

$$w(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y f(\xi)\,d\xi}{(x-\xi)^2 + y^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x + y\operatorname{tg}\theta)\,d\theta.$$

⊙ *Литература*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 110), Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 167).

7.1.1-4. Область: $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$. Вторая краевая задача.

Рассматривается полуплоскость. Задано граничное условие:

$$\partial_y w = f(x) \quad \text{при} \quad y = 0.$$

Решение:

$$w(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\ln\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}\,d\xi + C,$$

где C — произвольная постоянная.

⊙ *Литература*: В. С. Владимиров (1971, стр. 466).

---

* Более строго граница Σ должна удовлетворять условиям Ляпунова [см. В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 115–116), А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972, стр. 350–352)].

7.1.1-5. Область: $0 \leqslant x < \infty,\ 0 \leqslant y < \infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается четверть плоскости. Заданы граничные условия:

$$w = f_1(y) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w = f_2(x) \quad \text{при} \quad y = 0.$$

Решение:

$$w(x,y) = \frac{4}{\pi}xy\int_0^\infty \frac{f_1(\eta)\eta\,d\eta}{\left[x^2+(y-\eta)^2\right]\left[x^2+(y+\eta)^2\right]} + \frac{4}{\pi}xy\int_0^\infty \frac{f_2(\xi)\xi\,d\xi}{\left[(x-\xi)^2+y^2\right]\left[(x+\xi)^2+y^2\right]}.$$

⊙ *Литература*: В. С. Владимиров, В. П. Михайлов, А. А. Вашарин и др. (1974, стр. 199, 202).

7.1.1-6. Область: $-\infty < x < \infty,\ 0 \leqslant y \leqslant a$. Первая краевая задача.

Рассматривается бесконечная полоса. Заданы граничные условия:

$$w = f_1(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad w = f_2(x) \quad \text{при} \quad y = a.$$

Решение:

$$w(x,y) = \frac{1}{2a}\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\int_{-\infty}^\infty \frac{f_1(\xi)\,d\xi}{\operatorname{ch}\left[\pi(x-\xi)/a\right]-\cos(\pi y/a)} + \\ + \frac{1}{2a}\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\int_{-\infty}^\infty \frac{f_2(\xi)\,d\xi}{\operatorname{ch}\left[\pi(x-\xi)/a\right]+\cos(\pi y/a)}.$$

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 167).

7.1.1-7. Область: $-\infty < x < \infty,\ 0 \leqslant y \leqslant a$. Вторая краевая задача.

Рассматривается бесконечная полоса. Заданы граничные условия:

$$\partial_y w = f_1(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \partial_y w = f_2(x) \quad \text{при} \quad y = a.$$

Решение:

$$w(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty f_1(\xi)\ln\Bigl\{\operatorname{ch}[\pi(x-\xi)/a]-\cos(\pi y/a)\Bigr\}\,d\xi - \\ - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty f_2(\xi)\ln\Bigl\{\operatorname{ch}[\pi(x-\xi)/a]+\cos(\pi y/a)\Bigr\}\,d\xi + C,$$

где C — произвольная постоянная.

7.1.1-8. Область: $0 \leqslant x < \infty,\ 0 \leqslant y \leqslant a$. Первая краевая задача.

Рассматривается полубесконечная полоса. Заданы граничные условия:

$$w = f_1(y) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w = f_2(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad w = f_3(x) \quad \text{при} \quad y = a.$$

Решение:

$$w(x,y) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^\infty \exp\left(-\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\int_0^a f_1(\eta)\sin\left(\frac{n\pi\eta}{a}\right)d\eta + \\ + \frac{1}{2a}\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\int_0^\infty\left\{\frac{1}{\operatorname{ch}\left[\pi(x-\xi)/a\right]-\cos(\pi y/a)} - \frac{1}{\operatorname{ch}\left[\pi(x+\xi)/a\right]-\cos(\pi y/a)}\right\}f_2(\xi)\,d\xi + \\ + \frac{1}{2a}\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\int_0^\infty\left\{\frac{1}{\operatorname{ch}\left[\pi(x-\xi)/a\right]+\cos(\pi y/a)} - \frac{1}{\operatorname{ch}\left[\pi(x+\xi)/a\right]+\cos(\pi y/a)}\right\}f_3(\xi)\,d\xi.$$

Пример. Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения Лапласа в полубесконечной полосе при $f_1(y) = 1$, $f_2(x) = f_3(x) = 0$.

Используя общую формулу, после некоторых преобразований получим решение:

$$w(x,y) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left[\frac{\sin(\pi y/a)}{\operatorname{sh}(\pi x/a)}\right].$$

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 164–167).

7.1.1-9. Область: $0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b$. Первая краевая задача.

Рассматривается прямоугольная область. Заданы граничные условия:

$$w = f_1(y) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w = f_2(y) \quad \text{при} \quad x = a,$$
$$w = f_3(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad w = f_4(x) \quad \text{при} \quad y = b.$$

Решение:

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sh}\Big[\frac{n\pi}{b}(a-x)\Big]\sin\Big(\frac{n\pi}{b}y\Big) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sh}\Big(\frac{n\pi}{b}x\Big)\sin\Big(\frac{n\pi}{b}y\Big) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big)\operatorname{sh}\Big[\frac{n\pi}{a}(b-y)\Big] + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big)\operatorname{sh}\Big(\frac{n\pi}{a}y\Big),$$

где коэффициенты A_n, B_n, C_n, D_n определяются формулами

$$A_n = \frac{2}{\lambda_n}\int_0^b f_1(\xi)\sin\Big(\frac{n\pi\xi}{b}\Big)\,d\xi, \quad B_n = \frac{2}{\lambda_n}\int_0^b f_2(\xi)\sin\Big(\frac{n\pi\xi}{b}\Big)\,d\xi,$$
$$C_n = \frac{2}{\mu_n}\int_0^a f_3(\xi)\sin\Big(\frac{n\pi\xi}{a}\Big)\,d\xi, \quad D_n = \frac{2}{\mu_n}\int_0^a f_4(\xi)\sin\Big(\frac{n\pi\xi}{a}\Big)\,d\xi,$$
$$\lambda_n = b\operatorname{sh}\Big(\frac{n\pi a}{b}\Big), \quad \mu_n = a\operatorname{sh}\Big(\frac{n\pi b}{a}\Big).$$

⊙ *Литература*: М. М. Смирнов (1975, стр. 42–43, 115), Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 167–168).

7.1.1-10. Область: $0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b$. Вторая краевая задача.

Рассматривается прямоугольная область. Заданы граничные условия:

$$\partial_x w = f_1(y) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad \partial_x w = f_2(y) \quad \text{при} \quad x = a,$$
$$\partial_y w = f_3(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \partial_y w = f_4(x) \quad \text{при} \quad y = b.$$

Решение:

$$w(x,y) = -\frac{A_0}{4a}(x-a)^2 + \frac{B_0}{4a}x^2 - \frac{C_0}{4b}(x-b)^2 + \frac{D_0}{4b}y^2 + K -$$
$$- b\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\lambda_n}\operatorname{ch}\Big[\frac{n\pi}{b}(a-x)\Big]\cos\Big(\frac{n\pi}{b}y\Big) + b\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{\lambda_n}\operatorname{ch}\Big(\frac{n\pi}{b}x\Big)\cos\Big(\frac{n\pi}{b}y\Big) -$$
$$- a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{\mu_n}\cos\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big)\operatorname{ch}\Big[\frac{n\pi}{a}(b-y)\Big] + a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D_n}{\mu_n}\cos\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big)\operatorname{ch}\Big(\frac{n\pi}{a}y\Big),$$

где K — произвольная постоянная, а коэффициенты A_n, B_n, C_n, D_n, λ_n, μ_n определяются формулами

$$A_n = \frac{2}{b}\int_0^b f_1(\xi)\cos\Big(\frac{n\pi\xi}{b}\Big)\,d\xi, \quad B_n = \frac{2}{b}\int_0^b f_2(\xi)\cos\Big(\frac{n\pi\xi}{b}\Big)\,d\xi,$$
$$C_n = \frac{2}{a}\int_0^a f_3(\xi)\cos\Big(\frac{n\pi\xi}{a}\Big)\,d\xi, \quad D_n = \frac{2}{a}\int_0^a f_4(\xi)\cos\Big(\frac{n\pi\xi}{a}\Big)\,d\xi,$$
$$\lambda_n = n\pi\operatorname{sh}\Big(\frac{n\pi a}{b}\Big), \quad \mu_n = n\pi\operatorname{sh}\Big(\frac{n\pi b}{a}\Big).$$

Условие разрешимости данной задачи (см. разд. 7.1.1-2, п. 3°):

$$\int_0^b f_1(y)\,dy + \int_0^b f_2(y)\,dy - \int_0^a f_3(x)\,dx - \int_0^a f_4(x)\,dx = 0.$$

7.1.1-11. Область: $0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b$. Третья краевая задача.

Рассматривается прямоугольная область. Заданы граничные условия:

$$\partial_x w - k_1 w = f_1(y) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad \partial_x w + k_2 w = f_2(y) \quad \text{при} \quad x = a,$$
$$\partial_y w - k_3 w = f_3(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \partial_y w + k_4 w = f_4(x) \quad \text{при} \quad y = b.$$

Решение см. в разд. 7.2.2-14 при $\Phi \equiv 0$.

7.1.1-12. Область: $0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b$. Смешанные краевые задачи.

1°. Рассматривается прямоугольная область. Заданы граничные условия:

$$\partial_x w = f(y) \quad \text{при} \quad x=0, \qquad \partial_x w = g(y) \quad \text{при} \quad x=a,$$
$$w = h(x) \quad \text{при} \quad y=0, \qquad w = s(x) \quad \text{при} \quad y=b.$$

Решение:

$$w(x,y) = -\frac{b}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{n\lambda_n}\operatorname{ch}\Bigl[\frac{\pi n}{b}(a-x)\Bigr]\sin\Bigl(\frac{\pi n y}{b}\Bigr) + \frac{b}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_n}{n\lambda_n}\operatorname{ch}\Bigl(\frac{\pi n x}{b}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{\pi n y}{b}\Bigr) +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_n}{\mu_n}\cos\Bigl(\frac{\pi n x}{a}\Bigr)\operatorname{sh}\Bigl[\frac{\pi n}{a}(b-y)\Bigr] + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_n}{\mu_n}\cos\Bigl(\frac{\pi n x}{a}\Bigr)\operatorname{sh}\Bigl(\frac{\pi n y}{a}\Bigr) +$$
$$+\frac{b-y}{ab}\int_0^a h(x)\,dx + \frac{y}{ab}\int_0^a s(x)\,dx,$$

где

$$f_n = \frac{2}{b}\int_0^b f(\xi)\sin\Bigl(\frac{\pi n\xi}{b}\Bigr)d\xi, \quad g_n = \frac{2}{b}\int_0^b g(\xi)\sin\Bigl(\frac{\pi n\xi}{b}\Bigr)d\xi,$$
$$h_n = \frac{2}{a}\int_0^a h(\xi)\cos\Bigl(\frac{\pi n\xi}{a}\Bigr)d\xi, \quad s_n = \frac{2}{a}\int_0^a s(\xi)\cos\Bigl(\frac{\pi n\xi}{a}\Bigr)d\xi,$$
$$\lambda_n = \operatorname{sh}\Bigl(\frac{\pi n a}{b}\Bigr), \quad \mu_n = \operatorname{sh}\Bigl(\frac{\pi n b}{a}\Bigr),$$

⊙ *Литература*: М. М. Смирнов (1975, стр. 43, 116).

2°. Рассматривается прямоугольная область. Заданы граничные условия:

$$w = f(y) \quad \text{при} \quad x=0, \qquad \partial_x w = g(y) \quad \text{при} \quad x=a,$$
$$w = h(x) \quad \text{при} \quad y=0, \qquad \partial_y w = s(x) \quad \text{при} \quad y=b,$$

где $f(0) = h(0)$.

Решение:

$$w(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n}{\operatorname{ch}\lambda_n}\operatorname{ch}\Bigl(\lambda_n\frac{a-x}{a}\Bigr)\sin\Bigl(\lambda_n\frac{y}{a}\Bigr) + a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g_n}{\lambda_n\operatorname{ch}\lambda_n}\operatorname{sh}\Bigl(\lambda_n\frac{x}{a}\Bigr)\sin\Bigl(\lambda_n\frac{y}{a}\Bigr) +$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h_n}{\operatorname{ch}\mu_n}\sin\Bigl(\mu_n\frac{x}{b}\Bigr)\operatorname{ch}\Bigl(\mu_n\frac{b-y}{b}\Bigr) + b\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s_n}{\mu_n\operatorname{ch}\mu_n}\sin\Bigl(\mu_n\frac{x}{b}\Bigr)\operatorname{sh}\Bigl(\mu_n\frac{y}{b}\Bigr),$$

где

$$f_n = \frac{2}{b}\int_0^b f(\xi)\sin\Bigl[\frac{\pi(2n+1)}{b}\xi\Bigr]d\xi, \quad g_n = \frac{2}{b}\int_0^b g(\xi)\sin\Bigl[\frac{\pi(2n+1)}{b}\xi\Bigr]d\xi,$$
$$h_n = \frac{2}{a}\int_0^a h(\xi)\sin\Bigl[\frac{\pi(2n+1)}{a}\xi\Bigr]d\xi, \quad s_n = \frac{2}{a}\int_0^a s(\xi)\sin\Bigl[\frac{\pi(2n+1)}{a}\xi\Bigr]d\xi,$$
$$\lambda_n = \frac{\pi(2n+1)a}{2b}, \quad \mu_n = \frac{\pi(2n+1)b}{2a}.$$

⊙ *Литература*: М. М. Смирнов (1975, стр. 43, 116–117).

7.1.2. Задачи в полярной системе координат

Уравнение Лапласа в полярной системе координат имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Bigl(r\frac{\partial w}{\partial r}\Bigr) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = 0, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

7.1.2-1. Частные решения:

$$w(r) = A\ln r + B,$$
$$w(r,\varphi) = \Bigl(Ar^m + \frac{B}{r^m}\Bigr)(C\cos m\varphi + D\sin m\varphi),$$

где $m = 1,\ 2,\ \ldots;\ A,\ B,\ C,\ D$ — произвольные постоянные.

7.1.2-2. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$ или $R \leqslant r < \infty$. Первая краевая задача.

На границе круга задано условие:
$$w = f(\varphi) \quad \text{при} \quad r = R.$$
1°. Решение внутренней задачи (при $r \leqslant R$):
$$w(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\frac{R^2 - r^2}{r^2 - 2Rr\cos(\varphi-\psi) + R^2}\,d\psi.$$
Эту формулу принято называть интегралом Пуассона.

Решение внутренней задачи в виде ряда:
$$w(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi),$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\cos(n\psi)\,d\psi, \qquad n = 0,\,1,\,2,\,\ldots,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\sin(n\psi)\,d\psi, \qquad n = 1,\,2,\,3,\,\ldots$$
2°. Ограниченное решение внешней задачи (при $r \geqslant R$):
$$w(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\frac{r^2 - R^2}{r^2 - 2Rr\cos(\varphi-\psi) + R^2}\,d\psi.$$
Ограниченное решение внешней задачи в виде ряда:
$$w(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^n (a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi),$$
где коэффициенты a_0, a_n, b_n определяются теми же формулами, что и для внутренней задачи.

В гидродинамике и других приложениях встречаются также внешние задачи, в которых приходится рассматривать неограниченные решения при $r \to \infty$.

Пример. Обтекание кругового цилиндра радиуса R потенциальным потоком идеальной (невязкой) несжимаемой жидкости со скоростью U характеризуется следующими граничными условиями для функции тока:
$$w = 0 \quad \text{при} \quad r = R, \qquad w \to Ur\sin\varphi \quad \text{при} \quad r \to \infty.$$
Решение:
$$w(r,\varphi) = U\Bigl(r - \frac{R^2}{r}\Bigr)\sin\varphi.$$

⦿ *Литература*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 96–97), А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972, стр. 309–316).

7.1.2-3. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$ или $R \leqslant r < \infty$. Вторая краевая задача.

На границе круга задано условие:
$$\partial_r w = f(\varphi) \quad \text{при} \quad r = R.$$
Функция $f(\varphi)$ должна удовлетворять условию разрешимости
$$\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi = 0.$$
1°. Решение внутренней задачи (при $r \leqslant R$):
$$w(r,\varphi) = \frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\ln\frac{r^2 - 2Rr\cos(\varphi-\psi) + R^2}{R^2}\,d\psi + C,$$
где C — произвольная постоянная (эту формулу принято называть интегралом Дини).

Решение внутренней задачи в виде ряда:
$$w(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{R}{n}\left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi) + C,$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\cos(n\psi)\,d\psi, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\sin(n\psi)\,d\psi,$$
где C — произвольная постоянная.

2°. Решение внешней задачи (при $r \geqslant R$):

$$w(r,\varphi) = -\frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\ln\frac{r^2 - 2Rr\cos(\varphi-\psi)+R^2}{r^2}\,d\psi + C,$$

где C — произвольная постоянная.

Решение внешней задачи в виде ряда:

$$w(r,\varphi) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R}{n}\left(\frac{R}{r}\right)^n(a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi) + C,$$

где коэффициенты a_n, b_n определяются теми же формулами, что и для внутренней задачи, C — произвольная постоянная.

⊙ *Литература*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 97–98).

7.1.2-4. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$ или $R \leqslant r < \infty$. Третья краевая задача.

На границе круга задано условие:

$$\partial_r w + kw = f(\varphi) \quad \text{при} \quad r = R.$$

1°. Решение внутренней задачи (при $r \leqslant R$):

$$w(r,\varphi) = \frac{a_0}{2k} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{R}{kR+n}\left(\frac{r}{R}\right)^n(a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\cos(n\psi)\,d\psi, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\sin(n\psi)\,d\psi, \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

2°. Решение внешней задачи (при $r \geqslant R$):

$$w(r,\varphi) = \frac{a_0}{2k} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{R}{kR-n}\left(\frac{R}{r}\right)^n(a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi),$$

где коэффициенты a_0, a_n, b_n определяются теми же формулами, что и для внутренней задачи.

⊙ *Литература*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 98–99).

7.1.2-5. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. Первая краевая задача.

Рассматривается кольцевая область. Заданы граничные условия:

$$w = f_1(\varphi) \quad \text{при} \quad r = R_1, \qquad w = f_2(\varphi) \quad \text{при} \quad r = R_2.$$

Решение:

$$w(r,\varphi) = A_0 + B_0\ln r + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r^n}(C_n\cos n\varphi + D_n\sin n\varphi),$$

где коэффициенты A_0, B_0, A_n, B_n, C_n, D_n определяются по формулам

$$A_0 = \frac{1}{2}\frac{a_0^{(1)}\ln R_2 - a_0^{(2)}\ln R_1}{\ln R_2 - \ln R_1}, \qquad B_0 = \frac{1}{2}\frac{a_0^{(2)} - a_0^{(1)}}{\ln R_2 - \ln R_1},$$

$$A_n = \frac{R_2^n a_n^{(2)} - R_1^n a_n^{(1)}}{R_2^{2n} - R_1^{2n}}, \qquad B_n = \frac{R_2^n b_n^{(2)} - R_1^n b_n^{(1)}}{R_2^{2n} - R_1^{2n}},$$

$$C_n = (R_1R_2)^n\frac{R_2^n a_n^{(1)} - R_1^n a_n^{(2)}}{R_2^{2n} - R_1^{2n}}, \qquad D_n = (R_1R_2)^n\frac{R_2^n b_n^{(1)} - R_1^n b_n^{(2)}}{R_2^{2n} - R_1^{2n}}.$$

Здесь $a_n^{(i)}$, $b_n^{(i)}$ $(i = 1,\ 2)$ — коэффициенты Фурье функций $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$:

$$a_n^{(i)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_i(\psi)\cos(n\psi)\,d\psi, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$b_n^{(i)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_i(\psi)\sin(n\psi)\,d\psi, \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

⊙ *Литература*: М. М. Смирнов (1975, стр. 44, 117).

7.1.2-6. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. Вторая краевая задача.

Рассматривается кольцевая область. Заданы граничные условия:

$$\partial_r w = f_1(\varphi) \quad \text{при} \quad r = R_1, \qquad \partial_r w = f_2(\varphi) \quad \text{при} \quad r = R_2.$$

Решение:

$$w(r,\varphi) = B\ln r + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n}(C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi) + K.$$

Здесь коэффициенты B, A_n, B_n, C_n, D_n определяются по формулам

$$B = \frac{1}{2}R_1 a_0^{(1)}, \quad A_n = \frac{R_2^{n+1}a_n^{(2)} - R_1^{n+1}a_n^{(1)}}{n(R_2^{2n} - R_1^{2n})}, \quad B_n = \frac{R_2^{n+1}b_n^{(2)} - R_1^{n+1}b_n^{(1)}}{n(R_2^{2n} - R_1^{2n})},$$

$$C_n = (R_1R_2)^{n+1}\frac{R_1^{n-1}a_n^{(2)} - R_2^{n-1}a_n^{(1)}}{n(R_2^{2n} - R_1^{2n})}, \quad D_n = (R_1R_2)^{n+1}\frac{R_1^{n-1}b_n^{(2)} - R_2^{n-1}b_n^{(1)}}{n(R_2^{2n} - R_1^{2n})},$$

где константы $a_n^{(i)}$, $b_n^{(i)}$ $(i = 1,\, 2)$ определяются теми же формулами, что и для первой краевой задачи, K — произвольная постоянная.

Замечание. Отметим, что должно выполняться равенство $a_0^{(1)}R_1 = a_0^{(2)}R_2$, которое является следствием условия разрешимости задачи: $\displaystyle\int_{r=R_1} f_1\,dS - \int_{r=R_2} f_2\,dS = 0.$

7.1.2-7. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. Смешанная краевая задача.

Рассматривается кольцевая область. Заданы граничные условия:

$$\partial_r w = f_1(\varphi) \quad \text{при} \quad r = R_1, \qquad w = f_2(\varphi) \quad \text{при} \quad r = R_2.$$

Решение:

$$w(r,\varphi) = \tfrac{1}{2}a_0^{(2)} + \tfrac{1}{2}a_0^{(1)}R_1 \ln\frac{r}{R_2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(A_n\cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r^n}(C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi).$$

Здесь коэффициенты A_n, B_n, C_n, D_n определяются по формулам

$$A_n = \frac{nR_2^n a_n^{(2)} + R_1^{n+1}a_n^{(1)}}{n(R_2^{2n} + R_1^{2n})}, \quad B_n = \frac{nR_2^n b_n^{(2)} + R_1^{n+1}b_n^{(1)}}{n(R_2^{2n} + R_1^{2n})},$$

$$C_n = R_1^{n+1}R_2^n\frac{nR_1^{n-1}a_n^{(2)} - R_2^n a_n^{(1)}}{n(R_2^{2n} + R_1^{2n})}, \quad D_n = R_1^{n+1}R_2^n\frac{nR_1^{n-1}b_n^{(2)} - R_2^n b_n^{(1)}}{n(R_2^{2n} + R_1^{2n})},$$

где константы $a_n^{(i)}$, $b_n^{(i)}$ $(i = 1,\, 2)$ определяются теми же формулами, что и для первой краевой задачи,

⊙ *Литература*: М. М. Смирнов (1975, стр. 44, 119).

7.1.3. Другие системы координат. Метод конформных отображений

7.1.3-1. Параболическая, эллиптическая и биполярная системы координат.

В ряде приложений уравнение Лапласа удобно решать в других ортогональных системах координат. Некоторые такие достаточно распространенные системы координат описаны в табл. 21. Во всех указанных системах уравнение Лапласа $\Delta_2 w = 0$ приводится к уравнению, подробно рассмотренному в разд. 7.1.1-1 (там даны частные решения и решения различных краевых задач).

Приведенные в табл. 21 ортогональные преобразования в комплексной форме задаются следующим образом:

$$x + iy = -\tfrac{1}{2}ic(u + iv)^2 \qquad \text{(параболические координаты)},$$

$$x + iy = c\,\mathrm{ch}(\xi + i\eta) \qquad \text{(эллиптические координаты)},$$

$$x + iy = ic\,\mathrm{ctg}\big[\tfrac{1}{2}(\sigma + i\tau)\big] \qquad \text{(биполярные координаты)}.$$

ТАБЛИЦА 21

Двумерный оператор Лапласа в некоторых криволинейных ортогональных системах координат.

Название координат	Преобразование ($c > 0$)	Оператор Лапласа, $\Delta_2 w$
Параболические координаты u, v	$x = cuv,\ y = \frac{1}{2}c(v^2 - u^2)$ $-\infty < u < \infty,\ 0 \leqslant v < \infty$	$\frac{1}{c^2(u^2+v^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right)$
Эллиптические координаты ξ, η	$x = c \operatorname{ch}\xi \cos\eta,\ y = c \operatorname{sh}\xi \sin\eta$ $0 \leqslant \xi < \infty,\ 0 \leqslant \eta < 2\pi$	$\frac{1}{c^2(\operatorname{sh}^2\xi + \sin^2\eta)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right)$
Биполярные координаты σ, τ	$x = \frac{c \operatorname{sh}\tau}{\operatorname{ch}\tau - \cos\sigma},\ y = \frac{c \sin\sigma}{\operatorname{ch}\tau - \cos\sigma}$ $0 \leqslant \sigma < 2\pi,\ -\infty < \tau < \infty$	$\frac{1}{c^2}(\operatorname{ch}\tau - \cos\sigma)^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}\right)$

В обеих частях этих равенств приравнивают действительные и мнимые части ($i^2 = -1$).

Пример. Плоские задачи гидродинамики о потенциальном обтекании тел идеальной (невязкой) несжимаемой жидкостью сводятся к уравнению Лапласа для функции тока. В частности, движение эллиптического цилиндра с полуосями a и b со скоростью U параллельно бóльшей оси ($a > b$) в идеальной жидкости описывается функцией тока:

$$w(\xi, \eta) = -Ub\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{1/2} e^{\xi} \sin\eta, \qquad c^2 = a^2 - b^2,$$

где ξ и η — эллиптические координаты.

⊙ *Литература*: Г. Ламб (1947, стр. 109), Дж. Хаппель, Г. Бреннер (1976, стр. 568–575), Г. Корн, Т. Корн (1974, стр. 191–196).

7.1.3-2. Область произвольной формы. Метод конформных отображений.

1°. Пусть $\zeta = \zeta(z)$ — аналитическая функция, реализующая конформное отображение из комплексной области $z = x + iy$ в комплексную область $\zeta = u + iv$, где $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ — новые независимые переменные. Учитывая, что действительная и мнимая части аналитических функций удовлетворяют условиям Коши — Римана $\partial_x u = \partial_y v$, $\partial_y u = -\partial_x v$, имеем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = |\zeta'(z)|^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right).$$

Поэтому при конформном отображении уравнение Лапласа в плоскости xy переходит в уравнение Лапласа в плоскости uv.

2°. Всякую плоскую односвязную область D в плоскости xy, ограниченную кусочно-гладкой кривой, можно с помощью подходящих конформных отображений взаимно однозначно отобразить на верхнюю полуплоскость или на единичный круг в плоскости uv. В результате первая и вторая краевая задачи для уравнения Лапласа для плоской области D сводятся соответственно к первой и второй краевым задачам для верхней полуплоскости или круга, которые рассмотрены в разд. 7.1.1–7.1.2.

В разд. 7.2.4 указаны конформные отображения некоторых областей на верхнюю полуплоскость и на единичный круг. Там же приведены примеры решения конкретных краевых задач для уравнения Пуассона методом конформных отображений (получены функции Грина в задаче Дирихле для полукруга и четверти круга).

Значительное число конформных отображений (т. е. осуществляемых аналитическими функциями) различных областей можно найти, например, в книгах приведенных ниже в списке литературы.

⊙ *Литература*: В. И. Лаврик, В. Н. Савенков (1970), М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат (1973), V. I. Ivanov, M. K. Trubetskov (1994).

7.1.3-3. Приведение двумерной задачи Неймана к задаче Дирихле.

Пусть положение точек x_*, y_*, расположенных на границе Σ области D, задается с помощью параметра s, т. е. $x_* = x_*(s)$, $y_* = y_*(s)$. Тогда любая функция двух переменных $f(x, y)$ на границе области D также будет определяться этим параметром, $f(x, y)|_\Sigma = f(x_*(s), y_*(s)) = f_*(s)$.

Решение двумерной задачи Неймана для уравнения Лапласа $\Delta_2 w = 0$ в области D с граничным условием второго рода

$$\frac{\partial w}{\partial N} = f_*(s) \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \in \Sigma$$

можно выразить через решение двумерной задачи Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta_2 u = 0$ в области D с граничным условием первого рода

$$u = F_*(s) \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \in \Sigma,$$

где $F_*(s) = \int f_*(s)\, ds$, по формуле

$$w(x,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(t, y_0)\, dt - \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\, dt + C.$$

Здесь x_0, y_0 координаты любой точки рассматриваемой области, C — произвольная постоянная.

⊙ *Литература*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 95–96).

7.2. Уравнение Пуассона $\Delta_2 w = -\Phi(\mathrm{x})$

7.2.1. Предварительные замечания. Структура решения

Уравнение Пуассона, как и уравнение Лапласа, часто встречается в теории тепло- и массопереноса, гидро- и аэромеханике, теории упругости, электростатике и других областях механики и физики. Оно описывает стационарное распределение температуры при наличии источников (или стоков) тепла в рассматриваемой области.

Уравнение Лапласа является частным случаем уравнения Пуассона при $\Phi \equiv 0$.

Далее будем рассматривать конечную область S с достаточно гладкой границей L. Пусть $\mathbf{r} \in S$ и $\boldsymbol{\rho} \in S$, где $\mathbf{r} = \{x, y\}$, $\boldsymbol{\rho} = \{\xi, \eta\}$, $|\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$.

7.2.1-1. Первая краевая задача.

Решение первой краевой задачи для уравнения Пуассона

$$\Delta_2 w = -\Phi(\mathbf{r}) \tag{1}$$

в области S с неоднородным граничным условием

$$w = f(\mathbf{r}) \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \in L$$

можно записать в виде

$$w(\mathbf{r}) = \int_S \Phi(\boldsymbol{\rho}) G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})\, dS_\rho - \int_L f(\boldsymbol{\rho}) \frac{\partial G}{\partial N_\rho}\, dL_\rho. \tag{2}$$

Здесь $G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})$ — функция Грина первой краевой задачи, $\frac{\partial G}{\partial N_\rho}$ — производная функции Грина, взятая относительно переменных ξ, η по направлению внешней нормали $\mathbf{N}$ к границе L. Интегрирование везде ведется по переменным ξ, η, при этом $dS_\rho = d\xi\, d\eta$.

Функция Грина $G = G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})$ первой краевой задачи определяется условиями:

1°. Функция G удовлетворяет уравнению Лапласа относительно переменных x, y в области S всюду, кроме точки (ξ, η), где она имеет особенность вида $\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|}$.

2°. Функция G относительно переменных x, y удовлетворяет однородному граничному условию первого рода на границе области, т. е. $G|_L = 0$.

Функция Грина может быть представлена в виде

$$G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|} + u, \tag{3}$$

где вспомогательная функция $u = u(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})$ определяется путем решения первой краевой задачи для уравнения Лапласа $\Delta_2 u = 0$ с граничным условием $u|_L = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|}$ (в этой задаче величина $\boldsymbol{\rho}$ рассматривается как двумерный свободный параметр).

Свойство симметрии функции Грина относительно аргументов: $G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) = G(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{r})$.

Замечание 1. При использовании полярной системы координат в формулах (2) и (3) следует положить

$$\mathbf{r} = \{r, \varphi\}, \quad \boldsymbol{\rho} = \{\xi, \eta\}, \quad |\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|^2 = r^2 + \xi^2 - 2r\xi\cos(\varphi - \eta), \quad dS_\rho = \xi\, d\xi\, d\eta.$$

7.2.1-2. Вторая краевая задача.

Вторая краевая задача для уравнения Пуассона (1) характеризуется граничным условием

$$\frac{\partial w}{\partial N} = f(\mathbf{r}) \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \in L.$$

Необходимое условие разрешимости такой задачи:

$$\int_S \Phi(\mathbf{r})\,dS + \int_L f(\mathbf{r})\,dL = 0. \tag{4}$$

Решение второй краевой задачи (при выполнении условия разрешимости) можно записать в виде

$$w(\mathbf{r}) = \int_S \Phi(\boldsymbol{\rho})G(\mathbf{r},\boldsymbol{\rho})\,dS_\rho + \int_L f(\boldsymbol{\rho})G(\mathbf{r},\boldsymbol{\rho})\,dL_\rho + C, \tag{5}$$

где C — произвольная постоянная.

Функция Грина $G = G(\mathbf{r},\boldsymbol{\rho})$ второй краевой задачи определяется условиями:

1°. Функция G удовлетворяет уравнению Лапласа относительно переменных x, y в области S всюду, кроме точки (ξ,η), где она имеет особенность вида $\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|}$.

2°. Функция G относительно переменных x, y удовлетворяет неоднородному граничному условию второго рода на границе области:

$$\left.\frac{\partial G}{\partial N}\right|_L = \frac{1}{L_0},$$

где L_0 — длина границы рассматриваемой области.

Функция Грина единственна с точностью до аддитивной постоянной.

Замечание 2. Нельзя определить функцию Грина с помощью условия 1° и однородного граничного условия $\left.\frac{\partial G}{\partial N}\right|_L = 0$ [такая задача для G неразрешима, так как представив G в форме (3), для функции u получим задачу с неоднородным граничным условием второго рода, для которого не будет выполняться условии разрешимости (2)].

7.2.1-3. Третья краевая задача.

Решение третьей краевой задачи для уравнения Пуассона (1) в области S с неоднородным граничным условием

$$\frac{\partial w}{\partial N} + kw = f(\mathbf{r}) \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \in L$$

дается формулой (5) при $C = 0$, где $G = G(\mathbf{r},\boldsymbol{\rho})$ — функция Грина третьей краевой задачи, которая определяется условиями:

1°. Функция G удовлетворяет уравнению Лапласа относительно переменных x, y в области S всюду, кроме точки (ξ,η), где она имеет особенность вида $\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|}$.

2°. Функция G относительно переменных x, y удовлетворяет однородному граничному условию третьего рода на границе области, т. е. $\left[\frac{\partial G}{\partial N} + kG\right]_L = 0$.

Функцию Грина можно представить в виде (3), где вспомогательная функция u определяется путем решения соответствующей третьей краевой задачи для уравнения Лапласа $\Delta_2 u = 0$.

Свойство симметрии функции Грина относительно аргументов: $G(\mathbf{r},\boldsymbol{\rho}) = G(\boldsymbol{\rho},\mathbf{r})$.

⊙ *Литература к разделу 7.2.1*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, Михлин и др. (1964, стр. 92–94, 108–111), Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов (1970, стр. 277).

7.2.2. Задачи в декартовой системе координат

Уравнение Пуассона в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \Phi(x,y) = 0.$$

7.2.2-1. Частные решения уравнения Пуассона со специальной правой частью.

1°. При $\Phi(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\exp(b_i x + c_j y)$ уравнение имеет решение вида

$$w(x,y) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_{ij}}{b_i^2+c_j^2}\exp(b_i x + c_j y).$$

2°. При $\Phi(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\sin(b_i x + p_i)\sin(c_j y + q_j)$ уравнение имеет решение вида

$$w(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_{ij}}{b_i^2+c_j^2}\sin(b_i x + p_i)\sin(c_j y + q_j).$$

7.2.2-2. Область: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$.

Решение:

$$w(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi,\eta)\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}\,d\xi\,d\eta.$$

7.2.2-3. Область: $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается полуплоскость. Задано граничное условие:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad y = 0.$$

Решение:

$$w(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y f(\xi)\,d\xi}{(x-\xi)^2+y^2} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi,\eta)\ln\frac{\sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}\,d\xi\,d\eta.$$

⊙ *Литература*: А. Г. Бутковский (1979, стр. 131).

7.2.2-4. Область: $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$. Вторая краевая задача.

Рассматривается полуплоскость. Задано граничное условие:

$$\partial_y w = f(x) \quad \text{при} \quad y = 0.$$

Решение:

$$w(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\ln\sqrt{(x-\xi)^2+y^2}\,d\xi + {}$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi,\eta)\left[\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} + \ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}}\right]d\xi\,d\eta + C,$$

где C — произвольная постоянная.

⊙ *Литература*: В. С. Владимиров (1971, стр. 466).

7.2.2-5. Область: $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant y \leqslant a$. Первая краевая задача.

Рассматривается бесконечная полоса. Заданы граничные условия:

$$w = f_1(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad w = f_2(x) \quad \text{при} \quad y = a.$$

Решение:

$$w(x,y) = \frac{1}{2a}\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_1(\xi)\,d\xi}{\operatorname{ch}[\pi(x-\xi)/a] - \cos(\pi y/a)} + {}$$
$$+ \frac{1}{2a}\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_2(\xi)\,d\xi}{\operatorname{ch}[\pi(x-\xi)/a] + \cos(\pi y/a)} + {}$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\int_0^{a}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi,\eta)\ln\frac{\operatorname{ch}[\pi(x-\xi)/a] - \cos[\pi(y+\eta)/a]}{\operatorname{ch}[\pi(x-\xi)/a] - \cos[\pi(y-\eta)/a]}\,d\xi\,d\eta.$$

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 167).

7.2.2-6. Область: $-\infty < x < \infty,\ 0 \leqslant y \leqslant a$. Вторая краевая задача.

Рассматривается бесконечная полоса. Заданы граничные условия:

$$\partial_y w = f_1(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \partial_y w = f_2(x) \quad \text{при} \quad y = a.$$

Решение:

$$w(x,y) = -\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) G(x,y,\xi,0)\,d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\xi) G(x,y,\xi,a)\,d\xi + \\ + \int_0^a \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi,\eta) G(x,y,\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta + C.$$

Здесь

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{1}{\operatorname{ch}[\pi(x-\xi)/a] - \cos[\pi(y-\eta)/a]} + \frac{1}{4\pi} \ln \frac{1}{\operatorname{ch}[\pi(x-\xi)/a] - \cos[\pi(y+\eta)/a]},$$

где C — произвольная постоянная.

7.2.2-7. Область: $-\infty < x < \infty,\ 0 \leqslant y \leqslant a$. Третья краевая задача.

Рассматривается бесконечная полоса. Заданы граничные условия:

$$\partial_y w - k_1 w = f_1(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \partial_y w + k_2 w = f_2(x) \quad \text{при} \quad y = a.$$

Решение $w(x,y)$ определяется по формуле из разд. 7.2.2-6, где

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(y)\varphi_n(\eta)}{\|\varphi_n\|^2 \mu_n} \exp\bigl(-\mu_n |x-\xi|\bigr),$$

$$\varphi_n(y) = \mu_n \cos(\mu_n y) + k_1 \sin(\mu_n y), \quad \|\varphi_n\|^2 = \frac{1}{2}(\mu_n^2 + k_1^2)\Bigl[a + \frac{(k_1+k_2)(\mu_n^2 + k_1 k_2)}{(\mu_n^2 + k_1^2)(\mu_n^2 + k_2^2)}\Bigr].$$

Здесь μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\operatorname{tg}(\mu a) = \dfrac{(k_1+k_2)\mu}{\mu^2 - k_1 k_2}$.

7.2.2-8. Область: $-\infty < x < \infty,\ 0 \leqslant y \leqslant a$. Смешанная краевая задача.

Рассматривается бесконечная полоса. Заданы граничные условия:

$$w = f_1(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \partial_y w = f_2(x) \quad \text{при} \quad y = a.$$

Решение:

$$w(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) \Bigl[\frac{\partial}{\partial \eta} G(x,y,\xi,\eta)\Bigr]_{\eta=0} d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\xi) G(x,y,\xi,a)\,d\xi + \\ + \int_0^a \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi,\eta) G(x,y,\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} \exp\bigl(-\mu_n|x-\xi|\bigr) \sin(\mu_n y) \sin(\mu_n \eta), \quad \mu_n = \frac{\pi(2n+1)}{2a}.$$

7.2.2-9. Область: $0 \leqslant x < \infty,\ 0 \leqslant y \leqslant a$. Первая краевая задача.

Рассматривается полубесконечная полоса. Заданы граничные условия:

$$w = f_1(y) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w = f_2(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad w = f_3(x) \quad \text{при} \quad y = a.$$

Решение:

$$w(x,y) = \int_0^a f_1(\eta) \Bigl[\frac{\partial}{\partial \xi} G(x,y,\xi,\eta)\Bigr]_{\xi=0} d\eta + \int_0^{\infty} f_2(\xi) \Bigl[\frac{\partial}{\partial \eta} G(x,y,\xi,\eta)\Bigr]_{\eta=0} d\xi - \\ - \int_0^{\infty} f_3(\xi) \Bigl[\frac{\partial}{\partial \eta} G(x,y,\xi,\eta)\Bigr]_{\eta=a} d\xi + \int_0^a \int_0^{\infty} \Phi(\xi,\eta) G(x,y,\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta)=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\operatorname{ch}[\pi(x-\xi)/a]-\cos[\pi(y+\eta)/a]}{\operatorname{ch}[\pi(x-\xi)/a]-\cos[\pi(y-\eta)/a]}-\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\operatorname{ch}[\pi(x+\xi)/a]-\cos[\pi(y+\eta)/a]}{\operatorname{ch}[\pi(x+\xi)/a]-\cos[\pi(y-\eta)/a]}.$$

Другое представление для функции Грина в виде ряда:

$$G(x,y,\xi,\eta)=\frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{q_n}\bigl[\exp\bigl(-q_n|x-\xi|\bigr)-\exp\bigl(-q_n|x+\xi|\bigr)\bigr]\sin(q_ny)\sin(q_n\eta),\qquad q_n=\frac{\pi n}{a}.$$

⊙ *Литература*: Н. Н. Лебедев, И. П. Скальская, Я. С. Уфлянд (1955, стр. 34–35), А. Г. Бутковский (1979, стр. 129).

7.2.2-10. Область: $0\leqslant x<\infty,\ 0\leqslant y\leqslant a$. Третья краевая задача.

Рассматривается полубесконечная полоса. Заданы граничные условия:

$\partial_x w-k_1w=f_1(y)$ при $x=0$, $\partial_y w-k_2w=f_2(x)$ при $y=0$, $\partial_y w+k_3w=f_3(x)$ при $y=a$.

Решение:

$$w(x,y)=\int_0^a\!\int_0^\infty\Phi(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta-\int_0^a f_1(\eta)G(x,y,0,\eta)\,d\eta-$$
$$-\int_0^\infty f_2(\xi)G(x,y,\xi,0)\,d\xi+\int_0^\infty f_3(\xi)G(x,y,\xi,a)\,d\xi,$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(y)\varphi_n(\eta)}{\|\varphi_n\|^2\mu_n(\mu_n+k_1)}H_n(x,\xi),$$

$$\varphi_n(y)=\mu_n\cos(\mu_ny)+k_2\sin(\mu_ny),\qquad \|\varphi_n\|^2=\frac{1}{2}(\mu_n^2+k_2^2)\Bigl[a+\frac{(k_2+k_3)(\mu_n^2+k_2k_3)}{(\mu_n^2+k_2^2)(\mu_n^2+k_3^2)}\Bigr],$$

$$H_n(x,\xi)=\begin{cases}\exp(-\mu_nx)\bigl[\mu_n\operatorname{ch}(\mu_n\xi)+k_1\operatorname{sh}(\mu_n\xi)\bigr] & \text{при } x>\xi,\\ \exp(-\mu_n\xi)\bigl[\mu_n\operatorname{ch}(\mu_nx)+k_1\operatorname{sh}(\mu_nx)\bigr] & \text{при } \xi>x.\end{cases}$$

Здесь μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\operatorname{tg}(\mu a)=\dfrac{(k_2+k_3)\mu}{\mu^2-k_2k_3}$.

7.2.2-11. Область: $0\leqslant x<\infty,\ 0\leqslant y\leqslant a$. Смешанные краевые задачи.

1°. Рассматривается полубесконечная полоса. Заданы граничные условия:

$w=f_1(y)$ при $x=0$, $\partial_y w=f_2(x)$ при $y=0$, $\partial_y w=f_3(x)$ при $y=a$.

Решение:

$$w(x,y)=\int_0^a f_1(\eta)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,\xi,\eta)\Bigr]_{\xi=0}d\eta-\int_0^\infty f_2(\xi)G(x,y,\xi,0)\,d\xi+$$
$$+\int_0^\infty f_3(\xi)G(x,y,\xi,a)\,d\xi+\int_0^a\!\int_0^\infty\Phi(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta)=\frac{1}{2a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{q_n}\bigl[\exp\bigl(-q_n|x-\xi|\bigr)-\exp\bigl(-q_n|x+\xi|\bigr)\bigr]\cos(q_ny)\cos(q_n\eta),$$

$$q_n=\frac{\pi n}{a},\qquad \varepsilon=\begin{cases}1 & \text{при } n=0,\\ 2 & \text{при } n\neq0.\end{cases}$$

2°. Рассматривается полубесконечная полоса. Заданы граничные условия:

$\partial_x w=f_1(y)$ при $x=0$, $w=f_2(x)$ при $y=0$, $w=f_3(x)$ при $y=a$.

Решение:

$$w(x,y)=-\int_0^a f_1(\eta)G(x,y,0,\eta)\,d\eta+\int_0^\infty f_2(\xi)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,\xi,\eta)\Bigr]_{\eta=0}d\xi-$$
$$-\int_0^\infty f_3(\xi)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,\xi,\eta)\Bigr]_{\eta=a}d\xi+\int_0^a\!\int_0^\infty\Phi(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta)=\frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{q_n}\bigl[\exp\bigl(-q_n|x-\xi|\bigr)+\exp\bigl(-q_n|x+\xi|\bigr)\bigr]\sin(q_ny)\sin(q_n\eta),\qquad q_n=\frac{\pi n}{a}.$$

7.2.2-12. Область: $0 \leqslant x < \infty,\ 0 \leqslant y < \infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается четверть плоскости. Заданы граничные условия:

$$w = f_1(y) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w = f_2(x) \quad \text{при} \quad y = 0.$$

Решение:

$$w(x,y) = \frac{4}{\pi} xy \int_0^\infty \frac{f_1(\eta)\eta\, d\eta}{[x^2+(y-\eta)^2]\,[x^2+(y+\eta)^2]} + \frac{4}{\pi} xy \int_0^\infty \frac{f_2(\xi)\xi\, d\xi}{[(x-\xi)^2+y^2]\,[(x+\xi)^2+y^2]} +$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(\xi,\eta) \ln \frac{\sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}\sqrt{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2}}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\sqrt{(x+\xi)^2+(y+\eta)^2}}\, d\xi\, d\eta.$$

⊙ *Литература*: В. С. Владимиров, В. П. Михайлов, А. А. Вашарин и др. (1974, стр. 199, 202), А. Г. Бутковский (1979, стр. 130).

7.2.2-13. Область: $0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b$. Первая краевая задача.

Рассматривается прямоугольная область. Заданы граничные условия:

$$\begin{aligned} w &= f_1(y) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad & w &= f_2(y) \quad \text{при} \quad x = a,\\ w &= f_3(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad & w &= f_4(x) \quad \text{при} \quad y = b. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(x,y) &= \int_0^a \int_0^b \Phi(\xi,\eta) G(x,y,\xi,\eta)\, d\eta\, d\xi +\\ &+ \int_0^b f_1(\eta) \Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi} G(x,y,\xi,\eta)\Bigr]_{\xi=0} d\eta - \int_0^b f_2(\eta) \Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi} G(x,y,\xi,\eta)\Bigr]_{\xi=a} d\eta +\\ &+ \int_0^a f_3(\xi) \Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta} G(x,y,\xi,\eta)\Bigr]_{\eta=0} d\xi - \int_0^a f_4(\xi) \Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta} G(x,y,\xi,\eta)\Bigr]_{\eta=b} d\xi. \end{aligned}$$

Две формы представления для функции Грина:

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(p_n x)\sin(p_n \xi)}{p_n \operatorname{sh}(p_n b)} H_n(y,\eta) = \frac{2}{b} \sum_{m=1}^\infty \frac{\sin(q_m y)\sin(q_m \eta)}{q_m \operatorname{sh}(q_m a)} Q_m(x,\xi),$$

где

$$p_n = \frac{\pi n}{a}, \quad H_n(y,\eta) = \begin{cases} \operatorname{sh}(p_n\eta)\operatorname{sh}\bigl[p_n(b-y)\bigr] & \text{при } b \geqslant y > \eta \geqslant 0,\\ \operatorname{sh}(p_n y)\operatorname{sh}\bigl[p_n(b-\eta)\bigr] & \text{при } b \geqslant \eta > y \geqslant 0, \end{cases}$$
$$q_m = \frac{\pi m}{b}, \quad Q_m(x,\xi) = \begin{cases} \operatorname{sh}(q_m\xi)\operatorname{sh}\bigl[q_m(a-x)\bigr] & \text{при } a \geqslant x > \xi \geqslant 0,\\ \operatorname{sh}(q_m x)\operatorname{sh}\bigl[q_m(a-\xi)\bigr] & \text{при } a \geqslant \xi > x \geqslant 0. \end{cases}$$

Функция Грина в виде двойного ряда:

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{4}{ab} \sum_{n=1}^\infty \sum_{m=1}^\infty \frac{\sin(p_n x)\sin(q_m y)\sin(p_n\xi)\sin(q_m\eta)}{p_n^2+q_m^2}, \qquad p_n = \frac{\pi n}{a}, \quad q_m = \frac{\pi m}{b}.$$

⊙ *Литература*: А. Г. Бутковский (1979, стр. 126).

7.2.2-14. Область: $0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b$. Третья краевая задача.

Рассматривается прямоугольная область. Заданы граничные условия:

$$\begin{aligned} \partial_x w - k_1 w &= f_1(y) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad & \partial_x w + k_2 w &= f_2(y) \quad \text{при} \quad x = a,\\ \partial_y w - k_3 w &= f_3(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad & \partial_y w + k_4 w &= f_4(x) \quad \text{при} \quad y = b. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(x,y) &= \int_0^a \int_0^b \Phi(\xi,\eta) G(x,y,\xi,\eta)\, d\eta\, d\xi -\\ &- \int_0^b f_1(\eta) G(x,y,0,\eta)\, d\eta + \int_0^b f_2(\eta) G(x,y,a,\eta)\, d\eta -\\ &- \int_0^a f_3(\xi) G(x,y,\xi,0)\, d\xi + \int_0^a f_4(\xi) G(x,y,\xi,b)\, d\xi. \end{aligned}$$

Здесь

$$G(x,y,\xi,\eta) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)\psi_m(y)\psi_m(\eta)}{\|\varphi_n\|^2\|\psi_m\|^2(\mu_n^2+\lambda_m^2)},$$

$$\varphi_n(x) = \cos(\mu_n x) + \frac{k_1}{\mu_n}\sin(\mu_n x), \quad \|\varphi_n\|^2 = \frac{k_2}{2\mu_n^2}\frac{\mu_n^2+k_1^2}{\mu_n^2+k_2^2} + \frac{k_1}{2\mu_n^2} + \frac{a}{2}\Bigl(1+\frac{k_1^2}{\mu_n^2}\Bigr),$$

$$\psi_m(y) = \cos(\lambda_m y) + \frac{k_3}{\lambda_m}\sin(\lambda_m y), \quad \|\psi_m\|^2 = \frac{k_4}{2\lambda_m^2}\frac{\lambda_m^2+k_3^2}{\lambda_m^2+k_4^2} + \frac{k_3}{2\lambda_m^2} + \frac{b}{2}\Bigl(1+\frac{k_3^2}{\lambda_m^2}\Bigr),$$

где μ_n и λ_m — положительные корни трансцендентных уравнений

$$\frac{\operatorname{tg}(\mu a)}{\mu} = \frac{k_1+k_2}{\mu^2-k_1k_2}, \qquad \frac{\operatorname{tg}(\lambda b)}{\lambda} = \frac{k_3+k_4}{\lambda^2-k_3k_4}.$$

7.2.2-15. Область: $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$. Смешанная краевая задача.

Рассматривается прямоугольная область. Заданы граничные условия:

$$w = f_1(y) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad \partial_x w = f_2(y) \quad \text{при} \quad x = a,$$
$$w = f_3(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \partial_y w = f_4(x) \quad \text{при} \quad y = b.$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(x,y) &= \int_0^a\int_0^b \Phi(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta)\,d\eta\,d\xi + \\ &+ \int_0^b f_1(\eta)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,\xi,\eta)\Bigr]_{\xi=0}d\eta + \int_0^b f_2(\eta)G(x,y,a,\eta)\,d\eta + \\ &+ \int_0^a f_3(\xi)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,\xi,\eta)\Bigr]_{\eta=0}d\xi + \int_0^a f_4(\xi)G(x,y,\xi,b)\,d\xi. \end{aligned}$$

Две формы представления для функции Грина:

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{2}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(p_n x)\sin(p_n\xi)}{p_n\operatorname{ch}(p_n b)}H_n(y,\eta) = \frac{2}{b}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin(q_m y)\sin(q_m\eta)}{q_m\operatorname{ch}(q_m a)}Q_m(x,\xi),$$

где

$$p_n = \frac{\pi(2n+1)}{a}, \quad H_n(y,\eta) = \begin{cases} \operatorname{sh}(p_n\eta)\operatorname{ch}\bigl[p_n(b-y)\bigr] & \text{при } b \geqslant y > \eta \geqslant 0, \\ \operatorname{sh}(p_n y)\operatorname{ch}\bigl[p_n(b-\eta)\bigr] & \text{при } b \geqslant \eta > y \geqslant 0, \end{cases}$$

$$q_m = \frac{\pi(2m+1)}{b}, \quad Q_m(x,\xi) = \begin{cases} \operatorname{sh}(q_m\xi)\operatorname{ch}\bigl[q_m(a-x)\bigr] & \text{при } a \geqslant x > \xi \geqslant 0, \\ \operatorname{sh}(q_m x)\operatorname{ch}\bigl[q_m(a-\xi)\bigr] & \text{при } a \geqslant \xi > x \geqslant 0. \end{cases}$$

Функция Грина в виде двойного ряда:

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{4}{ab}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin(p_n x)\sin(q_m y)\sin(p_n\xi)\sin(q_m\eta)}{p_n^2+q_m^2},$$
$$p_n = \frac{\pi(2n+1)}{2a}, \quad q_m = \frac{\pi(2m+1)}{2b}.$$

7.2.3. Задачи в полярной системе координат

Уравнение Пуассона в полярной системе координат имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Bigl(r\frac{\partial w}{\partial r}\Bigr) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2} + \Phi(r,\varphi) = 0, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

7.2.3-1. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Первая краевая задача.

Рассматривается круг. Задано граничное условие:

$$w = f(\varphi) \quad \text{при} \quad r = R.$$

Решение:

$$w(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\eta)\frac{R^2-r^2}{r^2-2Rr\cos(\varphi-\eta)+R^2}\,d\eta+\int_0^{2\pi}\int_0^R \Phi(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta)\xi\,d\xi\,d\eta,$$

где

$$G(r,\varphi,\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{r_0|(R/r_0)^2\mathbf{r}_0-\mathbf{r}|},$$

$$\mathbf{r}=\{x,y\},\qquad x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,$$

$$\mathbf{r}_0=\{x_0,y_0\},\quad x_0=\xi\cos\eta,\quad y_0=\xi\sin\eta.$$

Модули векторных величин вычисляются так: $|a\mathbf{r}-b\mathbf{r}_0|^2=a^2r^2-2abr\xi\cos(\varphi-\eta)+b^2\xi^2$ (a, b — любые). В результате получим

$$G(r,\varphi,\xi,\eta)=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{r^2\xi^2-2R^2r\xi\cos(\varphi-\eta)+R^4}{R^2\big[r^2-2r\xi\cos(\varphi-\eta)+\xi^2\big]}.$$

⊙ *Литература*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 109), А. Г. Бутковский (1979, стр. 127).

7.2.3-2. Область: $0\leqslant r\leqslant R$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$. Третья краевая задача.

Рассматривается круг. Задано граничное условие:

$$\partial_r w+kw=f(\varphi)\quad\text{при}\quad r=R.$$

Решение:

$$w(r,\varphi)=R\int_0^{2\pi} f(\eta)G(r,\varphi,R,\eta)\,d\eta+\int_0^{2\pi}\int_0^R \Phi(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta)\xi\,d\xi\,d\eta,$$

где

$$G(r,\varphi,\xi,\eta)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_nJ_n(\mu_{nm}r)J_n(\mu_{nm}\xi)}{(\mu_{nm}^2R^2+k^2R^2-n^2)[J_n(\mu_{nm}R)]^2}\cos\big[n(\varphi-\eta)\big],$$

$$A_0=1,\quad A_n=2\quad(n=1,\,2,\,\ldots).$$

Здесь $J_n(\xi)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\mu J_n'(\mu R)+kJ_n(\mu R)=0.$$

7.2.3-3. Область: $R\leqslant r<\infty$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$. Первая краевая задача.

Рассматривается внешняя область круга. Задано граничное условие:

$$w=f(\varphi)\quad\text{при}\quad r=R.$$

Решение:

$$w(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\eta)\frac{r^2-R^2}{r^2-2Rr\cos(\varphi-\eta)+R^2}\,d\eta+\int_0^{2\pi}\int_R^\infty \Phi(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta)\xi\,d\xi\,d\eta,$$

где функция Грина $G(r,\varphi,\xi,\eta)$ определяется по формуле, указанной в разд. 7.2.3-1.

⊙ *Литература*: А. Г. Бутковский (1979, стр. 129).

7.2.3-4. Область: $R_1\leqslant r\leqslant R_2$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$. Первая краевая задача.

Рассматривается кольцевая область. Заданы граничные условия:

$$w=f_1(\varphi)\quad\text{при}\quad r=R_1,\qquad w=f_2(\varphi)\quad\text{при}\quad r=R_2.$$

Решение:

$$w(r,\varphi)=R_1\int_0^{2\pi} f_1(\eta)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,\xi,\eta)\Big]_{\xi=R_1}d\eta-R_2\int_0^{2\pi} f_2(\eta)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,\xi,\eta)\Big]_{\xi=R_2}d\eta+$$
$$+\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\Phi(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta)\xi\,d\xi\,d\eta.$$

Здесь

$$G(r,\varphi,\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\Bigl(\ln\frac{1}{r_n} - \ln\frac{R_1}{\xi r_n^*}\Bigr),$$

где

$$r_n^2 = r^2 + \rho_n^2 - 2r\rho_n\cos(\varphi-\eta), \quad (r_n^*)^2 = r^2 + (\rho_n^*)^2 - 2r\rho_n^*\cos(\varphi-\eta),$$

$$\rho_n = \begin{cases} (R_1/R_2)^{2k}\xi & \text{при } n=2k, \\ (R_2/R_1)^{2k+2}\xi & \text{при } n=2k+1, \end{cases} \qquad \rho_n^* = \frac{R_1^2}{\rho_n}.$$

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 372).

7.2.3-5. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Первая краевая задача.

Рассматривается полукруг. Заданы граничные условия:

$$w = f_1(\varphi) \quad \text{при} \quad r=R, \qquad w = f_2(r) \quad \text{при} \quad \varphi = 0, \qquad w = f_3(r) \quad \text{при} \quad \varphi = \pi.$$

Решение:

$$w(r,\varphi) = -R\int_0^{\pi} f_1(\eta)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,\xi,\eta)\Bigr]_{\xi=R}d\eta + \int_0^R f_2(\xi)\frac{1}{\xi}\Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,\varphi,\xi,\eta)\Bigr]_{\eta=0}d\xi -$$
$$-\int_0^R f_3(\xi)\frac{1}{\xi}\Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,\varphi,\xi,\eta)\Bigr]_{\eta=\pi}d\xi + \int_0^{\pi}\int_0^R \Phi(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta)\xi\,d\xi\,d\eta,$$

где

$$G(r,\varphi,\xi,\eta) = \frac{1}{4\pi}\ln\frac{r^2\xi^2 - 2R^2r\xi\cos(\varphi-\eta) + R^4}{R^2\bigl[r^2 - 2r\xi\cos(\varphi-\eta) + \xi^2\bigr]} - \frac{1}{4\pi}\ln\frac{r^2\xi^2 - 2R^2r\xi\cos(\varphi+\eta) + R^4}{R^2\bigl[r^2 - 2r\xi\cos(\varphi+\eta) + \xi^2\bigr]}.$$

См. также разд. 7.2.4-2, пример 2.

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 370), В. С. Владимиров, В. П. Михайлов, А. А. Вашарин и др. (1974, стр. 199, 202).

7.2.3-6. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$. Первая краевая задача.

Рассматривается четверть круга. Заданы граничные условия:

$$w = f_1(\varphi) \quad \text{при} \quad r=R, \qquad w = f_2(r) \quad \text{при} \quad \varphi = 0, \qquad w = f_3(r) \quad \text{при} \quad \varphi = \pi/2.$$

Решение:

$$w(r,\varphi) = -R\int_0^{\pi/2} f_1(\eta)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,\xi,\eta)\Bigr]_{\xi=R}d\eta + \int_0^R f_2(\xi)\frac{1}{\xi}\Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,\varphi,\xi,\eta)\Bigr]_{\eta=0}d\xi -$$
$$-\int_0^R f_3(\xi)\frac{1}{\xi}\Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,\varphi,\xi,\eta)\Bigr]_{\eta=\pi/2}d\xi + \int_0^{\pi/2}\int_0^R \Phi(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta)\xi\,d\xi\,d\eta,$$

где

$$G(r,\varphi,\xi,\eta) = G_1(r,\varphi,\xi,\eta) - G_1(r,\varphi,\xi,2\pi-\eta) - G_1(r,\varphi,\xi,\pi-\eta) + G_1(r,\varphi,\xi,\pi+\eta),$$
$$G_1(r,\varphi,\xi,\eta) = \frac{1}{4\pi}\ln\frac{r^2\xi^2 - 2R^2r\xi\cos(\varphi-\eta) + R^4}{R^2\bigl[r^2 - 2r\xi\cos(\varphi-\eta) + \xi^2\bigr]}.$$

См. также разд. 7.2.4-2, пример 3.

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 370), В. С. Владимиров, В. П. Михайлов, А. А. Вашарин и др. (1974, стр. 199, 202).

7.2.3-7. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \beta$. Первая краевая задача.

Рассматривается сектор круга. Заданы граничные условия:

$$w = f_1(\varphi) \quad \text{при} \quad r=R, \qquad w = f_2(r) \quad \text{при} \quad \varphi = 0, \qquad w = f_3(r) \quad \text{при} \quad \varphi = \beta.$$

Решение:

$$w(r,\varphi) = -R\int_0^{\beta} f_1(\eta)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,\xi,\eta)\Bigr]_{\xi=R}d\eta + \int_0^R f_2(\xi)\frac{1}{\xi}\Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,\varphi,\xi,\eta)\Bigr]_{\eta=0}d\xi -$$
$$-\int_0^R f_3(\xi)\frac{1}{\xi}\Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,\varphi,\xi,\eta)\Bigr]_{\eta=\beta}d\xi + \int_0^{\beta}\int_0^R \Phi(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta)\xi\,d\xi\,d\eta.$$

1°. Функция Грина при $\beta = \pi/n$, где n — положительное целое число:

$$G(r,\varphi,\xi,\eta) = \sum_{k=0}^{n-1} \bigl[G_1(r,\varphi,\xi,2k\beta+\eta) - G_1(r,\varphi,\xi,2k\beta-\eta)\bigr],$$

$$G_1(r,\varphi,\xi,\eta) = \frac{1}{4\pi}\ln\frac{r^2\xi^2 - 2R^2r\xi\cos(\varphi-\eta) + R^4}{R^2\bigl[r^2 - 2r\xi\cos(\varphi-\eta)+\xi^2\bigr]}.$$

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 370).

2°. Функция Грина при произвольном β:

$$G(r,\varphi,\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\bigl|z^{\pi/\beta} - \bar\zeta^{\pi/\beta}\bigr|\bigl|R^{2\pi/\beta} - (\bar\zeta z)^{\pi/\beta}\bigr|}{\bigl|z^{\pi/\beta} - \zeta^{\pi/\beta}\bigr|\bigl|R^{2\pi/\beta} - (\zeta z)^{\pi/\beta}\bigr|},$$

где $z = re^{i\varphi}$, $\zeta = \xi e^{i\eta}$, $\bar\zeta = \xi e^{-i\eta}$, $i^2 = -1$.

7.2.3-8. Область: $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \beta$. Первая краевая задача.

Рассматривается клиновидная область. Заданы граничные условия:

$$w = f_1(r) \quad \text{при} \quad \varphi = 0, \qquad w = f_2(r) \quad \text{при} \quad \varphi = \beta.$$

Решение:

$$w(r,\varphi) = \int_0^\infty f_1(\xi)\frac{1}{\xi}\Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,\varphi,\xi,\eta)\Bigr]_{\eta=0} d\xi - \int_0^\infty f_2(\xi)\frac{1}{\xi}\Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta}G(r,\varphi,\xi,\eta)\Bigr]_{\eta=\beta} d\xi + {}$$
$$+ \int_0^\beta\!\!\int_0^\infty \Phi(\xi,\eta)G(r,\varphi,\xi,\eta)\xi\,d\xi\,d\eta,$$

где

$$G(r,\varphi,\xi,\eta) = \frac{1}{4\pi}\ln\frac{r^{2\pi/\beta} - 2(r\xi)^{\pi/\beta}\cos\bigl[\pi(\varphi+\eta)/\beta\bigr] + \xi^{2\pi/\beta}}{r^{2\pi/\beta} - 2(r\xi)^{\pi/\beta}\cos\bigl[\pi(\varphi-\eta)/\beta\bigr] + \xi^{2\pi/\beta}}.$$

Комплексная форма представления функции Грина:

$$G(r,\varphi,\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\bigl|z^{\pi/\beta} - \bar\zeta^{\pi/\beta}\bigr|}{\bigl|z^{\pi/\beta} - \zeta^{\pi/\beta}\bigr|}, \qquad z = re^{i\varphi}, \quad \zeta = \xi e^{i\eta}, \quad \bar\zeta = \xi e^{-i\eta}, \quad i^2 = -1.$$

7.2.4. Область произвольной формы. Метод конформных отображений

7.2.4-1. Описание метода. Таблицы конформных отображений.

Всякую плоскую односвязную область D в плоскости xy, ограниченную кусочно-гладкой кривой, можно с помощью конформного отображения взаимно однозначно отобразить на верхнюю полуплоскость или на единичный круг в плоскости uv. При конформном отображении уравнение Пуассона в плоскости xy переходит в уравнение Пуассона в плоскости uv (при таком преобразовании в уравнении изменится функция Φ и в граничном условии — функция f). В результате первая и вторая краевые задачи для плоской области D сводятся соответственно к первой и второй краевым задачам для верхней полуплоскости или круга, которые рассмотрены ранее.

Значительное число конформных отображений (т. е. осуществляемых аналитическими функциями) областей различной формы на верхнюю полуплоскость или круг единичного радиуса можно найти в книгах В. И. Лаврика, В. Н. Савенкова (1970) и М. А. Лаврентьева, Б. В. Шабата (1973) [см. также V. I. Ivanov, M. K. Trubetskov (1994)].

В табл. 22 приведены конформные отображения некоторых областей D в комплексной z-плоскости на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\omega \geqslant 0$ комплексной ω-плоскости. В формулах, содержащих квадратные корни, полагается $\sqrt{\zeta} = \sqrt{|\zeta|}\,\bigl[\cos(\frac{1}{2}\varphi) + i\sin(\frac{1}{2}\varphi)\bigr]$, где $\varphi = \arg\zeta$ (т. е. берется первая ветвь функции $\sqrt{\zeta}$).

В табл. 23 приведены конформные отображения некоторых областей D в комплексной z-плоскости на единичный круг $|\omega| \leqslant 1$ комплексной ω-плоскости.

ТАБЛИЦА 22
Конформные отображения некоторых областей D в z-плоскости на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\omega \geqslant 0$. Обозначения: $z = x + iy$, $\omega = u + iv$.

№	Область D в z-плоскости	Преобразование
1	Первый квадрант: $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$	$\omega = a^2 z^2 + b$, a, b — действительные числа
2	Бесконечная полоса шириной a: $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant y \leqslant a$	$\omega = \exp(\pi z/a)$
3	Полубесконечная полоса шириной a: $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y \leqslant a$	$\omega = \operatorname{ch}(\pi z/a)$
4	Плоскость с разрезом вдоль действительной оси	$\omega = \sqrt{z}$
5	Область внутри угла с раствором β: $0 \leqslant \arg z \leqslant \beta$, $0 \leqslant \lvert z\rvert < \infty$ $(0 < \beta \leqslant 2\pi)$	$\omega = z^{\pi/\beta}$
6	Верхняя половина круга радиуса a: $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $y \geqslant 0$	$\omega = -\dfrac{z}{a} - \dfrac{a}{z}$
7	Четверть круга радиуса a: $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$	$\omega = -\dfrac{z^2}{a^2} - \dfrac{a^2}{z^2}$
8	Сектор круга радиуса a с углом β: $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \beta$	$\omega = -\left(\dfrac{z}{a}\right)^{\pi/\beta} - \left(\dfrac{a}{z}\right)^{\pi/\beta}$
9	Верхняя полуплоскость, из которой удалена область круга радиуса a: $y \geqslant 0$, $x^2 + y^2 \geqslant a^2$	$\omega = \dfrac{z}{a} + \dfrac{a}{z}$
10	Внешность параболы: $y^2 - 2px \geqslant 0$	$\omega = \sqrt{z - \frac{1}{2}p} - i\sqrt{\frac{1}{2}p}$
11	Внутренность параболы: $y^2 - 2px \leqslant 0$	$\omega = i\operatorname{ch}\left(\pi\sqrt{\frac{1}{2}z/p - \frac{1}{4}}\right)$

7.2.4-2. Общие формулы для функций Грина. Примеры решения краевых задач.

Пусть функция $\omega = \omega(z)$ осуществляет конформное отображение области D комплексной плоскости z на верхнюю полуплоскость в комплексной плоскости ω. Тогда функция Грина первой краевой задачи в области D для уравнения Пуассона (Лапласа) дается формулой

$$G(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \ln\left|\frac{\omega(z) - \bar{\omega}(\zeta)}{\omega(z) - \omega(\zeta)}\right|, \qquad z = x + iy, \quad \zeta = \xi + i\eta, \tag{1}$$

где $\omega(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $\bar{\omega}(z) = u(x, y) - iv(x, y)$.

Решение первой краевой задачи для уравнения Пуассона определяется с помощью функции Грина по формуле, которая указана в разд. 7.2.1-1.

Пример 1. Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения Пуассона в полосе $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant y \leqslant a$. Функция, конформно отображающая эту полосу на верхнюю полуплоскость, имеет вид $\omega(z) = \exp(\pi z/a)$ (см. вторую строку табл. 22). Подставляя данное выражение в формулу (1), после элементарных преобразований получим функцию Грина

$$G(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\operatorname{ch}[\pi(x - \xi)/a] - \cos[\pi(y + \eta)/a]}{\operatorname{ch}[\pi(x - \xi)/a] - \cos[\pi(y - \eta)/a]}.$$

Пример 2. Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения Пуассона для полукруга радиуса a, когда $D = \{x^2 + y^2 \leqslant a^2,\ y \geqslant 0\}$. Функция, конформно отображающая область D на верхнюю полуплоскость, имеет вид $\omega(z) = -(z/a + a/z)$ (см. шестую строку табл. 22). Подставляя данное

ТАБЛИЦА 23

Конформные отображения некоторых областей D в z-плоскости на единичный круг $|\omega| \leqslant 1$. Обозначения: $z = x + iy$, $\omega = u + iv$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $\bar{z}_0 = x_0 - iy_0$.

№	Область D в z-плоскости	Преобразование
1	Верхняя полуплоскость: $-\infty < x < \infty,\ 0 \leqslant y < \infty$	$\omega = e^{i\lambda}\dfrac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$, λ — действительное число
2	Круг единичного радиуса: $x^2 + y^2 \leqslant 1$	$\omega = e^{i\lambda}\dfrac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$, λ — действительное число
3	Внешность круга радиуса a: $x^2 + y^2 \geqslant a^2$	$\omega = \dfrac{a}{z}$
4	Бесконечная полоса шириной a: $-\infty < x < \infty,\ 0 \leqslant y \leqslant a$	$\omega = \dfrac{\exp(\pi z/a) - \exp(\pi z_0/a)}{\exp(\pi z/a) - \exp(\pi \bar{z}_0/a)}$
5	Полукруг радиуса a: $x^2 + y^2 \leqslant a^2,\ x \geqslant 0$	$\omega = i\dfrac{z^2 + 2az - a^2}{z^2 - 2az - a^2}$
6	Сектор единичного круга с углом β: $\lvert z\rvert \leqslant 1,\ 0 \leqslant \arg z \leqslant \beta$	$\omega = \dfrac{(1 + z^{\pi/\beta})^2 - i(1 - z^{\pi/\beta})^2}{(1 + z^{\pi/\beta})^2 + i(1 - z^{\pi/\beta})^2}$
7	Внешность эллипса с полуосями a и b: $(x/a)^2 + (y/b)^2 \geqslant 1$	$z = \dfrac{1}{2}\left[(a - b)\omega + \dfrac{a + b}{\omega}\right]$

выражение в формулу (1), получим функцию Грина

$$G(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|z - \bar{\zeta}||a^2 - z\bar{\zeta}|}{|z - \zeta||a^2 - z\zeta|}, \qquad z = x + iy; \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

Пример 3. Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения Пуассона для четверти круга радиуса a, когда $D = \{x^2 + y^2 \leqslant a^2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$. Функция, конформно отображающая область D на верхнюю полуплоскость, имеет вид $\omega(z) = -(z/a)^2 - (a/z)^2$ (см. седьмую строку табл. 22). Подставляя данное выражение в формулу (1), получим функцию Грина

$$G(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|z^2 - \bar{\zeta}^2||a^4 - z^2\bar{\zeta}^2|}{|z^2 - \zeta^2||a^4 - z^2\zeta^2|}, \qquad z = x + iy, \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

3°. Пусть функция $\omega = \omega(z)$ осуществляет конформное отображение области D комплексной плоскости z на единичный круг $|\omega| \leqslant 1$ в комплексной плоскости ω. Тогда функция Грина первой краевой задачи в области D для уравнения Лапласа дается формулой

$$G(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \ln\left|\frac{1 - \bar{\omega}(\zeta)\omega(z)}{\omega(z) - \omega(\zeta)}\right|, \qquad z = x + iy, \quad \zeta = \xi + i\eta. \tag{2}$$

⊙ *Литература*: Н. Н. Лебедев, И. П. Скальская, Я. С. Уфлянд (1955, стр. 34), В. С. Владимиров (1971, стр. 463–465), А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов (1974, стр. 187–191).

7.3. Уравнение Гельмгольца $\Delta_2 w + \lambda w = -\Phi(\mathbf{x})$

К двумерному уравнению Гельмгольца при $\lambda > 0$ приводит широкий класс задач, связанных с установившимися колебаниями (механическими, акустическими, тепловыми, электромагнитными и др.). При $\lambda < 0$ это уравнение описывает процессы массопереноса с объемной химической реакцией первого порядка. К уравнению Гельмгольца приводится любое уравнение эллиптического типа с постоянными коэффициентами.

7.3.1. Общие замечания, результаты и формулы

7.3.1-1. Некоторые определения.

При $\Phi = 0$ уравнение Гельмгольца называется однородным, при $\Phi \neq 0$ — неоднородным. Однородной краевой задачей называется краевая задача для однородного уравнения с однородными краевыми условиями (частным решением однородной краевой задачи является $w = 0$).

Значения параметра $\lambda = \lambda_n$, при которых существуют нетривиальные (т. е. отличные от тождественного нуля) решения однородной краевой задачи, называются собственными значениями, а соответствующие им решения $w = w_n$ — собственными функциями данной краевой задачи.

Далее одновременно рассматриваются первая, вторая и третья краевые задачи для двумерного уравнения Гельмгольца в конечной двумерной области S с границей L. Для третьей краевой задачи с граничным условием

$$\frac{\partial w}{\partial N} + kw = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \in L$$

считается, что $k > 0$. Здесь $\dfrac{\partial w}{\partial N}$ — производная по внешней нормали к контуру L и использовано обозначение $\mathbf{r} = \{x, y\}$.

7.3.1-2. Свойства собственных значений и собственных функций.

1°. Существует бесконечное множество собственных значений $\{\lambda_n\}$, которое образует дискретный спектр данной краевой задачи.

2°. Все собственные значения положительны, за исключением собственных значений второй краевой задачи, для которой существует $\lambda_0 = 0$ (соответствующая собственная функция $w_0 = \text{const}$). Собственные значения будем располагать в порядке возрастания $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots$.

3°. Собственные значения стремятся к бесконечности с возрастанием их номера. Справедлива асимптотическая оценка:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n} = \frac{S_2}{4\pi},$$

где S_2 — площадь рассматриваемой двумерной области.

4°. Собственные функции $w_n = w_n(x, y)$ определены с точностью до постоянного множителя. Собственные функции, соответствующие разным собственным значениям $\lambda_n \neq \lambda_m$, ортогональны:

$$\int_S w_n w_m \, dS = 0.$$

5°. Всякая дважды непрерывно дифференцируемая функция $f = f(\mathbf{r})$, удовлетворяющая граничным условиям соответствующей краевой задачи, может быть разложена в равномерно сходящийся ряд по собственным функциям этой краевой задачи:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n w_n, \qquad \text{где} \quad f_n = \frac{1}{\|w_n\|^2} \int_S f w_n \, dS, \quad \|w_n\|^2 = \int_S w_n^2 \, dS.$$

Если f суммируема с квадратом, то ряд сходится в среднем.

6°. Собственные значения первой краевой задачи не возрастают при расширении области.

Замечание 1. В двумерной задаче каждому собственному значению λ_n вообще говоря соответствует конечное число линейно независимых собственных функций $w_n^{(1)}, w_n^{(2)}, \ldots, w_n^{(p)}$. Эти функции всегда можно заменить такими их линейными комбинациями

$$\bar{w}_n^{(j)} = c_{j,1} w_n^{(1)} + \cdots + c_{j,j-1} w_n^{(j-1)} + w_n^{(j)}, \qquad j = 1,\, 2,\, \ldots,\, p,$$

что $\bar{w}_n^{(1)}, \bar{w}_n^{(2)}, \ldots, \bar{w}_n^{(p)}$ будут уже попарно ортогональны. Поэтому без ограничения общности можно считать, что все собственные функции ортогональны.

⊙ *Литература*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 122–125).

7.3.1-3. Неоднородное уравнение Гельмгольца с однородными краевыми условиями.

Имеются три возможности:

1°. Если параметр λ не равен ни одному из собственных значений, то существует решение задачи, определяемое рядом

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\lambda_n - \lambda} w_n, \quad \text{где} \quad A_n = \frac{1}{\|w_n\|^2} \int_S \Phi w_n \, dS, \quad \|w_n\|^2 = \int_S w_n^2 \, dS.$$

2°. Если $\lambda = \lambda_m$, то условием существования решения неоднородной задачи будет условие ортогональности функции Φ к собственной функции w_m:

$$\int_S \Phi w_m \, dS = 0.$$

Решение в этом случае имеет вид

$$w = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{A_n}{\lambda_n - \lambda_m} w_n + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{A_n}{\lambda_n - \lambda_m} w_n + C w_m, \quad A_n = \frac{1}{\|w_n\|^2} \int_S \Phi w_n \, dS,$$

где $\|w_n\|^2 = \displaystyle\int_S w_n^2 \, dS$, C — произвольная постоянная.

3°. Если $\lambda = \lambda_m$ и $\displaystyle\int_S \Phi w_m \, dS \neq 0$, то краевая задача для неоднородного уравнения не имеет решения.

Замечание 2. Если каждому собственному значению λ_n соответствует p_n взаимно ортогональных собственных функций $w_n^{(j)}$ $(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ p_n)$, то при $\lambda \neq \lambda_n$ решение записывается так:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{p_n} \frac{A_n^{(j)}}{\lambda_n - \lambda} w_n^{(j)}, \quad \text{где} \quad A_n^{(j)} = \frac{1}{\|w_n^{(j)}\|^2} \int_S \Phi w_n^{(j)} \, dS, \quad \|w_n^{(j)}\|^2 = \int_S \bigl[w_n^{(j)}\bigr]^2 \, dS.$$

⊙ *Литература*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 146–147).

7.3.1-4. Решение неоднородных краевых задач общего вида.

1°. Решение первой краевой задачи для уравнения Гельмгольца с граничным условием

$$w = f(\mathbf{r}) \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \in L$$

может быть представлено в виде

$$w(\mathbf{r}) = \int_S \Phi(\boldsymbol{\rho}) G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) \, dS_\rho - \int_L f(\boldsymbol{\rho}) \frac{\partial}{\partial N_\rho} G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) \, dL_\rho. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{r} = \{x, y\}$, $\boldsymbol{\rho} = \{\xi, \eta\}$ $(\mathbf{r} \in S,\ \boldsymbol{\rho} \in S)$; $\frac{\partial}{\partial N_\rho}$ — производная по внешней нормали к контуру L, взятая относительно переменных ξ, η. Функция Грина дается рядом

$$G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n(\mathbf{r}) w_n(\boldsymbol{\rho})}{\|w_n\|^2 (\lambda_n - \lambda)}, \qquad \lambda \neq \lambda_n, \tag{2}$$

где w_n и λ_n — собственные функции и собственные значения однородной первой краевой задачи.

2°. Решение второй краевой задачи с граничным условием

$$\frac{\partial w}{\partial N} = f(\mathbf{r}) \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \in L$$

может быть представлено в виде

$$w(\mathbf{r}) = \int_S \Phi(\boldsymbol{\rho}) G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) \, dS_\rho + \int_L f(\boldsymbol{\rho}) G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) \, dL_\rho. \tag{3}$$

Здесь функция Грина дается рядом

$$G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) = -\frac{1}{S_2 \lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n(\mathbf{r}) w_n(\boldsymbol{\rho})}{\|w_n\|^2 (\lambda_n - \lambda)}, \qquad \lambda \neq \lambda_n, \tag{4}$$

где S_2 — площадь рассматриваемой двумерной области, а λ_n и w_n — положительные собственные значения и соответствующие собственные функции однородной второй краевой задачи. В формуле (4) для наглядности выделено слагаемое, соответствующее нулевому собственному значению $\lambda_0 = 0$ $(w_0 = \text{const})$.

3°. Решение третьей краевой задачи для уравнения Гельмгольца с граничным условием

$$\frac{\partial w}{\partial N} + kw = f(\mathbf{r}) \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \in L$$

дается формулой (3), где функция Грина представлена рядом (2), в который входят собственные функции w_n и собственные значения λ_n однородной третьей краевой задачи.

7.3.1-5. Граничные условия на бесконечности в случае неограниченной области.

Ниже считается, что функция Φ финитна или достаточно быстро затухает при $r \to \infty$.

1°. При $\lambda < 0$ в случае неограниченной области выставляется дополнительное условие затухания решения на бесконечности

$$w \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty.$$

2°. При $\lambda > 0$ в случае неограниченной области часто используются условия излучения (условия Зоммерфельда) на бесконечности, которые в двумерных задачах имеют вид:

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\, w = \text{const}, \qquad \lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\Big(\frac{\partial w}{\partial r} + i\sqrt{\lambda}\, w\Big) = 0,$$

где $i^2 = -1$.

Для выделения единственного решения используют также принцип предельного поглощения и принцип предельной амплитуды.

⊙ *Литература*: А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972, стр. 501–510).

7.3.2. Задачи в декартовой системе координат

Двумерное неоднородное уравнение Гельмгольца в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \lambda w = -\Phi(x,y).$$

7.3.2-1. Частные решения и некоторые формулы.

1°. Частные решения однородного уравнения (при $\Phi \equiv 0$):

$$\begin{aligned}
&w = (Ax+B)(C\cos\mu y + D\sin\mu y), && \lambda = \mu^2,\\
&w = (Ax+B)(C\operatorname{ch}\mu y + D\operatorname{sh}\mu y), && \lambda = -\mu^2,\\
&w = (A\cos\mu x + B\sin\mu x)(Cy+D), && \lambda = \mu^2,\\
&w = (A\operatorname{ch}\mu x + B\operatorname{sh}\mu x)(Cy+D), && \lambda = -\mu^2,\\
&w = (A\cos\mu_1 x + B\sin\mu_1 x)(C\cos\mu_2 y + D\sin\mu_2 y), && \lambda = \mu_1^2 + \mu_2^2,\\
&w = (A\cos\mu_1 x + B\sin\mu_1 x)(C\operatorname{ch}\mu_2 y + D\operatorname{sh}\mu_2 y), && \lambda = \mu_1^2 - \mu_2^2,\\
&w = (A\operatorname{ch}\mu_1 x + B\operatorname{sh}\mu_1 x)(C\cos\mu_2 y + D\sin\mu_2 y), && \lambda = -\mu_1^2 + \mu_2^2,\\
&w = (A\operatorname{ch}\mu_1 x + B\operatorname{sh}\mu_1 x)(C\operatorname{ch}\mu_2 y + D\operatorname{sh}\mu_2 y), && \lambda = -\mu_1^2 - \mu_2^2,
\end{aligned}$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные.

2°. Фундаментальные решения:

$$\begin{aligned}
&\mathscr{E}(x,y) = \frac{1}{2\pi}K_0(sr) && \text{при} \quad \lambda = -s^2 < 0,\\
&\mathscr{E}(x,y) = \frac{i}{4}H_0^{(1)}(kr) && \text{при} \quad \lambda = k^2 > 0,\\
&\mathscr{E}(x,y) = -\frac{i}{4}H_0^{(2)}(kr) && \text{при} \quad \lambda = k^2 > 0,
\end{aligned}$$

где $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $K_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода, $H_0^{(1)}(z)$ и $H_0^{(2)}(z)$ — функции Ханкеля нулевого порядка первого и второго рода, x_0 и y_0 — произвольные постоянные, $i^2 = -1$. Главный член асимптотического разложения фундаментальных решений при $r \to 0$ имеет вид $\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$.

3°. Пусть $w = w(x, y)$ — некоторое решение однородного уравнения Гельмгольца. Тогда функции

$$w_1 = w(x + C_1, \pm y + C_2),$$
$$w_2 = w(-x + C_1, \pm y + C_2),$$
$$w_3 = w(x\cos\theta + y\sin\theta + C_1,\ -x\sin\theta + y\cos\theta + C_2),$$

где C_1, C_2, θ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

⊙ *Литература*: А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972, стр. 497–498).

7.3.2-2. Область: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$.

1°. Решение при $\lambda = -s^2 < 0$:

$$w(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi, \eta)K_0(s\varrho)\,d\xi\,d\eta, \qquad \varrho = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}.$$

2°. Решение при $\lambda = k^2 > 0$:

$$w(x, y) = -\frac{i}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi, \eta)H_0^{(2)}(k\varrho)\,d\xi\,d\eta, \qquad \varrho = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}.$$

Для получения этого решения используются условия излучения (условия Зоммерфельда) на бесконечности (см. разд. 7.3.1-5, п. 2°).

⊙ *Литература*: А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972, стр. 509–510), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 126, 582).

7.3.2-3. Область: $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается полуплоскость. Задано граничное условие:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad y = 0.$$

Решение:

$$w(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\left[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x, y, \xi, \eta)\right]_{\eta=0} d\xi + \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi, \eta)G(x, y, \xi, \eta)\,d\xi\,d\eta.$$

1°. Функция Грина при $\lambda = -s^2 < 0$:

$$G(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi}\left[K_0(s\varrho_1) - K_0(s\varrho_2)\right],$$
$$\varrho_1 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \quad \varrho_2 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2}.$$

2°. Функция Грина при $\lambda = k^2 > 0$:

$$G(x, y, \xi, \eta) = -\frac{i}{4}\left[H_0^{(2)}(k\varrho_1) - H_0^{(2)}(k\varrho_2)\right].$$

Для получения этой формулы использованы условия излучения на бесконечности (см. разд. 7.3.1-5, п. 2°).

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 132, 612).

7.3.2-4. Область: $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$. Вторая краевая задача.

Рассматривается полуплоскость. Задано граничное условие:

$$\partial_y w = f(x) \quad \text{при} \quad y = 0.$$

Решение:

$$w(x, y) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)G(x, y, \xi, 0)\,d\xi + \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi, \eta)G(x, y, \xi, \eta)\,d\xi\,d\eta.$$

1°. Функция Грина при $\lambda = -s^2 < 0$:

$$G(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi}\left[K_0(s\varrho_1) + K_0(s\varrho_2)\right],$$
$$\varrho_1 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \quad \varrho_2 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2}.$$

2°. Функция Грина при $\lambda = k^2 > 0$:

$$G(x,y,\xi,\eta) = -\frac{i}{4}\left[H_0^{(2)}(k\varrho_1) + H_0^{(2)}(k\varrho_2)\right].$$

Для получения этой формулы использованы условия излучения на бесконечности (см. разд. 7.3.1-5, п. 2°).

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 126, 582; 132, 612).

7.3.2-5. Область: $0 \leqslant x < \infty,\ 0 \leqslant y < \infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается четверть плоскости. Заданы граничные условия:

$$w = f_1(y) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w = f_2(x) \quad \text{при} \quad y = 0.$$

Решение:

$$w(x,y) = \int_0^\infty f_1(\eta)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,\xi,\eta)\right]_{\xi=0} d\eta + \int_0^\infty f_2(\xi)\left[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,\xi,\eta)\right]_{\eta=0} d\xi + \\ + \int_0^\infty\int_0^\infty \Phi(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

1°. Функция Грина при $\lambda = -s^2 < 0$:

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\left[K_0(s\varrho_1) - K_0(s\varrho_2) - K_0(s\varrho_3) + K_0(s\varrho_4)\right],$$
$$\varrho_1 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \qquad \varrho_2 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2},$$
$$\varrho_3 = \sqrt{(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \qquad \varrho_4 = \sqrt{(x+\xi)^2 + (y+\eta)^2}.$$

2°. Функция Грина при $\lambda = k^2 > 0$:

$$G(x,y,\xi,\eta) = -\frac{i}{4}\left[H_0^{(2)}(k\varrho_1) - H_0^{(2)}(k\varrho_2) - H_0^{(2)}(k\varrho_3) + H_0^{(2)}(k\varrho_4)\right].$$

7.3.2-6. Область: $0 \leqslant x < \infty,\ 0 \leqslant y < \infty$. Вторая краевая задача.

Рассматривается четверть плоскости. Заданы граничные условия:

$$\partial_x w = f_1(y) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad \partial_y w = f_2(x) \quad \text{при} \quad y = 0.$$

Решение:

$$w(x,y) = -\int_0^\infty f_1(\eta)G(x,y,0,\eta)\,d\eta - \int_0^\infty f_2(\xi)G(x,y,\xi,0)\,d\xi + \\ + \int_0^\infty\int_0^\infty \Phi(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

1°. Функция Грина при $\lambda = -s^2 < 0$:

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\left[K_0(s\varrho_1) + K_0(s\varrho_2) + K_0(s\varrho_3) + K_0(s\varrho_4)\right],$$
$$\varrho_1 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \qquad \varrho_2 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2},$$
$$\varrho_3 = \sqrt{(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \qquad \varrho_4 = \sqrt{(x+\xi)^2 + (y+\eta)^2}.$$

2°. Функция Грина при $\lambda = k^2 > 0$:

$$G(x,y,\xi,\eta) = -\frac{i}{4}\left[H_0^{(2)}(k\varrho_1) + H_0^{(2)}(k\varrho_2) + H_0^{(2)}(k\varrho_3) + H_0^{(2)}(k\varrho_4)\right].$$

7.3.2-7. Область: $-\infty < x < \infty,\ 0 \leqslant y \leqslant a$. Первая краевая задача.

Рассматривается бесконечная полоса. Заданы граничные условия:

$$w = f_1(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad w = f_2(x) \quad \text{при} \quad y = a.$$

Решение:

$$w(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,\xi,\eta)\Big]_{\eta=0} d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\xi)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,\xi,\eta)\Big]_{\eta=a} d\xi + \\ + \int_0^a\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Функция Грина:

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_n}\exp\big(-\beta_n|x-\xi|\big)\sin(q_n y)\sin(q_n\eta), \qquad q_n = \frac{\pi n}{a}, \quad \beta_n = \sqrt{q_n^2-\lambda}.$$

Другое представление для функции Грина при $\lambda = -s^2 < 0$:

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\big[K_0(s\varrho_{1n}) - K_0(s\varrho_{2n})\big],$$

$$\varrho_{n1} = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta-2na)^2}, \quad \varrho_{n2} = \sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta+2na)^2}.$$

7.3.2-8. Область: $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant y \leqslant a$. Вторая краевая задача.

Рассматривается бесконечная полоса. Заданы граничные условия:

$$\partial_y w = f_1(x) \quad \text{при} \quad y=0, \qquad \partial_y w = f_2(x) \quad \text{при} \quad y=a.$$

Решение:

$$w(x,y) = -\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)G(x,y,\xi,0)\,d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\xi)G(x,y,\xi,a)\,d\xi + \\ + \int_0^a\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Функция Грина:

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{1}{2a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{\beta_n}\exp\big(-\beta_n|x-\xi|\big)\cos(q_n y)\cos(q_n\eta),$$

$$q_n = \frac{\pi n}{a}, \quad \beta_n = \sqrt{q_n^2-\lambda}, \quad \varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{при } n=0, \\ 2 & \text{при } n\neq 0. \end{cases}$$

Другое представление для функции Грина при $\lambda = -s^2 < 0$:

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\big[K_0(s\varrho_{1n}) + K_0(s\varrho_{2n})\big],$$

$$\varrho_{n1} = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta_{n1})^2}, \quad \eta_{n1} = 2na+\eta,$$
$$\varrho_{n2} = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta_{n2})^2}, \quad \eta_{n2} = 2na-\eta.$$

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 127, 583).

7.3.2-9. Область: $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant y \leqslant a$. Третья краевая задача.

Рассматривается бесконечная полоса. Заданы граничные условия:

$$\partial_y w - k_1 w = f_1(x) \quad \text{при} \quad y=0, \qquad \partial_y w + k_2 w = f_2(x) \quad \text{при} \quad y=a.$$

Решение $w(x,y)$ определяется по формуле из разд. 7.3.2-8, где

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(y)\varphi_n(\eta)}{\|\varphi_n\|^2\beta_n}\exp\big(-\beta_n|x-\xi|\big), \qquad \beta_n = \sqrt{\mu_n^2-\lambda},$$

$$\varphi_n(y) = \mu_n\cos(\mu_n y) + k_1\sin(\mu_n y), \quad \|\varphi_n\|^2 = \frac{1}{2}(\mu_n^2+k_1^2)\Big[a + \frac{(k_1+k_2)(\mu_n^2+k_1k_2)}{(\mu_n^2+k_1^2)(\mu_n^2+k_2^2)}\Big].$$

Здесь μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\operatorname{tg}(\mu a) = \dfrac{(k_1+k_2)\mu}{\mu^2-k_1k_2}$.

7.3.2-10. Область: $-\infty < x < \infty,\ 0 \leqslant y \leqslant a$. Смешанная краевая задача.

Рассматривается бесконечная полоса. Заданы граничные условия:

$$w = f_1(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \partial_y w = f_2(x) \quad \text{при} \quad y = a.$$

Решение:

$$w(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta} G(x,y,\xi,\eta)\Big]_{\eta=0} d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\xi) G(x,y,\xi,a)\,d\xi + \\ + \int_0^a \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi,\eta) G(x,y,\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} \exp\bigl(-\beta_n|x-\xi|\bigr)\sin(q_n y)\sin(q_n\eta), \quad q_n = \frac{\pi(2n+1)}{2a}, \quad \beta_n = \sqrt{q_n^2 - \lambda}.$$

7.3.2-11. Область: $0 \leqslant x < \infty,\ 0 \leqslant y \leqslant a$. Первая краевая задача.

Рассматривается полубесконечная полоса. Заданы граничные условия:

$$w = f_1(y) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w = f_2(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad w = f_3(x) \quad \text{при} \quad y = a.$$

Решение:

$$w(x,y) = \int_0^a \int_0^{\infty} \Phi(\xi,\eta) G(x,y,\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta + \int_0^a f_1(\eta)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi} G(x,y,\xi,\eta)\Big]_{\xi=0} d\eta + \\ + \int_0^{\infty} f_2(\xi)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta} G(x,y,\xi,\eta)\Big]_{\eta=0} d\xi - \int_0^{\infty} f_3(\xi)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta} G(x,y,\xi,\eta)\Big]_{\eta=a} d\xi,$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n}\bigl[\exp\bigl(-\beta_n|x-\xi|\bigr) - \exp\bigl(-\beta_n|x+\xi|\bigr)\bigr]\sin(q_n y)\sin(q_n\eta),$$
$$q_n = \frac{\pi n}{a}, \quad \beta_n = \sqrt{q_n^2 - \lambda}.$$

7.3.2-12. Область: $0 \leqslant x < \infty,\ 0 \leqslant y \leqslant a$. Вторая краевая задача.

Рассматривается полубесконечная полоса. Заданы граничные условия:

$$\partial_x w = f_1(y) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad \partial_y w = f_2(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \partial_y w = f_3(x) \quad \text{при} \quad y = a.$$

Решение:

$$w(x,y) = \int_0^a \int_0^{\infty} \Phi(\xi,\eta) G(x,y,\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta - \int_0^a f_1(\eta) G(x,y,0,\eta)\,d\eta - \\ - \int_0^{\infty} f_2(\xi) G(x,y,\xi,0)\,d\xi + \int_0^{\infty} f_3(\xi) G(x,y,\xi,a)\,d\xi,$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{1}{2a}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{\beta_n}\bigl[\exp\bigl(-\beta_n|x-\xi|\bigr) + \exp\bigl(-\beta_n|x+\xi|\bigr)\bigr]\cos(q_n y)\cos(q_n\eta),$$
$$q_n = \frac{\pi n}{a}, \quad \beta_n = \sqrt{q_n^2 - \lambda}, \quad \varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{при} \ n = 0, \\ 2 & \text{при} \ n \neq 0. \end{cases}$$

7.3.2-13. Область: $0 \leqslant x < \infty,\ 0 \leqslant y \leqslant a$. Третья краевая задача.

Рассматривается полубесконечная полоса. Заданы граничные условия:

$$\partial_x w - k_1 w = f_1(y) \ \text{при} \ x = 0, \quad \partial_y w - k_2 w = f_2(x) \ \text{при} \ y = 0, \quad \partial_y w + k_3 w = f_3(x) \ \text{при} \ y = a.$$

Решение $w(x,y)$ определяется по формуле из разд. 7.3.2-12, где

$$G(x,y,\xi,\eta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(y)\varphi_n(\eta)}{\|\varphi_n\|^2\beta_n(\beta_n+k_1)}H_n(x,\xi),\qquad \beta_n=\sqrt{\mu_n^2-\lambda},$$

$$\varphi_n(y)=\mu_n\cos(\mu_n y)+k_2\sin(\mu_n y),\quad \|\varphi_n\|^2=\frac{1}{2}(\mu_n^2+k_2^2)\Bigl[a+\frac{(k_2+k_3)(\mu_n^2+k_2k_3)}{(\mu_n^2+k_2^2)(\mu_n^2+k_3^2)}\Bigr],$$

$$H_n(x,\xi)=\begin{cases}\exp(-\beta_n x)\bigl[\beta_n\operatorname{ch}(\beta_n\xi)+k_1\operatorname{sh}(\beta_n\xi)\bigr] & \text{при } x>\xi,\\ \exp(-\beta_n\xi)\bigl[\beta_n\operatorname{ch}(\beta_n x)+k_1\operatorname{sh}(\beta_n x)\bigr] & \text{при } \xi>x.\end{cases}$$

Здесь μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\operatorname{tg}(\mu a)=\dfrac{(k_2+k_3)\mu}{\mu^2-k_2k_3}$.

7.3.2-14. Область: $0\leqslant x<\infty,\ 0\leqslant y\leqslant a$. Смешанные краевые задачи.

1°. Рассматривается полубесконечная полоса. Заданы граничные условия:

$$w=f_1(y)\quad\text{при}\quad x=0,\qquad \partial_y w=f_2(x)\quad\text{при}\quad y=0,\qquad \partial_y w=f_3(x)\quad\text{при}\quad y=a.$$

Решение:

$$w(x,y)=\int_0^a f_1(\eta)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,\xi,\eta)\Bigr]_{\xi=0}d\eta-\int_0^\infty f_2(\xi)G(x,y,\xi,0)\,d\xi+$$
$$+\int_0^\infty f_3(\xi)G(x,y,\xi,a)\,d\xi+\int_0^a\int_0^\infty\Phi(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta)=\frac{1}{2a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{\beta_n}\bigl[\exp\bigl(-\beta_n|x-\xi|\bigr)-\exp\bigl(-\beta_n|x+\xi|\bigr)\bigr]\cos(q_n y)\cos(q_n\eta),$$

$$q_n=\frac{\pi n}{a},\quad \beta_n=\sqrt{q_n^2-\lambda},\quad \varepsilon=\begin{cases}1 & \text{при } n=0,\\ 2 & \text{при } n\neq 0.\end{cases}$$

2°. Рассматривается полубесконечная полоса. Заданы граничные условия:

$$\partial_x w=f_1(y)\quad\text{при}\quad x=0,\qquad w=f_2(x)\quad\text{при}\quad y=0,\qquad w=f_3(x)\quad\text{при}\quad y=a.$$

Решение:

$$w(x,y)=-\int_0^a f_1(\eta)G(x,y,0,\eta)\,d\eta+\int_0^\infty f_2(\xi)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,\xi,\eta)\Bigr]_{\eta=0}d\xi-$$
$$-\int_0^\infty f_3(\xi)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,\xi,\eta)\Bigr]_{\eta=a}d\xi+\int_0^a\int_0^\infty\Phi(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta)=\frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_n}\bigl[\exp\bigl(-\beta_n|x-\xi|\bigr)+\exp\bigl(-\beta_n|x+\xi|\bigr)\bigr]\sin(q_n y)\sin(q_n\eta),$$

$$q_n=\frac{\pi n}{a},\quad \beta_n=\sqrt{q_n^2-\lambda}.$$

7.3.2-15. Область: $0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b$. Первая краевая задача.

Рассматривается прямоугольная область. Заданы граничные условия:

$$w=f_1(y)\quad\text{при}\quad x=0,\qquad w=f_2(y)\quad\text{при}\quad x=a,$$
$$w=f_3(x)\quad\text{при}\quad y=0,\qquad w=f_4(x)\quad\text{при}\quad y=b.$$

1°. Собственные значения однородной задачи (их удобно отмечать двойным индексом):

$$\lambda_{nm}=\pi^2\Bigl(\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\Bigr);\qquad n=1,\,2,\,\ldots;\quad m=1,\,2,\,\ldots$$

Собственные функции и квадрат нормы этих функций:

$$w_{nm}=\sin\Bigl(\frac{n\pi x}{a}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{m\pi y}{b}\Bigr),\qquad \|w_{nm}\|^2=\frac{ab}{4}.$$

⊙ *Литература*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 126), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 129, 594).

2°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{nm}$:

$$w(x,y) = \int_0^a \int_0^b \Phi(\xi,\eta) G(x,y,\xi,\eta)\,d\eta\,d\xi +$$
$$+ \int_0^b f_1(\eta)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi} G(x,y,\xi,\eta)\Big]_{\xi=0} d\eta - \int_0^b f_2(\eta)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi} G(x,y,\xi,\eta)\Big]_{\xi=a} d\eta +$$
$$+ \int_0^a f_3(\xi)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta} G(x,y,\xi,\eta)\Big]_{\eta=0} d\xi - \int_0^a f_4(\xi)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta} G(x,y,\xi,\eta)\Big]_{\eta=b} d\xi.$$

Две формы представления для функции Грина:

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(p_n x)\sin(p_n\xi)}{\beta_n \operatorname{sh}(\beta_n b)} H_n(y,\eta) = \frac{2}{b}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(q_m y)\sin(q_m\eta)}{\mu_m \operatorname{sh}(\mu_m a)} Q_m(x,\xi),$$

где

$$p_n = \frac{\pi n}{a}, \quad \beta_n = \sqrt{p_n^2 - \lambda}, \quad H_n(y,\eta) = \begin{cases} \operatorname{sh}(\beta_n\eta)\operatorname{sh}[\beta_n(b-y)] & \text{при } b \geqslant y > \eta \geqslant 0, \\ \operatorname{sh}(\beta_n y)\operatorname{sh}[\beta_n(b-\eta)] & \text{при } b \geqslant \eta > y \geqslant 0, \end{cases}$$
$$q_m = \frac{\pi m}{b}, \quad \mu_m = \sqrt{q_m^2 - \lambda}, \quad Q_m(x,\xi) = \begin{cases} \operatorname{sh}(\mu_m\xi)\operatorname{sh}[\mu_m(a-x)] & \text{при } a \geqslant x > \xi \geqslant 0, \\ \operatorname{sh}(\mu_m x)\operatorname{sh}[\mu_m(a-\xi)] & \text{при } a \geqslant \xi > x \geqslant 0. \end{cases}$$

Функция Грина в виде двойного ряда:

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{4}{ab}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(p_n x)\sin(q_m y)\sin(p_n\xi)\sin(q_m\eta)}{p_n^2 + q_m^2 - \lambda}, \qquad p_n = \frac{\pi n}{a}, \quad q_m = \frac{\pi m}{b}.$$

7.3.2-16. Область: $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$. Вторая краевая задача.

Рассматривается прямоугольная область. Заданы граничные условия:

$$\partial_x w = f_1(y) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad \partial_x w = f_2(y) \quad \text{при} \quad x = a,$$
$$\partial_y w = f_3(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \partial_y w = f_4(x) \quad \text{при} \quad y = b.$$

1°. Собственные значения однородной задачи:

$$\lambda_{nm} = \pi^2\Big(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\Big); \qquad n = 0,\,1,\,2,\,\ldots; \quad m = 0,\,1,\,2,\,\ldots$$

Собственные функции и квадрат нормы этих функций:

$$w_{nm} = \cos\Big(\frac{n\pi x}{a}\Big)\cos\Big(\frac{m\pi y}{b}\Big), \quad \|w_{nm}\|^2 = \frac{ab}{4}(1+\delta_{n0})(1+\delta_{m0}), \quad \delta_{n0} = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 0 & \text{при } n \neq 0. \end{cases}$$

⊙ *Литература*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 126), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 129, 594).

2°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{nm}$:

$$w(x,y) = \int_0^a \int_0^b \Phi(\xi,\eta) G(x,y,\xi,\eta)\,d\eta\,d\xi -$$
$$- \int_0^b f_1(\eta) G(x,y,0,\eta)\,d\eta + \int_0^b f_2(\eta) G(x,y,a,\eta)\,d\eta -$$
$$- \int_0^a f_3(\xi) G(x,y,\xi,0)\,d\xi + \int_0^a f_4(\xi) G(x,y,\xi,b)\,d\xi.$$

Две формы представления для функции Грина:

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n\cos(p_n x)\cos(p_n\xi)}{\beta_n \operatorname{sh}(\beta_n b)} H_n(y,\eta) = \frac{1}{b}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m\cos(q_m y)\cos(q_m\eta)}{\mu_m \operatorname{sh}(\mu_m a)} Q_m(x,\xi),$$

где

$$p_n = \frac{\pi n}{a}, \quad H_n(y,\eta) = \begin{cases} \operatorname{ch}(\beta_n\eta)\operatorname{ch}[\beta_n(b-y)] & \text{при } y > \eta, \\ \operatorname{ch}(\beta_n y)\operatorname{ch}[\beta_n(b-\eta)] & \text{при } \eta > y, \end{cases}$$
$$q_m = \frac{\pi m}{b}, \quad Q_m(x,\xi) = \begin{cases} \operatorname{ch}(\mu_m\xi)\operatorname{ch}[\mu_m(a-x)] & \text{при } x > \xi, \\ \operatorname{ch}(\mu_m x)\operatorname{ch}[\mu_m(a-\xi)] & \text{при } \xi > x, \end{cases}$$
$$\beta_n = \sqrt{p_n^2 - \lambda}, \quad \mu_m = \sqrt{q_m^2 - \lambda}, \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 2 & \text{при } n \neq 0. \end{cases}$$

Функция Грина в виде двойного ряда:

$$G(x,y,\xi,\eta)=\frac{1}{ab}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_n\varepsilon_m\cos(p_nx)\cos(q_my)\cos(p_n\xi)\cos(q_m\eta)}{p_n^2+q_m^2-\lambda},\qquad p_n=\frac{\pi n}{a},\quad q_m=\frac{\pi m}{b}.$$

► *В разд. 7.3.2-17 — 7.3.2-20 приводятся только собственные значения и собственные функции однородных краевых задач для однородного уравнения Гельмгольца при* $\Phi\equiv 0$. *Решения соответствующих неоднородных краевых задач строятся по формулам, указанным в разд. 7.3.1-3 и 7.3.1-4.*

7.3.2-17. Область: $0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b$. Третья краевая задача.

Рассматривается прямоугольная область. Заданы граничные условия:

$$\partial_x w-k_1w=0\quad\text{при}\quad x=0,\qquad \partial_x w+k_2w=0\quad\text{при}\quad x=a,$$
$$\partial_y w-k_3w=0\quad\text{при}\quad y=0,\qquad \partial_y w+k_4w=0\quad\text{при}\quad y=b.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{nm}=\mu_n^2+\nu_m^2,$$

где μ_n и ν_m — положительные корни трансцендентных уравнений

$$\operatorname{tg}(\mu a)=\frac{(k_1+k_2)\mu}{\mu^2-k_1k_2},\qquad \operatorname{tg}(\nu b)=\frac{(k_3+k_4)\nu}{\nu^2-k_3k_4}.$$

Собственные функции:

$$w_{nm}=(\mu_n\cos\mu_nx+k_1\sin\mu_nx)(\nu_m\cos\nu_my+k_3\sin\nu_my).$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w_{nm}\|^2=\frac{1}{4}(\mu_n^2+k_1^2)(\nu_m^2+k_3^2)\left[a+\frac{(k_1+k_2)(\mu_n^2+k_1k_2)}{(\mu_n^2+k_1^2)(\mu_n^2+k_2^2)}\right]\left[b+\frac{(k_3+k_4)(\nu_m^2+k_3k_4)}{(\nu_m^2+k_3^2)(\nu_m^2+k_4^2)}\right].$$

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 129, 595).

7.3.2-18. Область: $0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b$. Смешанные краевые задачи.

1°. Рассматривается прямоугольная область. Заданы граничные условия:

$$w=0\quad\text{при}\quad x=0,\qquad w=0\quad\text{при}\quad x=a,$$
$$\partial_y w=0\quad\text{при}\quad y=0,\qquad \partial_y w=0\quad\text{при}\quad y=b.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{nm}=\pi^2\left(\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right);\qquad n=1,\,2,\,3,\,\ldots;\quad m=0,\,1,\,2,\,\ldots$$

Собственные функции и квадрат нормы этих функций:

$$w_{nm}=\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right),\quad \|w_{nm}\|^2=\frac{ab}{4}(1+\delta_{m0}),\quad \delta_{m0}=\begin{cases}1 & \text{при}\ m=0,\\ 0 & \text{при}\ m\neq 0.\end{cases}$$

2°. Рассматривается прямоугольная область. Заданы граничные условия:

$$w=0\quad\text{при}\quad x=0,\qquad \partial_x w=0\quad\text{при}\quad x=a,$$
$$w=0\quad\text{при}\quad y=0,\qquad \partial_y w=0\quad\text{при}\quad y=b.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{nm}=\frac{\pi^2}{4}\left[\frac{(2n+1)^2}{a^2}+\frac{(2m+1)^2}{b^2}\right];\qquad n=0,\,1,\,2,\,\ldots;\quad m=0,\,1,\,2,\,\ldots$$

Собственные функции и квадрат нормы этих функций:

$$w_{nm}=\sin\left[\frac{\pi(2n+1)x}{2a}\right]\sin\left[\frac{\pi(2m+1)y}{2b}\right],\qquad \|w_{nm}\|^2=\frac{ab}{4}.$$

⊙ *Литература*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 127–128), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 129, 594–595).

7.3.2-19. Первая краевая задача для треугольной области.

На сторонах треугольника, которые заданы уравнениями
$$x = 0, \quad y = 0, \quad y = a - x,$$
искомая величина равна нулю.

Собственные значения:
$$\lambda_{nm} = \frac{\pi^2}{a^2}\left[(n+m)^2 + m^2\right]; \qquad n = 1,\, 2,\, \ldots\,; \quad m = 1,\, 2,\, \ldots$$

Собственные функции:
$$w_{nm} = \sin\left[\frac{\pi}{a}(n+m)x\right]\sin\left(\frac{\pi}{a}my\right) - (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{a}mx\right)\sin\left[\frac{\pi}{a}(n+m)y\right].$$

⊙ *Литература*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 146).

7.3.2-20. Вторая краевая задача для треугольной области.

На сторонах треугольника, которые заданы уравнениями
$$x = 0, \quad y = 0, \quad y = a - x,$$
производные по нормали от искомой величины равны нулю.

Собственные значения:
$$\lambda_{nm} = \frac{\pi^2}{a^2}\left[(n+m)^2 + m^2\right]; \qquad n = 0,\, 1,\, \ldots\,; \quad m = 0,\, 1,\, \ldots$$

Собственные функции:
$$w_{nm} = \cos\left[\frac{\pi}{a}(n+m)x\right]\cos\left(\frac{\pi}{a}my\right) - (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{a}mx\right)\cos\left[\frac{\pi}{a}(n+m)y\right].$$

7.3.3. Задачи в полярной системе координат

Двумерное уравнение Гельмгольца в полярной системе координат имеет вид
$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \lambda w = -\Phi(r, \varphi, z), \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

7.3.3-1. Частные решения однородного уравнения (при $\Phi \equiv 0$):
$$w = [AJ_0(\mu r) + BY_0(\mu r)](C\varphi + D), \quad \lambda = \mu^2,$$
$$w = [AI_0(\mu r) + BK_0(\mu r)](C\varphi + D), \quad \lambda = -\mu^2,$$
$$w = [AJ_m(\mu r) + BY_m(\mu r)](C\cos m\varphi + D\sin m\varphi), \quad \lambda = \mu^2,$$
$$w = [AI_m(\mu r) + BK_m(\mu r)](C\cos m\varphi + D\sin m\varphi), \quad \lambda = -\mu^2,$$
где $m = 1,\, 2,\, \ldots\,$; A, B, C, D — произвольные постоянные; $J_m(\mu)$ и $Y_m(\mu)$ — функции Бесселя; $I_m(\mu)$ и $K_m(\mu)$ — модифицированные функции Бесселя.

► *В разд. 7.3.3-2 — 7.3.3-11 приводятся только собственные значения и собственные функции однородных краевых задач для однородного уравнения Гельмгольца при $\Phi \equiv 0$. Решения соответствующих неоднородных краевых задач строятся по формулам, указанным в разд. 7.3.1-3 и 7.3.1-4.*

7.3.3-2. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Первая краевая задача.

Рассматривается круг. Задано граничное условие:
$$w = 0 \quad \text{при} \quad r = R.$$

Собственные значения:
$$\lambda_{nm} = \frac{\mu_{nm}^2}{R^2}; \qquad n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots\,; \; m = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots$$

Здесь μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_n(\mu)=0$.

Собственные функции:

$$w_{nm}^{(1)} = J_n\bigl(r\sqrt{\lambda_{nm}}\,\bigr)\cos n\varphi, \quad w_{nm}^{(2)} = J_n\bigl(r\sqrt{\lambda_{nm}}\,\bigr)\sin n\varphi.$$

Собственные функции, обладающие осевой симметрией: $w_{0m}^{(1)} = J_0(r\sqrt{\lambda_{0m}}\,)$.

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w_{nm}^{(k)}\|^2 = \tfrac{1}{2}\pi R^2(1+\delta_{n0})[J_n'(\mu_{nm})]^2, \qquad k=1,\,2; \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i=j, \\ 0 & \text{при } i\neq j. \end{cases}$$

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 129, 595).

7.3.3-3. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Вторая краевая задача.

Рассматривается круг. Задано граничное условие:

$$\partial_r w = 0 \quad \text{при} \quad r=R.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{nm} = \frac{\mu_{nm}^2}{R^2},$$

где μ_{nm} — корни трансцендентного уравнения $J_n'(\mu)=0$.

Собственные функции:

$$w_{nm}^{(1)} = J_n(r\sqrt{\lambda_{nm}}\,)\cos n\varphi, \quad w_{nm}^{(2)} = J_n\bigl(r\sqrt{\lambda_{nm}}\,\bigr)\sin n\varphi.$$

В этих формулах $n=0,\,1,\,2,\,\ldots$; при $n\neq 0$ параметр m принимает значения $m=1,\,2,\,3,\,\ldots$; при $n=0$ имеется корень $\mu_{00}=0$ (соответствующая ему собственная функция $w_{00}=1$).

Собственные функции, обладающие осевой симметрией: $w_{0m}^{(1)} = J_0\bigl(r\sqrt{\lambda_{0m}}\,\bigr)$.

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w_{nm}^{(k)}\|^2 = \frac{\pi^2 R^2(1+\delta_{n0})}{2\mu_{nm}^2}(\mu_{nm}^2 - n^2)[J_n(\mu_{nm})]^2, \quad \|w_{00}\|^2 = \pi R^2,$$

где $k=1,2$; $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i=j, \\ 0 & \text{при } i\neq j. \end{cases}$

⊙ *Литература*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 129–130), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 129, 595–596).

7.3.3-4. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Третья краевая задача.

Рассматривается круг. Задано граничное условие:

$$\partial_r w + kw = 0 \quad \text{при} \quad r=R.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{nm} = \frac{\mu_{nm}^2}{R^2}; \qquad n=0,\,1,\,2,\,\ldots;\; m=1,\,2,\,3,\,\ldots$$

Здесь μ_{nm} — m-й корень трансцендентного уравнения $\mu J_n'(\mu) + kRJ_n(\mu) = 0$.

Собственные функции:

$$w_{nm}^{(1)} = J_n\bigl(r\sqrt{\lambda_{nm}}\,\bigr)\cos n\varphi, \quad w_{nm}^{(2)} = J_n\bigl(r\sqrt{\lambda_{nm}}\,\bigr)\sin n\varphi.$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w_{nm}^{(1)}\|^2 = \|w_{nm}^{(2)}\|^2 = \frac{\pi R^2(1+\delta_{n0})}{2\mu_{nm}^2}(k^2R^2 + \mu_{nm}^2 - n^2)[J_n(\mu_{nm})]^2, \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i=j, \\ 0 & \text{при } i\neq j. \end{cases}$$

⊙ *Литература*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 130), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 129, 596).

7.3.3-5. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. Первая краевая задача.

Рассматривается кольцевая область. Заданы граничные условия:

$$w = 0 \quad \text{при} \quad r = R_1, \qquad w = 0 \quad \text{при} \quad r = R_2.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{nm} = \mu_{nm}^2; \qquad n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots\,; \quad m = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots$$

Здесь μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_n(\mu R_1) Y_n(\mu R_2) - J_n(\mu R_2) Y_n(\mu R_1) = 0.$$

Собственные функции:

$$w_{nm}^{(1)} = [J_n(\mu_{nm} r) Y_n(\mu_{nm} R_1) - J_n(\mu_{nm} R_1) Y_n(\mu_{nm} r)] \cos n\varphi,$$
$$w_{nm}^{(2)} = [J_n(\mu_{nm} r) Y_n(\mu_{nm} R_1) - J_n(\mu_{nm} R_1) Y_n(\mu_{nm} r)] \sin n\varphi.$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w_{nm}^{(1)}\|^2 = \|w_{nm}^{(2)}\|^2 = \frac{2(1+\delta_{n0})}{\pi \mu_{nm}^2} \frac{J_n^2(\mu_{nm} R_1) - J_n^2(\mu_{nm} R_2)}{J_n^2(\mu_{nm} R_2)}, \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

⊙ *Литература*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 130–131), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 129, 600–601).

7.3.3-6. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. Вторая краевая задача.

Рассматривается кольцевая область. Заданы граничные условия:

$$\partial_r w = 0 \quad \text{при} \quad r = R_1, \qquad \partial_r w = 0 \quad \text{при} \quad r = R_2.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{nm} = \mu_{nm}^2; \qquad n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots\,; \quad m = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$$

Здесь μ_{nm} — корни трансцендентного уравнения

$$J_n'(\mu R_1) Y_n'(\mu R_2) - J_n'(\mu R_2) Y_n'(\mu R_1) = 0.$$

При $n = 0$ существует корень $\mu_{00} = 0$ и соответствующая ему собственная функция $w_{00}^{(1)} = 1$.

Собственные функции:

$$w_{nm}^{(1)} = [J_n(\mu_{nm} r) Y_n'(\mu_{nm} R_1) - J_n'(\mu_{nm} R_1) Y_n(\mu_{nm} r)] \cos n\varphi,$$
$$w_{nm}^{(2)} = [J_n(\mu_{nm} r) Y_n'(\mu_{nm} R_1) - J_n'(\mu_{nm} R_1) Y_n(\mu_{nm} r)] \sin n\varphi.$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w_{nm}^{(1)}\|^2 = \|w_{nm}^{(2)}\|^2 = \frac{2(1+\delta_{n0})}{\pi \mu_{nm}^2} \left\{ \left(1 - \frac{n^2}{R_2^2 \mu_{nm}^2}\right) \left[\frac{J_n'(\mu_{nm} R_1)}{J_n'(\mu_{nm} R_2)}\right]^2 - \left(1 - \frac{n^2}{R_1^2 \mu_{nm}^2}\right) \right\},$$
$$\|w_{00}^{(1)}\|^2 = \pi(R_2^2 - R_1^2); \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 129, 601).

7.3.3-7. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. Третья краевая задача.

Рассматривается кольцевая область. Заданы граничные условия:

$$\partial_r w - kw = 0 \quad \text{при} \quad r = R_1, \qquad \partial_r w + kw = 0 \quad \text{при} \quad r = R_2.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{nm} = \mu_{nm}^2; \qquad n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots\,; \quad m = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots\,;$$

где μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$A_1(\mu R_1) B_2(\mu R_2) - A_2(\mu R_2) B_1(\mu R_1) = 0.$$

Здесь использованы обозначения:

$$A_1(\mu R) = J_n'(\mu R) - \frac{k}{\mu} J_n(\mu R), \quad B_1(\mu R) = Y_n'(\mu R) - \frac{k}{\mu} Y_n(\mu R),$$
$$A_2(\mu R) = J_n'(\mu R) + \frac{k}{\mu} J_n(\mu R), \quad B_2(\mu R) = Y_n'(\mu R) + \frac{k}{\mu} Y_n(\mu R).$$

Собственные функции:

$$w_{nm}^{(1)} = [B_1(\mu_{nm} R_1) J_n(\mu_{nm} r) - A_1(\mu_{nm} R_1) Y_n(\mu_{nm} r)] \cos n\varphi,$$
$$w_{nm}^{(2)} = [B_1(\mu_{nm} R_1) J_n(\mu_{nm} r) - A_1(\mu_{nm} R_1) Y_n(\mu_{nm} r)] \sin n\varphi.$$

Квадрат нормы собственных функций ($s = 1,\, 2$):

$$\|w_{nm}^{(s)}\|^2 = \tfrac{1}{2}\pi\varepsilon_n R_2^2 \Big\{ \big[F_{nm}'(R_2)\big]^2 + \Big(1 - \frac{n^2}{R_2^2 \mu_{nm}^2}\Big) F_{nm}^2(R_2) \Big\} -$$
$$- \tfrac{1}{2}\pi\varepsilon_n R_1^2 \Big\{ \big[F_{nm}'(R_1)\big]^2 + \Big(1 - \frac{n^2}{R_1^2 \mu_{nm}^2}\Big) F_{nm}^2(R_1) \Big\},$$
$$F_{nm}(r) = B_1(\mu_{nm} R_1) J_n(\mu_{nm} r) - A_1(\mu_{nm} R_1) Y_n(\mu_{nm} r), \quad \varepsilon_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{при } i = j, \\ 1 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 129, 601–602).

7.3.3-8. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha$. Первая краевая задача.

Рассматривается сектор круга. Заданы граничные условия:

$$w = 0 \quad \text{при} \quad r = R, \qquad w = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = 0, \qquad w = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = \alpha.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{nm} = \frac{\mu_{nm}^2}{R^2}; \qquad n = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots\,; \quad m = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots$$

Здесь μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\mu) = 0$.

Собственные функции:

$$w_{nm} = J_{\frac{n\pi}{\alpha}}\Big(\mu_{nm} \frac{r}{R}\Big) \sin\Big(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\Big).$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w_{nm}\|^2 = \frac{\alpha R^2}{4} \Big[J'_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\mu_{nm})\Big]^2.$$

⊙ *Литература*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 132), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 129, 603).

7.3.3-9. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha$. Вторая краевая задача.

Рассматривается сектор круга. Заданы граничные условия:

$$\partial_r w = 0 \quad \text{при} \quad r = R, \qquad \partial_\varphi w = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = 0, \qquad \partial_\varphi w = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = \alpha.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{nm} = \frac{\mu_{nm}^2}{R^2}; \qquad n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots\,; \quad m = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$$

Здесь μ_{nm} — корни трансцендентного уравнения $J'_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\mu) = 0$.

Собственные функции:

$$w_{nm} = J_{\frac{n\pi}{\alpha}}\Big(\mu_{nm} \frac{r}{R}\Big) \cos\Big(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\Big), \qquad w_{00} = 1.$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w_{nm}\|^2 = \frac{\alpha R^2}{4}(1 + \delta_{n0})\Big(1 - \frac{n^2}{\mu_{nm}^2}\Big)\Big[J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\mu_{nm})\Big]^2, \qquad \|w_{00}\|^2 = \frac{\alpha R^2}{2}.$$

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 129, 603).

7.3.3-10. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha$. Третья краевая задача.

Рассматривается сектор круга. Заданы граничные условия:

$$\partial_r w + k_1 w = 0 \quad \text{при} \quad r = R, \qquad \partial_\varphi w - k_2 w = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = 0, \qquad \partial_\varphi w + k_3 w = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = \alpha.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{nm} = \frac{\mu_{nm}^2}{R^2}; \qquad n = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots\,; \quad m = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots$$

Здесь μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $\mu J'_{\nu_n}(\mu) + k_1 R J_{\nu_n}(\mu) = 0$; ν_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\operatorname{tg}(\alpha\nu) = \dfrac{(k_2+k_3)\nu}{\nu^2 - k_2 k_3}$.

Собственные функции:

$$w_{nm} = J_{\nu_n}\left(\mu_{nm}\frac{r}{R}\right) \frac{\nu_n \cos(\nu_n\varphi) + k_2 \sin(\nu_n\varphi)}{\sqrt{\nu_n^2 + k_2^2}}.$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w_{nm}\|^2 = \frac{R^2}{4}\left[\alpha + \frac{(k_2+k_3)(\nu_n^2 + k_2k_3)}{(\nu_n^2 + k_2^2)(\nu_n^2 + k_3^2)}\right]\left(1 + \frac{k_1^2R^2 - \nu_n^2}{\mu_{nm}^2}\right) J_{\nu_n}^2(\mu_{nm}).$$

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 129, 603).

7.3.3-11. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha$. Первая краевая задача.

Заданы граничные условия:

$$\begin{aligned} w &= 0 \quad \text{при} \quad r = R_1, & w &= 0 \quad \text{при} \quad r = R_2, \\ w &= 0 \quad \text{при} \quad \varphi = 0, & w &= 0 \quad \text{при} \quad \varphi = \alpha. \end{aligned}$$

Собственные значения:

$$\lambda_{nm} = \mu_{nm}^2,$$

где μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\mu R_1) Y_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\mu R_2) - J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\mu R_2) Y_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\mu R_1) = 0.$$

Собственные функции:

$$w_{nm} = \left[J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\mu_{nm} r) Y_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\mu_{nm} R_1) - J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\mu_{nm} R_1) Y_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\mu_{nm} r)\right] \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right).$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w_{nm}\|^2 = \frac{\alpha}{\pi^2 \mu_{nm}^2} \frac{\left[J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\mu_{nm} R_1)\right]^2 - \left[J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\mu_{nm} R_2)\right]^2}{\left[J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\mu_{nm} R_2)\right]^2}.$$

⊙ *Литература*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 133), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 130, 604).

7.3.4. Другие ортогональные системы координат. Область эллиптической формы

В разд. 7.3.4-1 и 7.3.4-2 описаны две другие ортогональные системы координат, в которых однородное уравнение Гельмгольца допускает разделение переменных.

7.3.4-1. Параболическая система координат.

В параболических координатах, которые вводятся по формулам

$$x = \tfrac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2), \quad y = \xi\eta \qquad (0 \leqslant \xi < \infty,\ -\infty < \eta < \infty)$$

уравнение Гельмгольца имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \lambda(\xi^2 + \eta^2) w = 0.$$

Полагая $w = f(\xi)g(\eta)$, получим следующие уравнения для определения функций $f = f(\xi)$ и $g = g(\eta)$:

$$f'' + (\lambda\xi^2 + k)f = 0, \quad g'' + (\lambda\eta^2 - k)g = 0,$$

где k — константа разделения. Решения этих уравнений даются формулами

$$f(\xi) = A_1 D_{\mu-1/2}(\sigma\xi) + A_2 D_{\mu-1/2}(-\sigma\xi), \quad g(\eta) = B_1 D_{-\mu-1/2}(\sigma\eta) + B_2 D_{-\mu-1/2}(-\sigma\eta),$$
$$\mu = \tfrac{1}{2}k(-\lambda)^{-1/2}, \quad \sigma = (-4\lambda)^{1/4}.$$

Здесь A_1, B_1, A_2, B_2 — произвольные постоянные, $D_\nu(z)$ — функции параболического цилиндра

$$D_\nu(z) = 2^{1/2}\exp\left(-\tfrac{1}{4}z^2\right)\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\nu}{2}\right)}\Phi\left(-\tfrac{\nu}{2}, \tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}z^2\right) + 2^{-1/2}\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)}z\Phi\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{\nu}{2}, \tfrac{3}{2}; \tfrac{1}{2}z^2\right)\right].$$

При $\nu = n = 0, 1, 2, \ldots$ имеем

$$D_n(z) = 2^{-n/2}\exp\left(-\tfrac{1}{4}z^2\right)H_n\left(2^{-1/2}z\right), \qquad \text{где} \quad H_n(z) = (-1)^n \exp\left(z^2\right)\frac{d^n}{z^n}\exp\left(-z^2\right).$$

⊙ *Литература*: У. Миллер (1981, стр. 50–52), М. Абрамовиц, И. Стиган (1979, стр. 494–508).

7.3.4-2. Эллиптическая система координат.

В эллиптических координатах, которые вводятся по формулам

$$x = a \operatorname{ch} u \cos v, \quad y = a \operatorname{sh} u \sin v \qquad (0 \leqslant u < \infty,\ 0 \leqslant v < 2\pi,\ a > 0)$$

уравнение Гельмгольца имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + a^2\lambda(\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 v)w = 0.$$

Полагая $w = F(u)G(v)$, получим следующие уравнения для определения функций $F = F(u)$ и $G = G(v)$:

$$F'' + \left(\tfrac{1}{2}a^2\lambda \operatorname{ch} 2u - k\right)F = 0, \quad G'' - \left(\tfrac{1}{2}a^2\lambda\cos 2v - k\right)G = 0,$$

где k — константа разделения. Решения этих уравнений, удовлетворяющие условию периодичности по v, даются формулами

$$F(u) = \begin{cases} \operatorname{Ce}_n(u,q), \\ \operatorname{Se}_n(u,q), \end{cases} \quad G(v) = \begin{cases} \operatorname{ce}_n(v,q), \\ \operatorname{se}_n(v,q), \end{cases} \qquad q = \tfrac{1}{4}a^2\lambda,$$

где $\operatorname{Ce}_n(u,q)$ и $\operatorname{Se}_n(u,q)$ — модифицированные функции Матье, а $\operatorname{ce}_n(v,q)$ и $\operatorname{se}_n(v,q)$ — функции Матье [каждому значению параметра q соответствуют определенные собственные значения $k = k_n(q)$].

⊙ *Литература*: У. Миллер (1981, стр. 50–52), М. Абрамовиц, И. Стиган (1979, стр. 532–551).

7.3.4-3. Область: $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$. Первая краевая задача.

На границе области эллиптической формы искомая функция равна нулю:

$$w = 0 \quad \text{при} \quad (x/a)^2 + (y/b)^2 = 1 \qquad (a \geqslant b).$$

Собственные значения и собственные функции (приближенные формулы):

$$\lambda_1 = \frac{\gamma_{10}^2}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right), \qquad w_1(\mathcal{R}) = J_0(\gamma_{10}\mathcal{R}),$$
$$\lambda_2^{(c)} = \frac{\gamma_{11}^2}{4}\left(\frac{3}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right), \quad w_2^{(c)}(\mathcal{R},\varphi) = J_1(\gamma_{11}\mathcal{R})\cos\varphi,$$
$$\lambda_2^{(s)} = \frac{\gamma_{11}^2}{4}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{3}{b^2}\right), \quad w_2^{(s)}(\mathcal{R},\varphi) = J_1(\gamma_{11}\mathcal{R})\sin\varphi,$$

где $\gamma_{10} = 2{,}4048$ и $\gamma_{11} = 3{,}8317$ — первые корни функций Бесселя $J_0(\gamma_{10}) = 0$ и $J_1(\gamma_{11}) = 0$, $\mathcal{R} = \sqrt{(x/a)^2 + (y/b)^2}$.

Для получения этих формул вводились обобщенные (неортогональные) полярные координаты $\mathcal{R}, \varphi$:

$$x = a\mathcal{R}\cos\varphi, \quad y = a\mathcal{R}\sin\varphi \qquad (0 \leqslant \mathcal{R} \leqslant 1,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$$

и использовался вариационный метод.

Максимальная погрешность собственного значения λ_1 при $\varepsilon = \sqrt{1-(b/a)^2} \leqslant 0{,}9$ составляет 1%, а погрешности $\lambda_2^{(c)}$ и $\lambda_2^{(s)}$ в том же диапазоне не превосходят 2%. При $\varepsilon \leqslant 0{,}5$ погрешности λ_1 и $\lambda_2^{(c)}$ не превосходят 0,01%, а максимальная погрешность $\lambda_2^{(s)}$ составляет 0,12%. В предельном случае $\varepsilon = 0$, который соответствует круговой области, приведенные формулы дают точный результат.

⊙ *Литература*: Л. Д. Акуленко, С. В. Нестеров (2000).

7.4. Другие уравнения

7.4.1. Стационарное уравнение Шредингера $\Delta_2 w = f(x,y)w$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = a(x^2+y^2)w.$

Преобразование

$$z = \tfrac{1}{2}(x^2 - y^2), \quad \zeta = xy$$

приводит к уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} - aw = 0,$$

которое рассматривается в разд. 7.3.2.

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = a(x^2+y^2)^2 w.$

Преобразование

$$z = \tfrac{1}{3}x^3 - xy^2, \quad \zeta = x^2 y - \tfrac{1}{3}y^3$$

приводит к уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} - aw = 0,$$

которое рассматривается в разд. 7.3.2.

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = a(x^2+y^2)^k w.$

Частный случай уравнения 7.4.1.7 при $f(u) = au^k$. В табл. 24 указаны преобразования, приводящие данное уравнение к уравнению Гельмгольца, которое рассматривается в разд. 7.3.2. В шестой строке стоит мнимая единица, $i^2 = -1$.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = ae^{\beta x} w.$

Преобразование

$$u(x,y) = \exp\bigl(\tfrac{1}{2}\beta x\bigr)\cos\bigl(\tfrac{1}{2}\beta y\bigr), \quad v(x,y) = \exp\bigl(\tfrac{1}{2}\beta x\bigr)\sin\bigl(\tfrac{1}{2}\beta y\bigr)$$

приводит к уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 4a\beta^{-2} w,$$

которое рассматривается в разд. 7.3.2.

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = ke^{ax+by} w.$

Преобразование

$$\xi = ax + by, \quad \eta = bx - ay$$

приводит к уравнению вида 7.4.1.4:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = \frac{k}{a^2+b^2} e^{\xi} w.$$

ТАБЛИЦА 24

Преобразования, приводящие уравнение 7.4.1.3 к уравнению Гельмгольца $\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = bw$.

№	Показатель k	Преобразование	Множитель b
1	$k=1$	$\xi = \frac{1}{2}(x^2-y^2),\ \eta = xy$	$b=a$
2	$k=2$	$\xi = \frac{1}{3}x^3 - xy^2,\ \eta = x^2y - \frac{1}{3}y^3$	$b=a$
3	$k=-1$	$\xi = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2),\ \eta = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$	$b=a$
4	$k=-2$	$\xi = -\dfrac{x}{x^2+y^2},\ \eta = \dfrac{y}{x^2+y^2}$	$b=a$
5	$k=-\frac{1}{2}$	$x = \frac{1}{2}(\xi^2-\eta^2),\ y = \xi\eta$	$b=2a$
6	$k=\pm 3,\ \pm 4,\ \dots$	$\xi = \dfrac{(x+iy)^{k+1}+(x-iy)^{k+1}}{2(k+1)},\ \eta = \dfrac{(x+iy)^{k+1}-(x-iy)^{k+1}}{2(k+1)i}$	$b=a$
7	k — любое ($k \neq -1$)	$\xi = \dfrac{\rho^{k+1}\cos[(k+1)\varphi]}{k+1},\ \eta = \dfrac{\rho^{k+1}\sin[(k+1)\varphi]}{k+1}$ $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$	$b=a$

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(ax+by)w.$

Частный случай уравнения 7.4.1.9 при $g(u)=0$. Частные решения:

$$w(x,y) = \bigl\{C_1\cos[k(bx-ay)] + C_2\sin[k(bx-ay)]\bigr\}\varphi(ax+by),$$

где C_1, C_2, k — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\varphi''_{\xi\xi} - \left[\frac{1}{a^2+b^2}f(\xi) + k^2\right]\varphi = 0.$$

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x^2+y^2)w.$

1°. Это уравнение допускает разделение переменных в полярных координатах ρ, φ ($x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$). Частное решение

$$w(x,y) = \bigl[C_1\cos(k\varphi) + C_2\sin(k\varphi)\bigr]U(\rho),$$

где C_1, C_2, k — произвольные постоянные, а функция $U=U(\rho)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$\rho(\rho U'_\rho)'_\rho - \bigl[k^2 + \rho^2 f(\rho^2)\bigr]U = 0.$$

2°. Преобразование

$$z = \tfrac{1}{2}(x^2-y^2), \qquad \zeta = xy$$

приводит к уравнению такого же типа

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} = F(z^2+\zeta^2)w, \qquad F(u) = \frac{f(2\sqrt{u}\,)}{2\sqrt{u}}.$$

В частном случае $f(u)=2a$ имеем $F(u)=a/\sqrt{u}$. При $f(u)=bu^3$ получим уравнение вида 7.4.1.1 с $F(u)=4bu$.

8. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \bigl[f(x)+g(y)\bigr]w.$

Частное решение с разделяющимися переменными:

$$w(x,y) = \varphi(x)\psi(y),$$

где функции $\varphi(x)$, $\psi(y)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка (C — произвольная постоянная)

$$\varphi''_{xx} - [f(x) - C]\varphi = 0, \quad \psi''_{yy} - [g(y) + C]\psi = 0.$$

9. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \big[f(ax+by) + g(bx-ay)\big]w.$

Преобразование

$$\xi = ax + by, \quad \eta = bx - ay$$

приводит к уравнению вида 7.4.1.8:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = \left[\frac{f(\xi)}{a^2+b^2} + \frac{g(\eta)}{a^2+b^2}\right]w.$$

10. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = (x^2+y^2)\big[f(x^2-y^2) + g(xy)\big]w.$

Преобразование

$$z = \tfrac{1}{2}(x^2 - y^2), \quad \zeta = xy$$

приводит к уравнению вида 7.4.1.8:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} = \big[f(2z) + g(\zeta)\big]w.$$

7.4.2. Уравнения конвективного тепло- и массопереноса

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \alpha\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Это уравнение конвективного тепло- и массопереноса, которое описывает стационарное поле температуры (концентрации) в среде, движущейся с постоянной скоростью вдоль оси x. В частности, оно моделирует конвективно-молекулярный перенос тепла от нагретой пластины, продольно обтекаемой потоком теплопроводной идеальной жидкости. Такая ситуация имеет место при обтекании пластины жидкометаллическим теплоносителем или фильтрационным потоком в зернистой среде.

Далее будем считать, что уравнение записано в безразмерных переменных x, y, которые отнесены к характерному масштабу длины (для плоской пластины длины $2h$ за характерный масштаб длины принимается h).

1°. Замена $w(x,y) = \exp\big(\frac{1}{2}\alpha x\big)U(x,y)$ приводит исходное уравнение к уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1}{4}\alpha^2 U,$$

частные решения которого в декартовых и полярных координатах указаны в разд. 7.3.2–7.3.3.

2°. В эллиптических координатах

$$x = \operatorname{ch}\zeta\cos\eta, \qquad y = \operatorname{sh}\zeta\sin\eta$$

широкий класс точных решений (которые стремятся к нулю при $\zeta \to \infty$) исходного уравнения можно представить в виде ряда

$$w = \exp\big(\tfrac{1}{2}\alpha x\big)\sum_{m=0}^{\infty} A_m \operatorname{ce}_m(\eta, -q)\operatorname{Fek}_m(\zeta, -q), \qquad q = -\tfrac{1}{16}\alpha^2.$$

Здесь A_m — произвольные постоянные, $\operatorname{ce}_m(\eta,-q)$ — функции Матье, а $\operatorname{Fek}_m(\zeta,-q)$ — модифицированные функции Матье, которые подробно описаны в книгах Г. Бейтмена, А. Эрдейи (1967) и Н. В. Мак-Лахлана (1953).

3°. Рассмотрим первую краевую задачу в верхней полуплоскости ($-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$). Считаем, что на поверхности пластины конечной длины поддерживается постоянная температура w_0, а вдали от пластины среда имеет температуру $w_\infty = \mathrm{const}$:

$$\begin{aligned} w &= w_0 && \text{при} \quad y = 0, \ |x| < 1, \\ \partial_y w &= 0 && \text{при} \quad y = 0, \ |x| > 1, \\ w &\to w_\infty && \text{при} \quad x^2 + y^2 \to \infty. \end{aligned}$$

Решение этой задачи в эллиптических координатах ζ, η (см. п. 2°) имеет вид

$$w(\eta,\zeta) = w_\infty + (w_0 - w_\infty)\exp\left(\tfrac{1}{2}\alpha\cos\eta\operatorname{ch}\zeta\right)\sum_{m=0}^{\infty} D_m \operatorname{ce}_m(\eta,-q)\frac{\operatorname{Fek}_m(\zeta,-q)}{\operatorname{Fer}_m(0,-q)},$$

где

$$D_{2n} = 2\frac{\operatorname{ce}_{2n}(0,-q)}{\operatorname{ce}_{2n}(0,q)}A_0^{(2n)},\quad D_{2n+1} = -\frac{1}{2}\frac{\operatorname{ce}_{2n+1}(0,-q)}{\operatorname{ce}_{2n+1}(0,q)}\alpha B_1^{(2n+1)},\quad q = -\frac{1}{16}\alpha^2.$$

Здесь $A_0^{(2n)}$, $B_1^{(2n+1)}$ — коэффициенты разложения функций Матье в ряды, приведенные в книге Н. В. Мак-Лахлана (1953).

4°. Рассмотрим вторую краевую задачу в верхней полуплоскости ($-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$). Считаем, что на поверхности пластины конечной длины задано распределение теплового потока, а вдали от пластины среда имеет постоянную температуру:

$$\begin{aligned} \partial_y w &= f(x) && \text{при}\quad y = 0,\ |x| < 1,\\ \partial_y w &= 0 && \text{при}\quad y = 0,\ |x| > 1,\\ w &\to w_\infty && \text{при}\quad x^2 + y^2 \to \infty. \end{aligned}$$

Решение этой задачи в декартовых координатах имеет вид

$$w(x,y) = w_\infty - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} f(\xi)\exp\left[\tfrac{1}{2}\alpha(x-\xi)\right]K_0\left(\tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{(x-\xi)^2+y^2}\right)d\xi,$$

где $K_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода.

⊙ *Литература*: П. В. Черпаков (1975, стр. 104), А. А. Борзых, Г. П. Черепанов (1978).

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \alpha\dfrac{\partial w}{\partial x} + \beta\dfrac{\partial w}{\partial y} + \gamma w.$

Это уравнение описывает стационарное поле температуры (концентрации) в движущейся с постоянной скоростью среде при наличии объемного выделения (поглощения) тепла, которое пропорционально температуре.

Замена

$$w(x,y) = \exp\left[\tfrac{1}{2}(\alpha x + \beta y)\right]U(x,y)$$

приводит исходное уравнение к уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \left(\gamma + \tfrac{1}{4}\alpha^2 + \tfrac{1}{4}\beta^2\right)U,$$

которое рассматривается в разд. 7.3.1–7.3.3.

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \mathrm{Pe}\,(1 - y^2)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Уравнение Грета — Нуссельта. Оно описывает стационарный теплообмен при ламинарном течении жидкости с параболическим профилем скорости в плоском канале. Уравнение записано в безразмерных прямоугольных координатах x, y, которые отнесены к полуширине канала h; $\mathrm{Pe} = Uh/a$ — число Пекле, U — скорость жидкости на оси канала (при $y = 0$). Стенки канала определяются значениями $y = \pm 1$.

1°. Частные решения:

$$\begin{aligned} w(y) &= A + By,\\ w(x,y) &= 12Ax + A\,\mathrm{Pe}\,(6y^2 - y^4) + B,\\ w(x,y) &= \sum_{n=1}^{m} A_n \exp\left(-\frac{\lambda_n^2}{\mathrm{Pe}}x\right)f_n(y). \end{aligned}$$

Здесь A, B, A_n, λ_n — произвольные постоянные, а функции f_n определяются формулами

$$f_n(y) = \exp\left(-\tfrac{1}{2}\lambda_n y^2\right)\Phi\left(\alpha_n,\ \tfrac{1}{2};\ \lambda_n y^2\right),\quad \alpha_n = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\lambda_n - \tfrac{1}{4}\lambda_n^3\,\mathrm{Pe}^{-2}, \tag{1}$$

где $\Phi(\alpha,\beta;\xi) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)}{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+k-1)}\frac{\xi^k}{k!}$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

2°. Пусть на стенках канала поддерживается постоянная температура, равная нулю при $x<0$ и w_0 — при $x>0$. Ввиду симметрии задачи относительно оси x достаточно рассмотреть половину области: $0 \leqslant y \leqslant 1$. Соответствующие граничные условия записываются так:

$$y=0, \qquad \frac{\partial w}{\partial y}=0; \qquad y=1, \qquad w=\begin{cases} 0 & \text{при } x<0, \\ w_0 & \text{при } x>0; \end{cases}$$

$$x\to-\infty, \quad w\to 0; \qquad x\to\infty, \quad w\to w_0.$$

Решение исходного уравнения с этими граничными условиями ищется в виде

$$w(x,y)=w_0\sum_{n=1}^{\infty}B_n\exp\Bigl(\frac{\mu_n^2}{\mathrm{Pe}}x\Bigr)g_n(y) \qquad \text{при} \quad x<0,$$

$$w(x,y)=w_0\Biggl[1-\sum_{n=1}^{\infty}A_n\exp\Bigl(-\frac{\lambda_n^2}{\mathrm{Pe}}x\Bigr)f_n(y)\Biggr] \quad \text{при} \quad x>0.$$

Коэффициенты рядов должны удовлетворять условиям сопряжения решений на границе:

$$w(x,y)\big|_{x\to0,\,x<0}-w(x,y)\big|_{x\to0,\,x>0}=0,$$

$$\partial_x w(x,y)\big|_{x\to0,\,x<0}-\partial_x w(x,y)\big|_{x\to0,\,x>0}=0.$$

В области $x>0$ функции $f_n(y)$ определяются формулами (1), где собственные значения λ_n являются корнями трансцендентного уравнения

$$\Phi\bigl(\alpha_n,\ \tfrac12;\ \lambda_n\bigr)=0, \quad \text{где} \quad \alpha_n=\tfrac14-\tfrac14\lambda_n-\tfrac14\lambda_n^3\,\mathrm{Pe}^{-2}.$$

При $\mathrm{Pe}\to\infty$ для определения собственных значений λ_n удобно использовать приближенную зависимость

$$\lambda_n=4(n-1)+1{,}68 \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \dots), \tag{2}$$

максимальная погрешность которой меньше 0,2%. Соответствующие численные значения коэффициентов A_n хорошо аппроксимируются выражениями:

$$A_1=1{,}2, \quad A_n=2{,}27(-1)^{n-1}\lambda_n^{-7/6} \qquad \text{при} \quad n=2,\ 3,\ 4,\ \dots,$$

максимальная погрешность которых составляет меньше 0,1% [λ_n вычисляются по формуле (2)].

При $\mathrm{Pe}\to0$ справедливы асимптотические соотношения:

$$\lambda_n=\sqrt{\tfrac{\pi}{2}(2n-1)\mathrm{Pe}}, \quad A_n=\frac{4(-1)^{n-1}}{\pi^2(2n-1)^2}, \quad f_n(y)=\cos\bigl[\tfrac{\pi}{2}(2n-1)y\bigr] \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \dots).$$

Результаты для области $x<0$ не здесь приводятся (они играют второстепенную роль в приложениях).

3°. Пусть при $x>0$ на стенках канала задан постоянный тепловой поток, при $x<0$ стенки теплоизолированы и температура стремится к нулю при $x\to-\infty$. Соответствующие граничные условия имеют вид

$$y=0, \quad \frac{\partial w}{\partial y}=0; \qquad y=1, \quad \frac{\partial w}{\partial y}=\begin{cases} 0 & \text{при } x<0, \\ q & \text{при } x>0; \end{cases} \qquad x\to-\infty, \quad w\to0.$$

Асимптотика решения в области тепловой стабилизации (при $x\to\infty$):

$$w(x,y)=q\Bigl(\frac32\,\frac{x}{\mathrm{Pe}}+\frac34y^2-\frac18y^4+\frac{9}{4\mathrm{Pe}^2}-\frac{39}{280}\Bigr).$$

⊙ *Литература*: L. Graetz (1883), W. Nusselt (1910), C. A. Deavours (1974), А. М. Кутепов, А. Д. Полянин, З. Д. Запрянов и др. (1996, стр. 131–133).

4. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac1r\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=\mathrm{Pe}\,(1-r^2)\frac{\partial w}{\partial z}.$

Это уравнение описывает стационарный теплообмен при ламинарном течении жидкости с параболическим (пуазейлевым) профилем скорости в круглой трубе. Уравнение записано в безразмерных цилиндрических координатах r, z, которые отнесены к радиусу трубы R; $\mathrm{Pe}=UR/a$ — число Пекле, U — скорость жидкости на оси трубы (при $r=0$). Стенки трубы определяются значением $r=1$.

1°. Частные решения:

$$w(r) = A + B\ln r,$$
$$w(r,z) = 16Az + A\,\mathrm{Pe}\,(4r^2 - r^4) + B,$$
$$w(r,z) = \sum_{n=1}^{m} A_n \exp\Bigl(-\frac{\lambda_n^2}{\mathrm{Pe}}z\Bigr) f_n(r).$$

Здесь A, B, A_n, λ_n — произвольные постоянные, а функции f_n определяются формулами

$$f_n(r) = \exp\bigl(-\tfrac{1}{2}\lambda_n r^2\bigr)\Phi\bigl(\alpha_n,\ 1;\ \lambda_n r^2\bigr), \quad \alpha_n = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\lambda_n - \tfrac{1}{4}\lambda_n^3\,\mathrm{Pe}^{-2}, \tag{1}$$

где $\Phi(\alpha,\beta;\xi)$ — вырожденная гипергеометрическая функция (см. уравнение 7.4.2.3, п. 1°).

2°. Пусть на стенках трубы поддерживается постоянная температура, равная нулю при $z < 0$ и w_0 — при $z > 0$. Соответствующие граничные условия имеют вид

$$r = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0; \qquad r = 1, \quad w = \begin{cases} 0 & \text{при } z < 0, \\ w_0 & \text{при } z > 0; \end{cases}$$
$$z \to -\infty, \quad w \to 0; \qquad z \to \infty, \quad w \to w_0.$$

Решение исходного уравнения с этими граничными условиями ищется в виде

$$w(r,z) = w_0 \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp\Bigl(\frac{\mu_n^2}{\mathrm{Pe}}z\Bigr) g_n(r) \qquad \text{при} \quad z < 0,$$
$$w(r,z) = w_0 \Bigl[1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\Bigl(-\frac{\lambda_n^2}{\mathrm{Pe}}z\Bigr) f_n(r)\Bigr] \quad \text{при} \quad z > 0.$$

Коэффициенты рядов должны удовлетворять условиям сопряжения решений на границе:

$$w(r,z)\big|_{z\to 0,\, z<0} - w(r,z)\big|_{z\to 0,\, z>0} = 0,$$
$$\partial_z w(r,z)\big|_{z\to 0,\, z<0} - \partial_z w(r,z)\big|_{z\to 0,\, z>0} = 0.$$

В области $z > 0$ функции $f_n(r)$ определяются формулами (1), где собственные значения λ_n являются корнями трансцендентного уравнения

$$\Phi\bigl(\alpha_n,\ 1;\ \lambda_n\bigr) = 0, \quad \text{где} \quad \alpha_n = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\lambda_n - \tfrac{1}{4}\lambda_n^3\,\mathrm{Pe}^{-2}.$$

При $\mathrm{Pe} \to \infty$ для определения собственных значений λ_n удобно использовать приближенную зависимость

$$\lambda_n = 4(n-1) + 2{,}7 \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots), \tag{2}$$

максимальная погрешность которой равна 0,3%. Соответствующие численные значения коэффициентов A_n хорошо аппроксимируются выражениями:

$$A_n = 2{,}85(-1)^{n-1}\lambda_n^{-2/3} \qquad \text{при} \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\,,$$

максимальная погрешность которых составляет 0,5%.

Результаты для области $z < 0$ не здесь приводятся (они играют второстепенную роль в приложениях).

3°. Пусть при $z > 0$ на поверхности трубы задан постоянный тепловой поток, а при $z < 0$ поверхность трубы теплоизолирована и температура стремится к нулю при $z \to -\infty$. Соответствующие граничные условия имеют вид

$$r = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0; \qquad r = 1, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = \begin{cases} 0 & \text{при } z < 0, \\ q & \text{при } z > 0; \end{cases} \qquad z \to -\infty, \quad w \to 0.$$

Асимптотика решения в области тепловой стабилизации (при $z \to \infty$):

$$w(r,z) = q\Bigl(4\frac{z}{\mathrm{Pe}} + r^2 - \frac{1}{4}r^4 + \frac{8}{\mathrm{Pe}^2} - \frac{7}{24}\Bigr).$$

⊙ *Литература*: C. A. Deavours (1974), А. М. Кутепов, А. Д. Полянин, З. Д. Запрянов и др. (1996, стр. 122–130).

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(y)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Это уравнение описывает стационарный теплообмен при ламинарном течении жидкости с произвольным профилем скорости $f = f(y)$ в плоском канале.

1°. Частные решения:

$$w(x,y) = Ax + A\int_{y_0}^{y}(y-\xi)f(\xi)\,d\xi + By + C, \tag{1}$$

$$w(x,y) = B + \sum_{n=1}^{m} A_n \exp(-\beta_n x)u_n(y). \tag{2}$$

Здесь A, B, C, y_0, A_n, β_n — произвольные постоянные, а функции $u_n = u_n(y)$ определяются из линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2u_n}{dy^2} + \left[\beta_n f(y) + \beta_n^2\right]u_n = 0.$$

2°. Решение (1) описывает распределение температуры вдали от входного сечения в области тепловой стабилизации при заданном постоянном тепловом потоке на стенках канала.

6. $a\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = v_1(x,y)\dfrac{\partial w}{\partial x} + v_2(x,y)\dfrac{\partial w}{\partial y}.$

Уравнение стационарного конвективного тепло- и массопереноса, записанное в декартовой системе координат. Здесь $v_1 = v_1(x,y)$, $v_2 = v_2(x,y)$ — компоненты скорости жидкости, которые считаются известными из решения соответствующей гидродинамической задачи.

1°. В плоских задачах конвективного теплообмена жидких металлов, использующих модель идеальной жидкости, и при описании фильтрационных потоков, использующих модель потенциальных течений, компоненты скорости жидкости $v_1(x,y)$ и $v_2(x,y)$ можно выразить через потенциал $\varphi = \varphi(x,y)$ и функцию тока $\psi = \psi(x,y)$ по формулам

$$v_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad v_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{1}$$

Функция φ определяется путем решения уравнения Лапласа $\Delta\varphi = 0$. В конкретных задачах потенциал φ и функцию тока ψ можно найти с помощью методов теории функций комплексного переменного, см. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат (1973) и Л. И. Седов (1966).

Переходя в уравнении конвективного теплообмена от x, y к новым переменным φ, ψ (преобразование Буссинеска) с учетом равенств (1), получим более простое уравнение с постоянными коэффициентами вида 7.4.2.1:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial\psi^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial w}{\partial\varphi}. \tag{2}$$

Поскольку преобразование Буссинеска одновременно с приведением исходного уравнения к виду (2) переводит любой потенциально обтекаемый плоский контур в разрез по оси φ, задача теплопереноса при потенциальном обтекании этого тела сводится к задаче теплообмена при продольном обтекании пластины идеальной жидкостью (см. уравнение 7.4.2.1, пп. 3°–4°).

2°. Асимптотический анализ плоских задач о тепло- и массообмене тел различной формы с ламинарным поступательным и сдвиговым потоками вязкой (и идеальной) несжимаемой жидкости при больших и малых числах Пекле проводился в работах, указанных ниже. В приближении теплового пограничного слоя решение задачи о теплообмене плоской пластины, продольно обтекаемой поступательным потоком вязкой несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса, приведено в 1.9.1.4, п. 3°.

⊙ *Литература*: В. Г. Левич (1959), П. В. Черпаков (1975, стр. 104), А. А. Борзых, Г. П. Черепанов (1978), Ю. П. Гупало, А. Д. Полянин, Ю. С. Рязанцев (1985), А. М. Кутепов, А. Д. Полянин, З. Д. Запрянов и др. (1996).

7. $\displaystyle \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial w}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)=\cos\theta\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}.$

Частный случай уравнения 7.4.1.8 при $a=1$, $v_r=\cos\theta$, $v_\theta=-\sin\theta$. Это уравнение получено из уравнения $\partial_{xx}w+\partial_{yy}w+\partial_{zz}w=\partial_x w$ переходом к сферической системе координат для осесимметричного случая.

Общее решение, удовлетворяющее условию затухания ($w\to 0$ при $r\to\infty$):

$$w(r,\theta)=\left(\frac{\pi}{r}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{r\cos\theta}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}A_nK_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{r}{2}\right)P_n(\cos\theta),$$

где A_n — произвольные постоянные. Полиномы Лежандра $P_n(\xi)$ и модифицированные функции Бесселя $K_{n+\frac{1}{2}}(z)$ определяются по формулам:

$$K_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{r}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{r}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{r}{2}\right)\sum_{m=0}^{n}\frac{(n+m)!}{(n-m)!\,m!\,r^m},\qquad P_n(\xi)=\frac{1}{n!\,2^n}\frac{d^n}{d\xi^n}(\xi^2-1)^n.$$

⊙ *Литература*: P. L. Rimmer (1968).

8. $\displaystyle a\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial w}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)\right]=v_r\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}.$

Это уравнение часто встречается в осесимметричных задачах о конвективном тепло- и массообмене твердых частиц, капель и пузырей, движущихся в вязкой несжимаемой жидкости (или обтекаемых жидкостью). Компоненты вектора скорости $v_r=v_r(r,\theta)$, $v_\theta=v_\theta(r,\theta)$ можно выразить через функцию тока $\psi=\psi(r,\theta)$ по формулам

$$v_r=\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\qquad v_\theta=-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}.\tag{1}$$

Асимптотический анализ широкого класса осесимметричных задач о тепло- и массообмене твердых частиц, капель и пузырей различной формы с ламинарным поступательным и сдвиговым потоком вязкой несжимаемой жидкости при больших и малых числах Пекле $\mathrm{Pe}=UR/a$ проводился в книгах, указанных ниже. В выражение для числа Пекле входят следующие величины: U — характерная скорость (невозмущенная скорость жидкости вдали от частицы в случае поступательного потока), R — характерный размер частицы (радиус для сферической частицы).

Обычно рассматриваются задачи с граничными условиями

$$w=w_0\quad\text{при}\quad r=R,\qquad w\to w_\infty\quad\text{при}\quad r\to\infty,\tag{2}$$

где R — радиус частицы, w_0 — температура ее поверхности, w_∞ — температура вдали от частицы (w_0, $w_\infty=\mathrm{const}$).

Задачи конвективного массопереноса характеризуются большими числами Пекле. При этом часто используется приближение диффузионного пограничного слоя, когда в левой части уравнения учитывается только диффузионный перенос вещества по нормали к поверхности частицы (тангенциальным переносом вещества пренебрегается). Конвективные члены в правой части уравнения частично сохраняются — компоненты скорости жидкости аппроксимируются своими главными членами разложения вблизи межфазной поверхности. Ниже приведены некоторые важные результаты, полученные путем решения исходного уравнения с граничными условиями (2) в приближении диффузионного пограничного слоя.

Пример 1. При обтекании сферического пузыря поступательным стоксовым потоком вязкой несжимаемой жидкости функция тока имеет вид

$$\psi(r,\theta)=\frac{1}{2}Ur(r-R)\sin^2\theta.$$

Здесь U — невозмущенная скорость жидкости в набегающем потоке, R — радиус пузыря (значение $\theta=\pi$ соответствует передней критической точке поверхности пузыря).

В этом случае решение уравнения конвективного тепло- и массопереноса с граничными условиями (2), полученное при $\mathrm{Pe}=UR/a\gg 1$ в приближении диффузионного пограничного слоя, дается формулой

$$w(r,\theta)=w_0+(w_\infty-w_0)\operatorname{erf}\xi,\quad \xi=\sqrt{\tfrac{3}{8}\,\mathrm{Pe}}\left(\frac{r}{R}-1\right)\frac{1-\cos\theta}{\sqrt{2-\cos\theta}},$$

где $\operatorname{erf}\xi$ — интеграл вероятностей.

Пример 2. При обтекании твердой сферической частицы поступательным стоксовым потоком вязкой несжимаемой жидкости функция тока определяется выражением

$$\psi(r,\theta) = \frac{1}{4}U(r-R)^2\left(2+\frac{R}{r}\right)\sin^2\theta.$$

Здесь использованы те же обозначения, что и в случае пузыря.

Для твердой частицы решение уравнения конвективного тепло- и массопереноса с граничными условиями (2), полученное при $\mathrm{Pe} = UR/a \gg 1$ в приближении диффузионного пограничного слоя, дается формулой

$$w(r,\theta) = w_0 + (w_\infty - w_0)\left[\Gamma\left(\tfrac{1}{3}\right)\right]^{-1}\gamma\left(\tfrac{1}{3},\xi\right), \qquad \xi = \frac{\mathrm{Pe}\,(r-R)^3\sin^3\theta}{3R^3\left(\pi-\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)},$$

где $\Gamma(\beta)$ — гамма-функция, $\gamma(\beta,\xi) = \int_0^\xi e^{-z}z^{\beta-1}\,dz$ — неполная гамма-функция.

⊙ *Литература*: В. Г. Левич (1959), Ю. П. Гупало, А. Д. Полянин, Ю. С. Рязанцев (1985), А. М. Кутепов, А. Д. Полянин, З. Д. Запрянов и др. (1996).

7.4.3. Уравнения тепло- и массопереноса в анизотропных средах

1. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(by^m\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) = 0.$

Двумерное уравнение теории тепло- и массопереноса в неоднородной анизотропной среде. Здесь $a_1(x) = ax^n$ и $a_2(y) = by^m$ — главные коэффициенты температуропроводности.

1°. Частные решения (A, B, C — произвольные постоянные):

$$w(x,y) = Ax^{1-n} + By^{1-m} + C,$$
$$w(x,y) = A\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)} - \frac{y^{2-m}}{b(2-m)}\right] + B,$$
$$w(x,y) = Ax^{1-n}y^{1-m} + B.$$

2°. При $n \neq 2$, $m \neq 2$ существуют частные решения вида

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \left[b(2-m)^2x^{2-n} + a(2-n)^2y^{2-m}\right]^{1/2}.$$

Здесь функция $w = w(\xi)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$w''_{\xi\xi} + \frac{A}{\xi}w'_\xi = 0, \qquad A = \frac{4-nm}{(2-n)(2-m)}. \tag{1}$$

Общее решение уравнения (1) дается формулами

$$w(\xi) = \begin{cases} C_1\xi^{1-A} + C_2 & \text{при } A \neq 1,\\ C_1\ln\xi + C_2 & \text{при } A = 1,\end{cases}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

3°. Существуют частные решения с разделяющимися переменными:

$$w(x,y) = \varphi(x)\psi(y), \tag{2}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ определяются из линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (A_1 — произвольная постоянная)

$$(ax^n\varphi'_x)'_x = -A_1\varphi, \tag{3}$$
$$(by^m\psi'_y)'_y = A_1\psi. \tag{4}$$

Решение уравнения (3) дается формулами

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^{\frac{1-n}{2}}\left[C_1J_\nu\left(\beta x^{\frac{2-n}{2}}\right) + C_2Y_\nu\left(\beta x^{\frac{2-n}{2}}\right)\right] & \text{при } A_1 > 0,\\ x^{\frac{1-n}{2}}\left[C_1I_\nu\left(\beta x^{\frac{2-n}{2}}\right) + C_2K_\nu\left(\beta x^{\frac{2-n}{2}}\right)\right] & \text{при } A_1 < 0,\end{cases}$$

$$\nu = \frac{|1-n|}{2-n}, \qquad \beta = \frac{2}{2-n}\sqrt{\frac{|A_1|}{a}},$$

где C_1 и C_2 — произвольная постоянная, $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ — функции Бесселя, $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ — модифицированные функции Бесселя.

Решение уравнения (4) дается формулами

$$\psi(y)=\begin{cases} y^{\frac{1-m}{2}}\left[C_1 J_\sigma\left(\mu y^{\frac{2-m}{2}}\right)+C_2 Y_\sigma\left(\mu y^{\frac{2-m}{2}}\right)\right] & \text{при } A_1<0,\\ y^{\frac{1-m}{2}}\left[C_1 I_\sigma\left(\mu y^{\frac{2-m}{2}}\right)+C_2 K_\sigma\left(\mu y^{\frac{2-m}{2}}\right)\right] & \text{при } A_1>0,\end{cases}$$

$$\sigma=\frac{|1-m|}{2-m},\qquad \mu=\frac{2}{2-m}\sqrt{\frac{|A_1|}{b}},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Сумма решений вида (2), соответствующих различным значениям параметра A_1, также будет решением исходного уравнения (решения некоторых краевых задач можно получить методом разделения переменных).

2. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(by^m\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)=c.$

Двумерное уравнение теории тепло- и массопереноса с постоянным объемным тепловыделением в неоднородной анизотропной среде. Здесь $a_1(x)=ax^n$ и $a_2(y)=by^m$ — главные коэффициенты температуропроводности.

1°. При $n\neq 2$, $m\neq 2$ существуют частные решения вида

$$w=w(\xi),\qquad \xi=\left[b(2-m)^2x^{2-n}+a(2-n)^2y^{2-m}\right]^{1/2}. \tag{1}$$

Здесь функция $w=w(\xi)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$w''_{\xi\xi}+\frac{A}{\xi}w'_\xi=B, \tag{2}$$

где

$$A=\frac{4-nm}{(2-n)(2-m)},\qquad B=\frac{4c}{ab(2-n)^2(2-m)^2}. \tag{3}$$

Общее решение уравнения (2) имеет вид

$$w(\xi)=\begin{cases} C_1\xi^{1-A}+C_2+\frac{B}{2(A+1)}\xi^2 & \text{при } A\neq\pm1,\\ C_1\ln\xi+C_2+\frac14 B\xi^2 & \text{при } A=1,\\ C_1\xi^2+C_2+\frac12 B\xi^2\ln\xi & \text{при } A=-1,\end{cases}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

2°. Замена

$$w(x,y)=U(x,y)+\frac{c}{a(2-n)}x^{2-n}$$

приводит к однородному уравнению вида 7.4.3.1:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(ax^n\frac{\partial U}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(by^m\frac{\partial U}{\partial y}\right)=0.$$

3. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(by^m\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)=cw.$

Двумерное уравнение теории тепло- и массопереноса с линейным источником в неоднородной анизотропной среде.

1°. При $n\neq 2$, $m\neq 2$ существуют частные решения вида

$$w=w(\xi),\qquad \xi=\left[b(2-m)^2x^{2-n}+a(2-n)^2y^{2-m}\right]^{1/2}.$$

Здесь функция $w=w(\xi)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$w''_{\xi\xi}+\frac{A}{\xi}w'_\xi=Bw, \tag{1}$$

где

$$A=\frac{4-nm}{(2-n)(2-m)},\qquad B=\frac{4c}{ab(2-n)^2(2-m)^2}.$$

Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$w(\xi) = \xi^{\frac{1-A}{2}} \left[C_1 J_\nu\left(\xi\sqrt{|B|}\right) + C_2 Y_\nu\left(\xi\sqrt{|B|}\right) \right] \quad \text{при } B < 0,$$

$$w(\xi) = \xi^{\frac{1-A}{2}} \left[C_1 I_\nu\left(\xi\sqrt{B}\right) + C_2 K_\nu\left(\xi\sqrt{B}\right) \right] \quad \text{при } B > 0,$$

где $\nu = \frac{1}{2}|1 - A|$; C_1 и C_2 — произвольные постоянные; $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ — функции Бесселя; $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ — модифицированные функции Бесселя.

2°. Существуют частные решения с разделяющимися переменными:

$$w(x, y) = \varphi(x)\psi(y),$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ определяются из линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (A_1 — произвольная постоянная)

$$(ax^n \varphi'_x)'_x = A_1 \varphi, \qquad (by^m \psi'_y)'_y = (c - A_1)\psi. \tag{2}$$

Решения уравнений (2) выражаются через функции Бесселя (или модифицированные функции Бесселя), см. уравнение 7.4.3.1, п. 3°.

3°. Существуют частные решения в виде суммы двух функций различных аргументов:

$$w(x, y) = f(x) + g(y),$$

где $f(x)$ и $g(y)$ определяются из линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (A_2 — произвольная постоянная)

$$(ax^n f'_x)'_x - cf = A_2, \qquad (by^m g'_y)'_y - cg = -A_2. \tag{3}$$

Решения уравнений (3) выражаются через функции Бесселя (или модифицированные функции Бесселя).

4. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x}\left[a(x+k)^n \frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[b(y+s)^m \frac{\partial w}{\partial y}\right] = c.$

Преобразование $\zeta = x + k$, $\eta = y + s$ приводит к уравнению вида 7.4.3.2:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(a\zeta^n \frac{\partial w}{\partial \zeta}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(b\eta^m \frac{\partial w}{\partial \eta}\right) = c.$$

5. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x}\left[a(x+k)^n \frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[b(y+s)^m \frac{\partial w}{\partial y}\right] = cw.$

Преобразование $\zeta = x + k$, $\eta = y + s$ приводит к уравнению вида 7.4.3.3:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(a\zeta^n \frac{\partial w}{\partial \zeta}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(b\eta^m \frac{\partial w}{\partial \eta}\right) = cw.$$

6. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\beta x} \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(be^{\mu y} \frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0.$

Двумерное уравнение теории тепло- и массопереноса в неоднородной анизотропной среде. Здесь $a_1(x) = ae^{\beta x}$ и $a_2(y) = be^{\mu y}$ — главные коэффициенты температуропроводности.

1°. Частные решения (A, B, C — любые):

$$w(x, y) = Ae^{-\beta x} + Be^{-\mu y} + C,$$

$$w(x, y) = \frac{A}{a\beta^2}(\beta x + 1)e^{-\beta x} - \frac{A}{b\mu^2}(\mu y + 1)e^{-\mu y} + B,$$

$$w(x, y) = Ae^{-\beta x - \mu y} + B.$$

2°. Существуют частные решения с разделяющимися переменными:

$$w(x, y) = \varphi(x)\psi(y), \tag{1}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ определяются из линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (A_1 — произвольная постоянная)

$$(ae^{\beta x}\varphi'_x)'_x = -A_1\varphi, \tag{2}$$

$$(be^{\mu y}\psi'_y)'_y = A_1\psi. \tag{3}$$

Решение уравнения (2) дается формулами

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\beta x/2}\big[C_1 J_1\big(ke^{-\beta x/2}\big) + C_2 Y_1\big(ke^{-\beta x/2}\big)\big] & \text{при } A_1 > 0, \\ e^{-\beta x/2}\big[C_1 I_1\big(ke^{-\beta x/2}\big) + C_2 K_1\big(ke^{-\beta x/2}\big)\big] & \text{при } A_1 < 0, \end{cases}$$

где $k = -\dfrac{2}{\beta}\sqrt{\dfrac{|A_1|}{a}}$; C_1 и C_2 — произвольные постоянные; $J_1(z)$ и $Y_1(z)$ — функции Бесселя; $I_1(z)$ и $K_1(z)$ — модифицированные функции Бесселя.

Решение уравнения (3) дается формулами

$$\psi(y) = \begin{cases} e^{-\mu y/2}\big[C_1 J_1\big(se^{-\mu y/2}\big) + C_2 Y_1\big(se^{-\mu y/2}\big)\big] & \text{при } A_1 < 0, \\ e^{-\mu y/2}\big[C_1 I_1\big(se^{-\mu y/2}\big) + C_2 K_1\big(se^{-\mu y/2}\big)\big] & \text{при } A_1 > 0, \end{cases}$$

где $s = -\dfrac{2}{\mu}\sqrt{\dfrac{|A_1|}{b}}$; C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Сумма решений вида (1), соответствующих различным значениям параметра A_1, также будет решением исходного уравнения.

7. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ae^{\beta x}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(be^{\mu y}\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big) = c.$

Двумерное уравнение теории тепло- и массопереноса с постоянным объемным тепловыделением в неоднородной анизотропной среде. Здесь $a_1(x) = ae^{\beta x}$ и $a_2(y) = be^{\mu y}$ — главные коэффициенты температуропроводности.

Замена

$$w(x,y) = U(x,y) - \frac{c}{a\beta^2}(\beta x + 1)e^{-\beta x}$$

приводит к однородному уравнению вида 7.4.3.6:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(ae^{\beta x}\frac{\partial U}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(be^{\mu y}\frac{\partial U}{\partial y}\Big) = 0.$$

8. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ae^{\beta x}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(be^{\mu y}\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big) = cw.$

Двумерное уравнение теории тепло- и массопереноса с линейным источником в неоднородной анизотропной среде.

1°. При $\beta\mu \neq 0$ существуют частные решения вида

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \big(b\mu^2 e^{-\beta x} + a\beta^2 e^{-\mu y}\big)^{1/2},$$

где функция $w = w(\xi)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$w''_{\xi\xi} - \frac{1}{\xi}w'_{\xi} = Bw, \qquad B = \frac{4c}{ab\beta^2\mu^2}.$$

О решении этого уравнения см. 7.4.3.3 (п. 1° при $A = -1$).

2°. Исходное уравнение допускает решения в виде произведения (и суммы) двух функций различных аргументов. Об этом см. уравнение 7.4.3.10 при $f(x) = ae^{\beta x}$ и $g(y) = be^{\mu y}$.

9. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big] + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big[g(y)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big] = 0.$

Двумерное уравнение теории тепло- и массопереноса с источником в неоднородной анизотропной среде. Здесь $f = f(x)$ и $g = g(y)$ — главные коэффициенты температуропроводности.

1°. Частные решения:

$$w(x,y) = A_1\int\frac{dx}{f(x)} + B_1\int\frac{dy}{g(y)} + C_1,$$

$$w(x,y) = A_2\int\frac{x\,dx}{f(x)} - A_2\int\frac{y\,dy}{g(y)} + B_2,$$

$$w(x,y) = A_3\int\frac{dx}{f(x)}\int\frac{dy}{g(y)} + B_3,$$

где A_k, B_k, C_1 — произвольные постоянные. Линейная комбинация этих решений также является решением исходного уравнения.

2°. Существуют частные решения с разделяющимися переменными:

$$w(x,y) = \varphi(x)\psi(y), \tag{1}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ определяются из линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (A — произвольная постоянная)

$$\begin{aligned} &(f\varphi_x')_x' = A\varphi, \quad f = f(x),\\ &(g\psi_y')_y' = -A\psi, \quad g = g(y). \end{aligned} \tag{2}$$

Сумма решений вида (1), соответствующих различным значениям параметра A в (2), также будет решением исходного уравнения (решения некоторых краевых задач можно получить методом разделения переменных).

10. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big] + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big[g(y)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big] = \beta w.$

Двумерное уравнение теории тепло- и массопереноса с источником в неоднородной анизотропной среде. Здесь $f = f(x)$ и $g = g(y)$ — главные коэффициенты температуропроводности.

1°. Существуют частные решения с разделяющимися переменными:

$$w(x,y) = \varphi(x)\psi(y), \tag{1}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ определяются из линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (A — произвольная постоянная)

$$\begin{aligned} &(f\varphi_x')_x' = A\varphi, \qquad f = f(x),\\ &(g\psi_y')_y' = (\beta - A)\psi, \quad g = g(y). \end{aligned} \tag{2}$$

Сумма решений вида (1), соответствующих различным значениям параметра A в (2), также будет решением исходного уравнения (решения некоторых краевых задач можно получить методом разделения переменных).

2°. Существуют частные решения в виде суммы двух функций различных аргументов:

$$w(x,y) = \Phi(x) + \Psi(y),$$

где $\Phi(x)$ и $\Psi(y)$ определяются из линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (C — произвольная постоянная)

$$\begin{aligned} &(f\Phi_x')_x' - \beta\Phi = C, \quad f = f(x),\\ &(g\Psi_y')_y' - \beta\Psi = -C, \quad g = g(y). \end{aligned}$$

В частном случае $\beta = 0$ решение этих уравнений можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= C\int\frac{x\,dx}{f(x)} + A_1\int\frac{dx}{f(x)} + B_1,\\ \Psi(y) &= -C\int\frac{y\,dy}{g(y)} + A_2\int\frac{dy}{g(y)} + B_2, \end{aligned}$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные.

7.4.4. Другие уравнения, встречающиеся в приложениях

1. $y\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$

Уравнение Трикоми. Используется для описания околозвуковых течений газа.

1°. Частные решения (A, B, C, D, k — произвольные постоянные):

$$\begin{aligned} w(x,y) &= Ax^2 + Bx - \tfrac{1}{3}Ay^3 + Cy + D,\\ w(x,y) &= \big[A\,\mathrm{sh}(3kx) + B\,\mathrm{ch}(3kx)\big]\sqrt{y}\,\big[CJ_{1/3}(2ky^{3/2}) + DY_{1/3}(2ky^{3/2})\big],\\ w(x,y) &= \big[A\sin(3kx) + B\cos(3kx)\big]\sqrt{y}\,\big[CI_{1/3}(2ky^{3/2}) + DK_{1/3}(2ky^{3/2})\big], \end{aligned}$$

где $J_{1/3}(z)$ и $Y_{1/3}(z)$ — функции Бесселя, $I_{1/3}(z)$ и $K_{1/3}(z)$ — модифицированные функции Бесселя.

2°. Для $y > 0$ см. также уравнение 7.4.4.2 при $n = 1$. Для $y < 0$ замена $y = -t$ приводит к уравнению вида 4.3.3.10 при $n = 1$.

⊙ *Литература*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 241–248).

2. $y^n \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$

1°. Частные решения (A, B, C, D, k — произвольные постоянные):

$$w(x,y) = Ax^2 + Bx - \frac{2A}{(n+1)(n+2)} y^{n+2} + Cy + D,$$
$$w(x,y) = \bigl[A\,\mathrm{sh}(kqx) + B\,\mathrm{ch}(kqx)\bigr]\sqrt{y}\,\bigl[CJ_{\frac{1}{2q}}(ky^q) + DY_{\frac{1}{2q}}(ky^q)\bigr], \quad q = \tfrac{1}{2}(n+2),$$
$$w(x,y) = \bigl[A\sin(kqx) + B\cos(kqx)\bigr]\sqrt{y}\,\bigl[CI_{\frac{1}{2q}}(ky^q) + DK_{\frac{1}{2q}}(ky^q)\bigr],$$

где $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ — функции Бесселя, $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ — модифицированные функции Бесселя.

2°. Фундаментальные решения (при $y > 0$):

$$w_1(x,y,x_0,y_0) = k_1(r_1^2)^{-\beta} F(\beta,\beta,2\beta;1-\xi), \quad \beta = \frac{n}{2(n+2)}, \quad \xi = \frac{r_2^2}{r_1^2},$$
$$w_2(x,y,x_0,y_0) = k_2(r_1^2)^{-\beta}(1-\xi)^{1-2\beta} F(1-\beta,1-\beta,2-2\beta;1-\xi).$$

Здесь $F(a,b,c;\xi)$ — гипергеометрическая функция и использованы обозначения

$$r_1^2 = (x-x_0)^2 + \frac{4}{(n+2)^2}\Bigl(y^{\frac{n+2}{2}} + y_0^{\frac{n+2}{2}}\Bigr), \quad k_1 = \frac{1}{4\pi}\Bigl(\frac{4}{n+2}\Bigr)^{2\beta}\frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(2\beta)},$$
$$r_2^2 = (x-x_0)^2 + \frac{4}{(n+2)^2}\Bigl(y^{\frac{n+2}{2}} - y_0^{\frac{n+2}{2}}\Bigr), \quad k_2 = \frac{1}{4\pi}\Bigl(\frac{4}{n+2}\Bigr)^{2\beta}\frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)}.$$

где $\Gamma(\beta)$ — гамма-функция, x_0 и y_0 — произвольные постоянные.

Фундаментальные решения удовлетворяют условиям:

$$\partial_y w_1\big|_{y=0} = 0, \quad w_2\big|_{y=0} = 0 \qquad (x \text{ и } x_0 \text{ любые}, \ y_0 > 0).$$

Решения некоторых краевых задач рассмотрены в книге, цитируемой ниже.

⊙ *Литература*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 241–248).

3. $\frac{\partial}{\partial x}\Bigl[f_1(x)\frac{\partial w}{\partial x}\Bigr] + \frac{\partial}{\partial y}\Bigl[f_2(y)\frac{\partial w}{\partial y}\Bigr] + \lambda\bigl[g_1(x) + g_2(y)\bigr]w = 0.$

Это уравнение встречается в теории колебаний неоднородных мембран. Его решения ищутся методом разделения переменных в виде $w(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$. В цитируемой ниже работе разработан алгоритм ускоренной сходимости для решения соответствующих краевых задач на собственные значения.

⊙ *Литература*: Л. Д. Акуленко, С. В. Нестеров (1999).

7.4.5. Уравнение вида $a(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + b(x)\frac{\partial w}{\partial x} + c(x)w = -\Phi(x,y)$

7.4.5-1. Постановки краевых задач. Формулы для функции Грина.

Будем рассматривать двумерные краевые задачи для уравнения

$$a(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + b(x)\frac{\partial w}{\partial x} + c(x)w = -\Phi(x,y) \qquad (1)$$

с общими граничными условиями по переменной x:

$$\begin{aligned} s_1\partial_x w - k_1 w &= f_1(y) \quad \text{при} \quad x = x_1,\\ s_2\partial_x w + k_2 w &= f_2(y) \quad \text{при} \quad x = x_2 \end{aligned} \qquad (2)$$

и различными граничными условиями по переменной y. Считаем, что коэффициенты уравнения (1) и граничных условий (2) удовлетворяют условиям:

$a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ — непрерывные функции ($x_1 \leqslant x \leqslant x_2$); $a > 0$, $|s_1| + |k_1| > 0$, $|s_2| + |k_2| > 0$.

В общем случае функцию Грина можно представить в виде

$$G(x,y,\xi,\eta) = \rho(\xi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(x)u_n(\xi)}{\|u_n\|^2}\Psi_n(y,\eta;\lambda_n). \qquad (3)$$

Здесь
$$\rho(x)=\frac{1}{a(x)}\exp\Bigl[\int\frac{b(x)}{a(x)}\,dx\Bigr],\quad \|u_n\|^2=\int_{x_1}^{x_2}\rho(x)u_n^2(x)\,dx, \tag{4}$$
а λ_n и $u_n(x)$ — собственные значения и собственные функции однородной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения:
$$a(x)u''_{xx}+b(x)u'_x+\bigl[\lambda+c(x)\bigr]u=0, \tag{5}$$
$$s_1u'_x-k_1u=0\quad\text{при}\quad x=x_1, \tag{6}$$
$$s_2u'_x+k_2u=0\quad\text{при}\quad x=x_2. \tag{7}$$
Явный вид функций Ψ_n для различных граничных условий по переменной y указан в табл. 25.

Уравнение (5) можно записать в самосопряженной форме
$$[p(x)u'_x]'_x+[\lambda\rho(x)-q(x)]u=0, \tag{8}$$
где функции $p(x)$ и $q(x)$ описываются формулами
$$p(x)=\exp\Bigl[\int\frac{b(x)}{a(x)}\,dx\Bigr],\quad q(x)=-\frac{c(x)}{a(x)}\exp\Bigl[\int\frac{b(x)}{a(x)}\,dx\Bigr],$$
а функция $\rho(x)$ определена в (4).

Относительно задачи на собственные значения (8), (6)–(7) известно следующее:

1°. Все собственные значения λ_1, λ_2, … вещественны и $\lambda_n\to\infty$ при $n\to\infty$.

2°. Система собственных функций $u_1(x)$, $u_2(x)$, … является ортогональной на отрезке $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ с весовой функцией $\rho(x)$, т. е.
$$\int_{x_1}^{x_2}\rho(x)u_n(x)u_m(x)\,dx=0\quad\text{при}\quad n\neq m.$$

3°. При выполнении условий
$$q(x)\geqslant 0,\quad s_1k_1\geqslant 0,\quad s_2k_2\geqslant 0, \tag{9}$$
отрицательных собственных значений нет. Если $q\equiv 0$, $k_1=k_2=0$, то наименьшим собственным значением будет $\lambda_0=0$, которому отвечает собственная функция $u_0=\text{const}$ [в этом случае в формуле для функции Грина (3) суммирование надо начинать с $n=0$]. В остальных случаях при выполнении условий (9) все собственные значения положительны [первое неравенство в (9) выполняется, если $c(x)\leqslant 0$].

В разд. 1.8.9 приведены некоторые формулы для оценки собственных значений λ_n и собственных функций $u_n(x)$.

Функция Грина двумерной третьей краевой задачи (1)–(2), дополненной граничными условиями
$$\frac{\partial w}{\partial y}-k_3w=0\quad\text{при}\quad y=0,\qquad \frac{\partial w}{\partial y}+k_4w=0\quad\text{при}\quad y=h,$$
дается формулой (3), где
$$\Psi_n(y,\eta;\lambda_n)=\begin{cases}\dfrac{\bigl[\beta_n\operatorname{ch}(\beta_n\eta)+k_3\operatorname{sh}(\beta_n\eta)\bigr]\bigl\{\beta_n\operatorname{ch}\bigl[\beta_n(h-y)\bigr]+k_4\operatorname{sh}\bigl[\beta_n(h-y)\bigr]\bigr\}}{\beta_n\bigl[\beta_n(k_3+k_4)\operatorname{ch}(\beta_nh)+(\beta_n^2+k_3k_4)\operatorname{sh}(\beta_nh)\bigr]} & \text{при}\ \ y>\eta,\\[2ex] \dfrac{\bigl[\beta_n\operatorname{ch}(\beta_ny)+k_3\operatorname{sh}(\beta_ny)\bigr]\bigl\{\beta_n\operatorname{ch}\bigl[\beta_n(h-\eta)\bigr]+k_4\operatorname{sh}\bigl[\beta_n(h-\eta)\bigr]\bigr\}}{\beta_n\bigl[\beta_n(k_3+k_4)\operatorname{ch}(\beta_nh)+(\beta_n^2+k_3k_4)\operatorname{sh}(\beta_nh)\bigr]} & \text{при}\ \ y<\eta.\end{cases}$$

7.4.5-2. Представление решений краевых задач с помощью функции Грина.

1°. Решение первой краевой задачи для уравнения (1) с граничными условиями
$$w=f_1(y)\quad\text{при}\quad x=x_1,\qquad w=f_2(y)\quad\text{при}\quad x=x_2,$$
$$w=f_3(x)\quad\text{при}\quad y=0,\qquad w=f_4(x)\quad\text{при}\quad y=h$$

ТАБЛИЦА 25

Функции Ψ_n в формуле (3) для различных граничных условий.* Обозначение: $\beta_n = \sqrt{\lambda_n}$.

Область	Граничные условия	Функция $\Psi_n(y,\eta;\lambda_n)$
$-\infty < y < \infty$	$\lvert w\rvert < \infty$ при $y \to \pm\infty$	$\frac{1}{2\beta_n} e^{-\beta_n \lvert y-\eta\rvert}$
$0 \leqslant y < \infty$	$w = 0$ при $y = 0$	$\frac{1}{\beta_n} \begin{cases} e^{-\beta_n y}\,\mathrm{sh}(\beta_n\eta) & \text{при } y > \eta, \\ e^{-\beta_n \eta}\,\mathrm{sh}(\beta_n y) & \text{при } \eta > y \end{cases}$
$0 \leqslant y < \infty$	$\partial_y w = 0$ при $y = 0$	$\frac{1}{\beta_n} \begin{cases} e^{-\beta_n y}\,\mathrm{ch}(\beta_n\eta) & \text{при } y > \eta, \\ e^{-\beta_n \eta}\,\mathrm{ch}(\beta_n y) & \text{при } \eta > y \end{cases}$
$0 \leqslant y < \infty$	$\partial_y w - k_3 w = 0$ при $y = 0$	$\frac{1}{\beta_n(\beta_n+k_3)} \begin{cases} e^{-\beta_n y}\left[\beta_n\,\mathrm{ch}(\beta_n\eta) + k_3\,\mathrm{sh}(\beta_n\eta)\right] & \text{при } y > \eta, \\ e^{-\beta_n \eta}\left[\beta_n\,\mathrm{ch}(\beta_n y) + k_3\,\mathrm{sh}(\beta_n y)\right] & \text{при } \eta > y \end{cases}$
$0 \leqslant y \leqslant h$	$w = 0$ при $y = 0$, $w = 0$ при $y = h$	$\frac{1}{\beta_n\,\mathrm{sh}(\beta_n h)} \begin{cases} \mathrm{sh}(\beta_n\eta)\,\mathrm{sh}\left[\beta_n(h-y)\right] & \text{при } y > \eta, \\ \mathrm{sh}(\beta_n y)\,\mathrm{sh}\left[\beta_n(h-\eta)\right] & \text{при } \eta > y \end{cases}$
$0 \leqslant y \leqslant h$	$\partial_y w = 0$ при $y = 0$, $\partial_y w = 0$ при $y = h$	$\frac{1}{\beta_n\,\mathrm{sh}(\beta_n h)} \begin{cases} \mathrm{ch}(\beta_n\eta)\,\mathrm{ch}\left[\beta_n(h-y)\right] & \text{при } y > \eta, \\ \mathrm{ch}(\beta_n y)\,\mathrm{ch}\left[\beta_n(h-\eta)\right] & \text{при } \eta > y \end{cases}$
$0 \leqslant y \leqslant h$	$w = 0$ при $y = 0$, $\partial_y w = 0$ при $y = h$	$\frac{1}{\beta_n\,\mathrm{ch}(\beta_n h)} \begin{cases} \mathrm{sh}(\beta_n\eta)\,\mathrm{ch}\left[\beta_n(h-y)\right] & \text{при } y > \eta, \\ \mathrm{sh}(\beta_n y)\,\mathrm{ch}\left[\beta_n(h-\eta)\right] & \text{при } \eta > y \end{cases}$

выражается через функцию Грина в виде:

$$w(x,y) = a(x_1)\int_0^h f_1(\eta)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,\xi,\eta)\right]_{\xi=x_1} d\eta - a(x_2)\int_0^h f_2(\eta)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,\xi,\eta)\right]_{\xi=x_2} d\eta +$$
$$+\int_{x_1}^{x_2} f_3(\xi)\left[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,\xi,\eta)\right]_{\eta=0} d\xi - \int_{x_1}^{x_2} f_4(\xi)\left[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,\xi,\eta)\right]_{\eta=h} d\xi +$$
$$+\int_{x_1}^{x_2}\int_0^h \Phi(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta)\,d\eta\,d\xi.$$

2°. Решение второй краевой задачи для уравнения (1) с граничными условиями

$$\partial_x w = f_1(y) \quad \text{при} \quad x = x_1, \qquad \partial_x w = f_2(y) \quad \text{при} \quad x = x_2,$$
$$\partial_y w = f_3(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \partial_y w = f_4(x) \quad \text{при} \quad y = h$$

выражается через функцию Грина в виде:

$$w(x,y) = -\,a(x_1)\int_0^h f_1(\eta)G(x,y,x_1,\eta)\,d\eta + a(x_2)\int_0^h f_2(\eta)G(x,y,x_2,\eta)\,d\eta -$$
$$-\int_{x_1}^{x_2} f_3(\xi)G(x,y,\xi,0)\,d\xi + \int_{x_1}^{x_2} f_4(\xi)G(x,y,\xi,h)\,d\xi +$$
$$+\int_{x_1}^{x_2}\int_0^h \Phi(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta)\,d\eta\,d\xi.$$

3°. Представление решения третьей краевой задачи для уравнения (1) с помощью функции Грина будет таким же, как для второй краевой задачи.

---

* Для неограниченных областей выставляется условие ограниченности решения при $y \to \pm\infty$ (в табл. 25 это условие опускается).

8. Уравнения эллиптического типа с тремя и более пространственными переменными

8.1. Уравнение Лапласа $\Delta_3 w = 0$

Трехмерное уравнение Лапласа часто встречается в теории тепло- и массопереноса, гидро- и аэромеханике, теории упругости, электростатике и других областях механики и физики. В теории тепло- и массопереноса оно описывает стационарное распределение температуры при отсутствии источников тепла в рассматриваемой области.

Регулярные решения уравнения Лапласа называются гармоническими функциями. Первая краевая задача для уравнения Лапласа часто называется задачей Дирихле, а вторая краевая задача — задачей Неймана.

Принцип экстремума: гармоническая в области D функция w, отличная от постоянной, ни в одной точке внутри этой области не может достигать своего наибольшего и наименьшего значения.

8.1.1. Задачи в декартовой системе координат

Трехмерное уравнение Лапласа в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0.$$

8.1.1-1. Частные решения и некоторые формулы.

1°. Частные решения:

$$\begin{aligned}
w(x,y,z) &= Ax + By + Cz + D,\\
w(x,y,z) &= Ax^2 + By^2 - (A+B)z^2 + Cxy + Dxz + Eyz,\\
w(x,y,z) &= \cos(\mu_1 x + \mu_2 y)\exp(\pm\mu z),\\
w(x,y,z) &= \sin(\mu_1 x + \mu_2 y)\exp(\pm\mu z),\\
w(x,y,z) &= \exp(\mu_1 x + \mu_2 y)\cos(\mu z + A),\\
w(x,y,z) &= \exp(\pm\mu x)\cos(\mu_1 y + A)\cos(\mu_2 z + B),\\
w(x,y,z) &= \operatorname{ch}(\mu_1 x)\operatorname{ch}(\mu_2 y)\cos(\mu z + B),\\
w(x,y,z) &= \operatorname{ch}(\mu_1 x)\operatorname{sh}(\mu_2 y)\cos(\mu z + B),\\
w(x,y,z) &= \operatorname{ch}(\mu x)\cos(\mu_1 y + A)\cos(\mu_2 z + B),\\
w(x,y,z) &= \operatorname{sh}(\mu_1 x)\operatorname{sh}(\mu_2 y)\sin(\mu z + B),\\
w(x,y,z) &= \operatorname{sh}(\mu x)\sin(\mu_1 y + A)\sin(\mu_2 z + B),
\end{aligned}$$

где A, B, C, D, E, μ_1, μ_2 — произвольные постоянные, $\mu = \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2}$.

2°. Фундаментальное решение:

$$\mathscr{E}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

3°. Пусть $w = w(x,y,z)$ — некоторое решение уравнения Лапласа. Тогда функции

$$\begin{aligned}
w_1 &= Aw(\pm\lambda x + a,\ \pm\lambda y + b,\ \pm\lambda x + c),\\
w_2 &= \frac{A}{r} w\Bigl(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\Bigr), \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\\
w_3 &= \frac{A}{\sqrt{\Xi}} w\Bigl(\frac{x - ar^2}{\Xi}, \frac{y - br^2}{\Xi}, \frac{z - cr^2}{\Xi}\Bigr), \qquad \Xi = 1 - 2(ax + by + cz) + (a^2 + b^2 + c^2)r^2,
\end{aligned}$$

где A, a, b, c, λ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения. Знаки при λ в формуле для w_1 выбираются произвольно независимо друг от друга.

⊙ *Литература*: Р. Курант (1964, стр. 244–248), У. Миллер (1981, стр. 252–263).

8.1.1-2. Область: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $0 \leqslant z < \infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается полупространство. Задано граничное условие:

$$w = f(x,y) \quad \text{при} \quad z = 0.$$

Решение:

$$w(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2\right]^{3/2}}.$$

⊙ *Литература*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, Михлин и др. (1964, стр. 110).

8.1.1-3. Область: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $0 \leqslant z < \infty$. Вторая краевая задача.

Рассматривается полупространство. Задано граничное условие:

$$\partial_z w = f(x,y) \quad \text{при} \quad z = 0.$$

Решение:

$$w(x,y,z) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}} + C,$$

где C — произвольная постоянная.

⊙ *Литература*: В. С. Владимиров, В. П. Михайлов, А. А. Вашарин и др. (1974, стр. 213, 221).

8.1.1-4. Область: $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$. Первая краевая задача.

Рассматривается прямоугольный параллелепипед. Заданы граничные условия:

$$\begin{aligned} &w = f_1(y,z) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad &&w = f_2(y,z) \quad \text{при} \quad x = a,\\ &w = f_3(x,z) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad &&w = f_4(x,z) \quad \text{при} \quad y = b,\\ &w = f_5(x,y) \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad &&w = f_6(x,y) \quad \text{при} \quad z = c. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(x,y,z) = &\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{nm}^2 \operatorname{sh}(\lambda_{nm}^1 x) + f_{nm}^1 \operatorname{sh}[\lambda_{nm}^1(a-x)]}{\operatorname{sh}(\lambda_{nm}^1 a)} \sin\Bigl(\frac{\pi n y}{b}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{\pi m z}{c}\Bigr) +\\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{nm}^4 \operatorname{sh}(\lambda_{nm}^2 y) + f_{nm}^3 \operatorname{sh}[\lambda_{nm}^2(b-y)]}{\operatorname{sh}(\lambda_{nm}^2 b)} \sin\Bigl(\frac{\pi n x}{a}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{\pi m z}{c}\Bigr) +\\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{nm}^6 \operatorname{sh}(\lambda_{nm}^3 z) + f_{nm}^5 \operatorname{sh}[\lambda_{nm}^3(c-z)]}{\operatorname{sh}(\lambda_{nm}^3 c)} \sin\Bigl(\frac{\pi n x}{a}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{\pi m y}{b}\Bigr), \end{aligned}$$

где постоянные коэффициенты определяются формулами

$$\lambda_{nm}^1 = \pi\sqrt{\frac{n^2}{b^2}+\frac{m^2}{c^2}}, \quad \lambda_{nm}^2 = \pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{c^2}}, \quad \lambda_{nm}^3 = \pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}},$$

$$f_{nm}^i = \begin{cases} \dfrac{4}{bc}\displaystyle\int_0^b\int_0^c f_i(y,z)\sin\Bigl(\frac{\pi n y}{b}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{\pi m z}{c}\Bigr)\,dy\,dz & \text{при } i = 1,\ 2;\\ \dfrac{4}{ac}\displaystyle\int_0^a\int_0^c f_i(x,z)\sin\Bigl(\frac{\pi n x}{a}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{\pi m z}{c}\Bigr)\,dx\,dz & \text{при } i = 3,\ 4;\\ \dfrac{4}{ab}\displaystyle\int_0^a\int_0^b f_i(x,y)\sin\Bigl(\frac{\pi n x}{a}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{\pi m y}{b}\Bigr)\,dx\,dy & \text{при } i = 5,\ 6. \end{cases}$$

Пример. Температуры плоскостей $x = 0$ и $x = a$ постоянны и равны соответственно w_1 и w_2. Остальные плоскости поддерживаются при нулевой температуре ($f_3 = f_4 = f_5 = f_6 = 0$).

Решение:

$$w = \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{w_2\operatorname{sh}(\mu_{nm}x)+w_1\operatorname{sh}[\mu_{nm}(a-x)]}{(2n+1)(2m+1)\operatorname{sh}(\mu_{nm}a)}\sin(p_n y)\sin(q_m z),$$

$$p_n = \frac{\pi(2n+1)}{b},\quad q_m = \frac{\pi(2m+1)}{c},\quad \mu_{nm} = \sqrt{p_n^2+q_m^2}.$$

⊙ *Литература*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 107), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 80, 405–406), Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 177–178).

▶ *О решении других трехмерных краевых задач для уравнения Лапласа в декартовой системе координат см. в разд. 8.2.2 при* $\Phi \equiv 0$.

8.1.2. Задачи в цилиндрической системе координат

Трехмерное уравнение Лапласа в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\Delta_3 w \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0,\qquad r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

8.1.2-1. Частные решения:

$$w(r,\varphi,z) = \left(Ar^m+\frac{B}{r^m}\right)(C\cos m\varphi + D\sin m\varphi)(\alpha+\beta z),$$
$$w(r,\varphi,z) = J_m(\mu r)(A\cos m\varphi + B\sin m\varphi)(C\operatorname{ch}\mu z + D\operatorname{sh}\mu z),$$
$$w(r,\varphi,z) = Y_m(\mu r)(A\cos m\varphi + B\sin m\varphi)(C\operatorname{ch}\mu z + D\operatorname{sh}\mu z),$$
$$w(r,\varphi,z) = I_m(\mu r)(A\cos m\varphi + B\sin m\varphi)(C\cos\mu z + D\sin\mu z),$$
$$w(r,\varphi,z) = K_m(\mu r)(A\cos m\varphi + B\sin m\varphi)(C\cos\mu z + D\sin\mu z),$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots$; A, B, C, D, α, β, μ — произвольные постоянные; $J_m(\xi)$ и $Y_m(\xi)$ — функции Бесселя; $I_m(\xi)$ и $K_m(\xi)$ — модифицированные функции Бесселя.

8.1.2-2. Область: $0 \leqslant r \leqslant a$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $-\infty < z < \infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается бесконечный круговой цилиндр. Задано граничное условие:

$$w = f(\varphi, z)\quad\text{при}\quad r = a.$$

Решение:

$$w(r,\varphi,z) = -\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_n(\lambda_{nm}r)}{J_n'(\lambda_{nm}a)}\int_{-\infty}^{\infty}\bigl[A_n(\xi)\cos n\varphi + B_n(\xi)\sin n\varphi\bigr]\exp\bigl(-\lambda_{nm}|\xi - z|\bigr)\,d\xi,$$

где $J_n(r)$ — функции Бесселя, λ_{mn} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_n(a\lambda) = 0$. Функции $A_n(z)$ и $B_n(z)$ представляют собой коэффициенты разложения в ряд Фурье правой части граничного условия:

$$A_n(z) = \frac{\varepsilon_n}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi,z)\cos(n\varphi)\,d\varphi,\quad B_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi,z)\sin(n\varphi)\,d\varphi,$$

где $\varepsilon_0 = 1/2$, $\varepsilon_n = 1$ при $n = 1, 2, \ldots$

Если температура поверхности не зависит от φ, т. е. $f(z,\varphi) = f(z)$, то решение принимает вид

$$w(r,\varphi,z) = \frac{1}{a}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_0(\lambda_m r)}{J_1(\lambda_m a)}\int_0^{\infty}\bigl[f(z+\zeta)+f(z-\zeta)\bigr]\exp\bigl(-\lambda_m\zeta\bigr)\,d\zeta,$$

где λ_m — положительные корни трансцендентного уравнения $J_0(a\lambda) = 0$.

⊙ *Литература*: Г. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 205–207).

8.1.2-3. Область: $0 \leqslant r \leqslant a,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant z \leqslant b$. Первая краевая задача.

Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы граничные условия:

$$w = f(\varphi, z) \quad \text{при} \quad r = a, \qquad w = g_1(r, \varphi) \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad w = g_2(r, \varphi) \quad \text{при} \quad z = b.$$

Решение:

$$w(r, \varphi, z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{I_n\left(\dfrac{\pi m r}{b}\right)}{I_n\left(\dfrac{\pi m a}{b}\right)} (A_{nm}\cos n\varphi + B_{nm}\sin n\varphi)\sin\left(\frac{\pi m z}{b}\right) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} J_n\left(\frac{\mu_{mn} r}{a}\right)(C_{nm}^{(1)}\cos n\varphi + D_{nm}^{(1)}\sin n\varphi)\frac{\operatorname{sh}\left[\dfrac{\mu_{mn}(b-z)}{a}\right]}{\operatorname{sh}\left(\dfrac{\mu_{mn} b}{a}\right)} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} J_n\left(\frac{\mu_{mn} r}{a}\right)(C_{nm}^{(2)}\cos n\varphi + D_{nm}^{(2)}\sin n\varphi)\frac{\operatorname{sh}\left(\dfrac{\mu_{mn} z}{a}\right)}{\operatorname{sh}\left(\dfrac{\mu_{mn} b}{a}\right)},$$

где $J_n(r)$ — функции Бесселя, $I_n(r)$ — модифицированные функции Бесселя, μ_{mn} — m-й корень уравнения $J_n(\mu) = 0$. Коэффициенты $A_{nm}, B_{nm}, C_{nm}^{(i)}, D_{nm}^{(i)}$ определяются по формулам:

$$A_{nm} = \frac{\varepsilon_n}{\pi b}\int_0^{2\pi}\int_0^b f(\varphi, z)\cos(n\varphi)\sin\left(\frac{\pi m z}{b}\right)d\varphi\,dz,$$

$$B_{nm} = \frac{2}{\pi b}\int_0^{2\pi}\int_0^b f(\varphi, z)\sin(n\varphi)\sin\left(\frac{\pi m z}{b}\right)d\varphi\,dz,$$

$$C_{nm}^{(i)} = \frac{\varepsilon_n}{\pi a^2)[J_n'(\mu_{mn})]^2}\int_0^{2\pi}\int_0^a g_i(r, \varphi)\cos(n\varphi)J_n\left(\frac{\mu_{mn} r}{a}\right)r\,dr\,d\varphi,$$

$$D_{nm}^{(i)} = \frac{2}{\pi a^2[J_n'(\mu_{mn})]^2}\int_0^{2\pi}\int_0^a g_i(r, \varphi)\sin(n\varphi)J_n\left(\frac{\mu_{mn} r}{a}\right)r\,dr\,d\varphi,$$

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 2 & \text{при } n \neq 0, \end{cases} \qquad i = 1,\ 2.$$

⊙ *Литература*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 100–101), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 407–411).

▶ *О решении других трехмерных краевых задач для уравнения Лапласа в цилиндрической системе координат см. в разд. 8.2.3 при* $\Phi \equiv 0$.

8.1.3. Задачи в сферической системе координат

Трехмерное уравнение Лапласа в сферической системе координат имеет вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial w}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2} = 0, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

8.1.3-1. Частные решения:

$$w(r) = A + \frac{B}{r},$$

$$w(r, \theta) = \left(Ar^n + \frac{B}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta),$$

$$w(r, \theta, \varphi) = \left(Ar^n + \frac{B}{r^{n+1}}\right)P_n^m(\cos\theta)(C\cos m\varphi + D\sin m\varphi),$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$; $m = 0, 1, 2, \ldots, n$; A, B, C, D — произвольные постоянные; $P_n(\xi)$ — полиномы Лежандра; $P_n^m(\xi)$ — присоединенные функции Лежандра, которые определяются формулами:

$$P_n(x) = \frac{1}{n!\,2^n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \quad P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x).$$

8.1.3-2. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$ или $R \leqslant r < \infty$. Первая краевая задача.

На сфере задано граничное условие:

$$w = f(\theta, \varphi) \quad \text{при} \quad r = R.$$

1°. Решение внутренней задачи (при $r \leqslant R$):

$$w(r, \theta, \varphi) = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta_0, \varphi_0) \frac{R^2 - r^2}{(r^2 - 2Rr\cos\gamma + R^2)^{3/2}} \sin\theta_0 \, d\theta_0 \, d\varphi_0,$$
$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi - \varphi_0).$$

Эту формулу принято называть интегралом Пуассона для сферы.

Решение в виде ряда:

$$w(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n Y_n(\theta, \varphi),$$
$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{n} (A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm}\sin m\varphi) P_n^m(\cos\theta),$$

где

$$A_{00} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi,$$
$$A_{nm} = \frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi(n+m)!} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) P_n^m(\cos\theta) \cos m\varphi \sin\theta \, d\theta \, d\varphi,$$
$$B_{nm} = \frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi(n+m)!} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) P_n^m(\cos\theta) \sin m\varphi \sin\theta \, d\theta \, d\varphi.$$

2°. Решение внешней задачи (при $r \geqslant R$):

$$w(r, \theta, \varphi) = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta_0, \varphi_0) \frac{r^2 - R^2}{(r^2 - 2Rr\cos\gamma + R^2)^{3/2}} \sin\theta_0 \, d\theta_0 \, d\varphi_0,$$

где $\cos\gamma$ определяется той же формулой, что и для внутренней задачи.

Решение в виде ряда:

$$w(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} Y_n(\theta, \varphi),$$
$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{n} (A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm}\sin m\varphi) P_n^m(\cos\theta),$$

где коэффициенты A_{nm} и B_{nm} определяются теми же формулами, что и для внутренней задачи.

⦿ *Литература*: Г. Н. Положий (1964, стр. 159–160), В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 101), А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972, стр. 323–326), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 82, 422).

8.1.3-3. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$ или $R \leqslant r < \infty$. Вторая краевая задача.

На сфере задано граничное условие:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = f(\theta, \varphi) \quad \text{при} \quad r = R.$$

Функция $f(\theta, \varphi)$ должна удовлетворять условию разрешимости

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 0.$$

1°. Решение внутренней задачи (при $r \leqslant R$):

$$w(r, \theta, \varphi) = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta_0, \varphi_0) \left[\frac{1}{R}\ln(R + r_1 - r\cos\gamma) - \frac{2}{r_1}\right] \sin\theta_0 \, d\theta_0 \, d\varphi_0,$$
$$r_1 = \sqrt{r^2 - 2Rr\cos\gamma + R^2}, \quad \cos\gamma = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi - \varphi_0).$$

Решение в виде ряда:

$$w(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{R}{n}\left(\frac{r}{R}\right)^{n}(A_{nm}\cos m\varphi+B_{nm}\sin m\varphi)P_n^m(\cos\theta)+C,$$

где коэффициенты A_{nm} и B_{nm} определяются теми же формулами, что и для внутренней первой краевой задачи (см. разд. 8.1.3-2), C — произвольная постоянная.

2°. Решение внешней задачи (при $r\geqslant R$):

$$w(r,\theta,\varphi)=-\frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi}f(\theta_0,\varphi_0)\left[\frac{1}{R}\ln\frac{R+r_1-r\cos\gamma}{r(1-\cos\gamma)}-\frac{2}{r_1}\right]\sin\theta_0\,d\theta_0\,d\varphi_0,$$
$$r_1=\sqrt{r^2-2Rr\cos\gamma+R^2},\quad \cos\gamma=\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0).$$

Решение в виде ряда:

$$w(r,\theta,\varphi)=-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{R}{n+1}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}(A_{nm}\cos m\varphi+B_{nm}\sin m\varphi)P_n^m(\cos\theta)+C,$$

где коэффициенты A_{nm} и B_{nm} определяются теми же формулами, что и для внутренней первой краевой задачи, C — произвольная постоянная.

3°. В приложениях встречаются также внешние краевые задачи, в которых ищутся неограниченные решения при $r\to\infty$.

Пример. Обтекание сферы радиуса R потенциальным поступательным потоком идеальной несжимаемой жидкости описывается уравнением Лапласа с граничными условиями:

$$\partial_r w=0\quad\text{при}\quad r=R,\qquad |w-Ur\cos\theta|\to0\quad\text{при}\quad r\to\infty,$$

где w — потенциал, U — скорость невозмущенного потока на бесконечности (вектор скорости жидкости выражается через потенциал по формуле $\mathbf{v}=\nabla\varphi$).

Решение:

$$w=Ur\left(1+\frac{R^3}{2r^3}\right)\cos\theta.$$

Это решение является частным случаем второй формулы из разд. 8.1.3-1 при $n=1$.

⊙ *Литература*: Г. Н. Положий (1964, стр. 162–165), В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 101), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 82, 422–423), Л. Г. Лойцянский (1973, стр. 336).

▶ *О решении других трехмерных краевых задач для уравнения Лапласа в сферической системе координат см. в разд. 8.2.4 при $\Phi\equiv0$.*

8.1.4. Другие ортогональные криволинейные системы координат

Трехмерное уравнение Лапласа допускает разделение переменных в одиннадцати ортогональных системах координат, перечисленных в табл. 26.

Для общей эллипсоидальной и конической систем координат функции f, g, h и g, h описываются уравнениями Ламе, в которые входит эллиптическая функция Якоби $\operatorname{sn}z=\operatorname{sn}(z,k)$. Решения этих уравнений, удовлетворяющие некоторым условиям, можно представить в виде конечных рядов, называемых многочленами Ламе. Подробнее об уравнении Ламе и его решениях см. Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон (1963, стр. 463–478), Г. Бейтмен, А. Эрдейи (1967, т. 3, стр. 103–135), F. Arscott (1964), У. Миллер (1981).

Для трехмерного уравнения Лапласа существуют также координаты, допускающие $\mathcal{R}$-разделение переменных. Такие решения в новой системе координат μ, ν, ρ можно представить в виде $w=\sqrt{\mathcal{R}\,(\mu,\nu,\rho)}\,f(\mu)g(\nu)h(\rho)$. Координаты, допускающие $\mathcal{R}$-разделение переменных, перечислены в табл. 27.

В приложениях широко используются только бицилиндрическая и тороидальная системы координат. В трех последующих системах координат функции $f=f(\mu)$ и $g=g(\rho)$ описываются одинаковыми уравнениями, которые с помощью подстановок $\mu=\operatorname{sn}^2(\alpha,k)$, $\rho=\operatorname{sn}^2(\beta,k)$, где $k=a^{-1/2}$, сводятся к уравнениям Ламе (α и β новые независимые переменные).

⊙ *Литература к разделу 8.1.4*: M. Bôcher (1894), Ф. М. Морс, Г. Фешбах (1958, 1960), Н. Н. Лебедев, И. П. Скальская, Я. С. Уфлянд (1955, стр. 265–269), P. Moon, D. Spencer (1961), A. Makarov, J. Smorodinsky, K. Valiev, P. Winternitz (1967), У. Миллер (1981, стр. 252–263).

ТАБЛИЦА 26
Ортогональные координаты, допускающие решения с разделенными переменными вида $w = f(\bar{x})g(\bar{y})h(\bar{z})$ для трехмерного уравнения Лапласа $\Delta_3 w = 0$.

Координаты	Преобразования	Частные решения (уравнения для f, g, h)
Декартовы x, y, z	$x = x$, $y = y$, $z = z$	$w = \cos(k_1 x + s_1)\cos(k_2 y + s_2)\operatorname{ch}(k_3 z + s_3)$, где $k_1^2 + k_2^2 = k_3^2$; см. также разд. 8.1.1-1
Цилиндрические r, φ, z	$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$	$w = [AJ_n(kr) + BY_n(kr)]\cos(n\varphi + c)\exp(\pm kz)$, $J_n(z)$ и $Y_n(z)$ — функции Бесселя, см. также разд. 8.1.2-1
Параболического цилиндра ξ, η, z	$x = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2)$, $y = \xi\eta$, $z = z$	$w = D_{\mu-1/2}(\pm\sigma\xi)D_{-\mu-1/2}(\pm\sigma\eta)\cos(kz + s)$, где $\sigma = \sqrt{2k}$, $D_\mu(z)$ — функция параболического цилиндра
Эллиптического цилиндра u, v, z	$x = a\operatorname{ch}u\cos v$, $y = a\operatorname{sh}u\sin v$, $z = z$	$w = \begin{cases} \mathrm{Ce}_n(u, -q)\,\mathrm{ce}_n(v, -q)\cos(kz + s), \\ \mathrm{Se}_n(u, -q)\,\mathrm{se}_n(v, -q)\cos(kz + s), \end{cases}$ Ce_n и Se_n — модифицированные функции Матье, ce_n и se_n — функции Матье, $q = \frac{1}{4}a^2k^2$
Сферические r, θ, φ	$x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$	$w = (Ar^n + Br^{-n-1})P_n^k(\cos\theta)\cos(k\varphi + s)$, $P_n^k(\xi)$ — присоединенные функции Лежандра, см. также разд. 8.1.3-1
Вытянутого эллипсоида u, v, φ	$x = a\operatorname{sh}u\sin v\cos\varphi$, $y = a\operatorname{sh}u\sin v\sin\varphi$, $z = a\operatorname{ch}u\cos v$	$w = P_n^k(\operatorname{ch}u)P_n^k(\cos v)\cos(k\varphi + s)$, $P_n^k(\xi)$ — присоединенные функции Лежандра
Сплюснутого эллипсоида u, v, φ	$x = a\operatorname{ch}u\sin v\cos\varphi$, $y = a\operatorname{ch}u\sin v\sin\varphi$, $z = a\operatorname{sh}u\cos v$	$w = P_n^k(-i\operatorname{sh}u)P_n^k(\cos v)\cos(k\varphi + s)$, $P_n^k(\xi)$ — присоединенные функции Лежандра
Параболические ξ, η, φ	$x = a\xi\eta\cos\varphi$, $y = a\xi\eta\sin\varphi$, $z = \frac{1}{2}a(\xi^2 - \eta^2)$	$w = I_{\pm k}(\beta\xi)J_{\pm k}(\beta\eta)\cos(k\varphi + s)$, $J_k(z)$ — функции Бесселя, $I_k(z)$ — модифицированные функции Бесселя
Параболоидальные u, v, φ	$x = 2a\operatorname{ch}u\cos v\operatorname{sh}\varphi$, $y = 2a\operatorname{sh}u\sin v\operatorname{ch}\varphi$, $z = \frac{1}{2}a(\operatorname{ch}2u + \cos 2v - \operatorname{ch}2\varphi)$	$w = \begin{cases} \mathrm{Ce}_n(u, -b)\,\mathrm{ce}_n(v, -b)\,\mathrm{Ce}_n(\varphi + i\pi/2, -b), \\ \mathrm{Se}_n(u, -b)\,\mathrm{se}_n(v, -b)\,\mathrm{Se}_n(\varphi + i\pi/2, -b), \end{cases}$ $b = \frac{1}{2}a\beta$; ce_n и se_n — функции Матье, Ce_n и Se_n — модифицированные функции Матье
Общие эллипсоидальные μ, ν, ρ	$x = \sqrt{\frac{(\mu-a)(\nu-a)(\rho-a)}{a(a-1)}}$, $y = \sqrt{\frac{(\mu-1)(\nu-1)(\rho-1)}{1-a}}$, $z = \sqrt{\frac{\mu\nu\rho}{a}}$	$f''_{\xi\xi} + (\beta_2 + \beta_1\operatorname{sn}^2\xi)f = 0$ (уравнение Ламе), $g''_{\eta\eta} + (\beta_2 + \beta_1\operatorname{sn}^2\eta)g = 0$ (уравнение Ламе), $h''_{\zeta\zeta} + (\beta_2 + \beta_1\operatorname{sn}^2\zeta)g = 0$ (уравнение Ламе), $\mu = \operatorname{sn}^2(\xi, k)$, $\nu = \operatorname{sn}^2(\eta, k)$, $\rho = \operatorname{sn}^2(\zeta, k)$, $k = a^{-1/2}$
Конические ρ, μ, ν	$x = \rho\sqrt{\frac{(a\mu-1)(a\nu-1)}{1-a}}$, $y = \rho\sqrt{\frac{a(\mu-1)(\nu-1)}{a-1}}$, $z = \rho\sqrt{a\mu\nu}$	$f(\rho) = A\rho^n + B\rho^{-n-1}$, $n = 0, 1, \ldots$, $g''_{\xi\xi} + [\beta - n(n+1)k^2\operatorname{sn}^2\xi]g = 0$ (уравнение Ламе), $h''_{\eta\eta} + [\beta - n(n+1)k^2\operatorname{sn}^2\eta]h = 0$ (уравнение Ламе), где $\mu = \operatorname{sn}^2(\xi, k)$, $\nu = \operatorname{sn}^2(\eta, k)$, $k = a^{1/2}$, g и h выражаются через многочлены Ламе

ТАБЛИЦА 27

Координаты $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, допускающие решения с $\mathcal{R}$-разделенными переменными вида $w = \sqrt{\mathcal{R}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}\, f(\bar{x})g(\bar{y})h(\bar{z})$ для трехмерного уравнения Лапласа $\Delta_3 w = 0$.

Новые координаты, функция $\mathcal{R}$	Преобразования координат	Функции f, g, h (уравнения для f, g, h)
Биполярные координаты α, β, φ, $\mathcal{R}=\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha$	$x=c\mathcal{R}^{-1}\sin\alpha\cos\varphi$, $y=c\mathcal{R}^{-1}\sin\alpha\sin\varphi$, $z=c\mathcal{R}^{-1}\operatorname{sh}\beta$; $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$, β — любое, $0\leqslant\varphi<2\pi$	$f(\alpha)=A_1P_n^m(\cos\alpha)+A_2Q_n^m(\cos\alpha)$, $g(\beta)=B_1\operatorname{ch}\left[(n+\frac{1}{2})\beta\right]+B_2\operatorname{sh}\left[(n+\frac{1}{2})\beta\right]$, $h(\varphi)=C_1\cos(m\varphi)+C_2\sin(m\varphi)$, $n=0,1,2,\dots;\ m=0,1,2,\dots$
Тороидальные координаты α, β, φ, $\mathcal{R}=\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta$	$x=c\mathcal{R}^{-1}\operatorname{sh}\alpha\cos\varphi$, $y=c\mathcal{R}^{-1}\operatorname{sh}\alpha\sin\varphi$, $z=c\mathcal{R}^{-1}\sin\beta$; $\alpha\geqslant0$, $-\pi\leqslant\beta\leqslant\pi$, $0\leqslant\varphi<2\pi$	$f(\alpha)=A_1P_{n-1/2}^m(\operatorname{ch}\alpha)+A_2Q_{n-1/2}^m(\operatorname{ch}\alpha)$, $g(\beta)=B_1\cos(n\beta)+B_2\sin(n\beta)$, $h(\varphi)=C_1\cos(m\varphi)+C_2\sin(m\varphi)$, $n=0,1,2,\dots;\ m=0,1,2,\dots$
Координаты μ, ρ, φ, $\mathcal{R}=\sqrt{\frac{(\mu-a)(a-\rho)}{a(a-1)}}-\sqrt{\frac{(\mu-1)(1-\rho)}{a-1}}$	$x=\mathcal{R}^{-1}\cos\varphi$, $y=\mathcal{R}^{-1}\sin\varphi$, $z=\mathcal{R}^{-1}\sqrt{-\mu\rho/a}$; $\mu>a>1$, $\rho<0$, $0\leqslant\varphi<2\pi$	$\sqrt{U(\mu)}\left[\sqrt{U(\mu)}\,f'\right]'+\left[(\frac{1}{4}-n^2)\mu-\lambda\right]f=0$, $\sqrt{U(\rho)}\left[\sqrt{U(\rho)}\,g'\right]'+\left[(\frac{1}{4}-n^2)\rho-\lambda\right]g=0$, $h(\varphi)=C_1\cos(n\varphi)+C_2\sin(n\varphi)$, $U(t)=4t(t-1)(t-a)$
Координаты μ, ρ, φ, $\mathcal{R}=\sqrt{\frac{\mu\rho}{a}}+\sqrt{\frac{(\mu-1)(\rho-1)}{a-1}}$	$x=\mathcal{R}^{-1}\cos\varphi$, $y=\mathcal{R}^{-1}\sin\varphi$, $z=\mathcal{R}^{-1}\sqrt{\frac{(\mu-a)(a-\rho)}{a(a-1)}}$; $1<\rho<a<\mu$, $0\leqslant\varphi<2\pi$	$\sqrt{U(\mu)}\left[\sqrt{U(\mu)}\,f'\right]'+\left[(\frac{1}{4}-n^2)\mu-\lambda\right]f=0$, $\sqrt{U(\rho)}\left[\sqrt{U(\rho)}\,g'\right]'+\left[(\frac{1}{4}-n^2)\rho-\lambda\right]g=0$, $h(\varphi)=C_1\cos(n\varphi)+C_2\sin(n\varphi)$, $U(t)=4t(t-1)(t-a)$
Координаты μ, ρ, φ, $\mathcal{R}=2\operatorname{Re}\sqrt{\frac{i(\mu-a)(\rho-a)}{a(a-b)}}$, $a=\bar{b}=\alpha+i\beta$, α, β — действит. числа	$x=\mathcal{R}^{-1}\cos\varphi$, $y=\mathcal{R}^{-1}\sin\varphi$, $z=\mathcal{R}^{-1}\sqrt{-\mu\rho/(ab)}$; $\mu>0$, $\rho<0$, $0\leqslant\varphi<2\pi$	$\sqrt{U(\mu)}\left[\sqrt{U(\mu)}\,f'\right]'+\left[(\frac{1}{4}-n^2)\mu-\lambda\right]f=0$, $\sqrt{U(\rho)}\left[\sqrt{U(\rho)}\,g'\right]'+\left[(\frac{1}{4}-n^2)\rho-\lambda\right]g=0$, $h(\varphi)=C_1\cos(n\varphi)+C_2\sin(n\varphi)$, $U(t)=4t(t-a)(t-b)$
Координаты μ, ν, ρ, $\mathcal{R}=1+\sqrt{\frac{\mu\nu\rho}{ab}}$	$x=\mathcal{R}^{-1}\sqrt{\frac{(\mu-a)(\nu-a)(\rho-a)}{(b-a)(a-1)a}}$, $y=\mathcal{R}^{-1}\sqrt{\frac{(\mu-b)(\nu-b)(\rho-b)}{(a-b)(b-1)b}}$, $z=\mathcal{R}^{-1}\sqrt{\frac{(\mu-1)(\nu-1)(\rho-1)}{(a-1)(b-1)}}$; $0<\rho<1<\nu<b<\mu<a$	$\sqrt{U(\mu)}\left[\sqrt{U(\mu)}\,f'\right]'-(3\mu^2+\lambda_1\mu+\lambda_2)f=0$, $\sqrt{U(\nu)}\left[\sqrt{U(\nu)}\,g'\right]'-(3\nu^2+\lambda_1\nu+\lambda_2)g=0$, $\sqrt{U(\rho)}\left[\sqrt{U(\rho)}\,h'\right]'-(3\rho^2+\lambda_1\rho+\lambda_2)h=0$, $U(t)=16t(t-1)(t-a)(t-b)$
Координаты μ, ν, ρ, $\mathcal{R}=2\operatorname{Re}\sqrt{\frac{(\mu-a)(\nu-a)(\rho-a)}{ia(a-1)(a-b)}}$, $a=\bar{b}=\alpha+i\beta$, α, β — действит. числа	$x=\mathcal{R}^{-1}\sqrt{\frac{(\mu-1)(\nu-1)(\rho-1)}{(a-1)(b-1)}}$, $y=\mathcal{R}^{-1}\sqrt{-\frac{\mu\nu\rho}{ab}}$, $z=\mathcal{R}^{-1}$; $\rho<0<\mu<1<\nu$	$\sqrt{U(\mu)}\left[\sqrt{U(\mu)}\,f'\right]'-(3\mu^2+\lambda_1\mu+\lambda_2)f=0$, $\sqrt{U(\nu)}\left[\sqrt{U(\nu)}\,g'\right]'-(3\nu^2+\lambda_1\nu+\lambda_2)g=0$, $\sqrt{U(\rho)}\left[\sqrt{U(\rho)}\,h'\right]'-(3\rho^2+\lambda_1\rho+\lambda_2)h=0$, $U(t)=16t(t-1)(t-a)(t-b)$

8.2. Уравнение Пуассона $\Delta_3 w + \Phi(\mathbf{x}) = 0$

8.2.1. Предварительные замечания. Структура решения

Трехмерное уравнение Пуассона, как и трехмерное уравнение Лапласа, часто встречается в теории тепло- и массопереноса, гидро- и аэромеханике, теории упругости, электростатике и других областях механики и физики. Оно описывает стационарное распределение температуры при наличии источников (или стоков) тепла в рассматриваемой области.

Уравнение Лапласа является частным случаем уравнения Пуассона при $\Phi \equiv 0$.

Далее будем рассматривать трехмерную ограниченную область V с достаточно гладкой границей S. Пусть $\mathbf{r} \in V$ и $\boldsymbol{\rho} \in V$, где $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$, $\boldsymbol{\rho} = \{\xi, \eta, \zeta\}$.

ТАБЛИЦА 28

Элементы объема и расстояния, фигурирующие в формулах (2) и (5), в некоторых системах координат. Во всех случаях полагается $\boldsymbol{\rho} = \{\xi, \eta, \zeta\}$.

Система координат	Элемент объема, dV_ρ	Градиент, $\nabla_\rho u$ ($\lvert\mathbf{i}_\xi\rvert = \lvert\mathbf{i}_\eta\rvert = \lvert\mathbf{i}_\zeta\rvert = 1$)	Расстояние, $\lvert\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}\rvert$
Декартова $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$	$d\xi\, d\eta\, d\zeta$	$\mathbf{i}_\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} + \mathbf{i}_\eta \frac{\partial u}{\partial \eta} + \mathbf{i}_\zeta \frac{\partial u}{\partial \zeta}$	$\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$
Цилиндрическая $\mathbf{r} = \{r, \varphi, z\}$	$\xi\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$	$\mathbf{i}_\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} + \mathbf{i}_\eta \frac{1}{\xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \mathbf{i}_\zeta \frac{\partial u}{\partial \zeta}$	$\sqrt{r^2+\xi^2-2r\xi\cos(\varphi-\eta)+(z-\zeta)^2}$
Сферическая $\mathbf{r} = \{r, \theta, \varphi\}$	$\xi^2 \sin\eta\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$	$\mathbf{i}_\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} + \mathbf{i}_\eta \frac{1}{\xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \mathbf{i}_\zeta \frac{1}{\xi \sin\eta} \frac{\partial u}{\partial \zeta}$	$\sqrt{r^2 + \xi^2 - 2r\xi\cos\gamma}$, $\cos\gamma = \sin\theta\sin\eta + \cos\theta\cos\eta(\varphi - \zeta)$

8.2.1-1. Первая краевая задача.

Решение первой краевой задачи для уравнения Пуассона

$$\Delta_3 w + \Phi(\mathbf{r}) = 0 \tag{1}$$

в области V с неоднородным граничным условием

$$w = f(\mathbf{r}) \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \in S$$

можно записать в виде

$$w(\mathbf{r}) = \int_V \Phi(\boldsymbol{\rho}) G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})\, dV_\rho - \int_S f(\boldsymbol{\rho}) \frac{\partial G}{\partial N_\rho}\, dS_\rho. \tag{2}$$

Здесь $G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})$ — функция Грина первой краевой задачи, $\dfrac{\partial G}{\partial N_\rho}$ — производная функции Грина, взятая относительно переменных ξ, η, ζ по направлению внешней нормали $\mathbf{N}$ к границе S. Интегрирование везде ведется по переменным ξ, η, ζ.

Элементы объема в решении (2) для основных систем координат указаны в табл. 28. Там же приведены выражения для градиентов, которые позволяют найти производную по нормали по формуле $\dfrac{\partial G}{\partial N_\rho} = (\mathbf{N} \cdot \nabla_\rho u)$.

Функция Грина $G = G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})$ первой краевой задачи определяется условиями:

1°. Функция G удовлетворяет уравнению Лапласа относительно переменных x, y, z в области V всюду, кроме точки (ξ, η, ζ), где она имеет особенность вида $\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|}$.

2°. Функция G относительно переменных x, y, z удовлетворяет однородному граничному условию первого рода на границе области, т. е. $G|_S = 0$.

Функция Грина может быть представлена в виде

$$G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|} + u, \tag{3}$$

где вспомогательная функция $u = u(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})$ определяется путем решения первой краевой задачи для уравнения Лапласа $\Delta_3 u = 0$ с граничным условием $u|_S = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|}$ (в этой задаче величина $\boldsymbol{\rho}$ рассматривается как трехмерный свободный параметр).

Свойство симметрии функции Грина относительно аргументов: $G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) = G(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{r})$.

О построении функций Грина см. в разд. 8.3.1-4, 8.3.1-6 — 8.3.1-8 при $\lambda = 0$.

Замечание 1. Для внешних первых краевых задач для уравнения Лапласа на бесконечности обычно выставляется условие $|w| < A/|\mathbf{r}|$ ($|\mathbf{r}| \to \infty$, $A = \text{const}$).

8.2.1-2. Вторая краевая задача.

Вторая краевая задача для уравнения Пуассона (1) характеризуется граничным условием

$$\frac{\partial w}{\partial N} = f(\mathbf{r}) \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \in S.$$

Необходимое условие разрешимости внутренней задачи:

$$\int_V \Phi(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} + \int_S f(\mathbf{r})\,dS = 0. \tag{4}$$

Решение второй краевой задачи (при выполнении условия разрешимости) можно записать в виде

$$w(\mathbf{r}) = \int_V \Phi(\rho)G(\mathbf{r},\rho)\,dV_\rho + \int_S f(\rho)G(\mathbf{r},\rho)\,dS_\rho + C, \tag{5}$$

где C — произвольная постоянная.

Функция Грина $G = G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})$ второй краевой задачи определяется условиями:

1°. Функция G удовлетворяет уравнению Лапласа относительно переменных x, y, z в области V всюду, кроме точки (ξ, η, ζ), где она имеет особенность вида $\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|}$.

2°. Функция G относительно переменных x, y, z удовлетворяет неоднородному граничному условию второго рода на границе области:

$$\frac{\partial G}{\partial N}\bigg|_S = \frac{1}{S_0},$$

где S_0 — площадь поверхности S.

Функция Грина единственна с точностью до аддитивной постоянной.

Замечание 2. Нельзя определить функцию Грина с помощью условия 1° и однородного граничного условия $\frac{\partial G}{\partial N}\big|_S = 0$ [такая задача для G неразрешима, так как представив G в форме (3), для функции u получим задачу с неоднородным граничным условием второго рода, для которого не будет выполняться условии разрешимости (2)].

Замечание 3. Условие (4) не распространяется на внешнюю вторую краевую задачу (для бесконечной области).

8.2.1-3. Третья краевая задача.

Решение третьей краевой задачи для уравнения Пуассона (1) в области V с неоднородным граничным условием

$$\frac{\partial w}{\partial N} + kw = f(\mathbf{r}) \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \in S$$

дается формулой (5) при $C = 0$, где $G = G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})$ — функция Грина третьей краевой задачи, которая определяется условиями:

1°. Функция G удовлетворяет уравнению Лапласа относительно переменных x, y, z в области V всюду, кроме точки (ξ, η, ζ), где она имеет особенность вида $\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|}$.

2°. Функция G относительно переменных x, y, z удовлетворяет однородному граничному условию третьего рода на границе области, т. е. $\left[\frac{\partial G}{\partial N} + kG\right]_S = 0$.

Функцию Грина можно представить в виде (3), где вспомогательная функция u определяется путем решения соответствующей третьей краевой задачи для уравнения Лапласа $\Delta_3 u = 0$.

О построении функций Грина см. в разд. 8.3.1-4, 8.3.1-6 — 8.3.1-8 при $\lambda = 0$.

⊙ *Литература к разделу 8.2.1*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, Михлин и др. (1964, стр. 77–78, 108–111), Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов (1970, стр. 277–281).

8.2.2. Задачи в декартовой системе координат

Уравнение Пуассона в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \Phi(x,y,z) = 0.$$

8.2.2-1. Область: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$.

Решение:

$$w(x,y,z) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}.$$

⊙ *Литература*: Р. Курант (1964, стр. 247).

8.2.2-2. Область: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $0 \leqslant z < \infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается полупространство. Задано граничное условие:

$$w = f(x,y) \quad \text{при} \quad z = 0.$$

Решение:

$$w(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2\right]^{3/2}} + \\ + \frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{R_-}-\frac{1}{R_+}\right)\Phi(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

где

$$R_- = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}, \quad R_+ = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}.$$

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 73, 356–357), А. Г. Бутковский (1979, стр. 148).

8.2.2-3. Область: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $0 \leqslant z < \infty$. Третья краевая задача.

Рассматривается полупространство. Задано граничное условие:

$$\partial_z w - kw = f(x,y) \quad \text{при} \quad z = 0.$$

Решение:

$$w(x,y,z) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta)G(x,y,z,\xi,\eta,0)\,d\xi\,d\eta + \\ + \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

где

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}} - \right. \\ \left. - 2k\int_0^{\infty}\frac{\exp(-ks)\,ds}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta+s)^2}}\right].$$

8.2.2-4. Область: $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$, $0 \leqslant z < \infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается двугранный угол. Заданы граничные условия:

$$w = f_1(x,z) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad w = f_2(x,y) \quad \text{при} \quad z = 0.$$

Решение:

$$w(x,y,z) = \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi,\zeta)\left[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\right]_{\eta=0} d\xi\,d\zeta + \\ + \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\xi,\eta)\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\right]_{\zeta=0} d\xi\,d\eta + \\ + \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

где

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2+(z-\zeta)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2+(z+\zeta)^2}}\right].$$

⊙ *Литература*: В. С. Владимиров, В. П. Михайлов, А. А. Вашарин и др. (1974, стр. 197, 200), А. Г. Бутковский (1979, стр. 149).

8.2.2-5. Область: $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$, $0 \leqslant z < \infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается восьмая часть пространства. Заданы граничные условия:

$$w = f_1(y,z) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w = f_2(x,z) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad w = f_3(x,y) \quad \text{при} \quad z = 0.$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(x,y,z) = &\int_0^\infty \int_0^\infty f_1(\eta,\zeta)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\Big]_{\xi=0} d\eta\, d\zeta + \\ &+ \int_0^\infty \int_0^\infty f_2(\xi,\zeta)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\Big]_{\eta=0} d\xi\, d\zeta + \\ &+ \int_0^\infty \int_0^\infty f_3(\xi,\eta)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\Big]_{\zeta=0} d\xi\, d\eta + \\ &+ \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{4\pi}\Bigg[&\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}} - \\ &- \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2+(z-\zeta)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2+(z+\zeta)^2}} - \\ &- \frac{1}{\sqrt{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{(x+\xi)^2+(y+\eta)^2+(z-\zeta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+\xi)^2+(y+\eta)^2+(z+\zeta)^2}}\Bigg]. \end{aligned}$$

⊙ *Литература*: В. С. Владимиров, В. П. Михайлов, А. А. Вашарин и др. (1974, стр. 197, 200), А. Г. Бутковский (1979, стр. 149).

8.2.2-6. Область: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $0 \leqslant z \leqslant a$. Первая краевая задача.

Рассматривается бесконечный слой. Заданы граничные условия:

$$w = f_1(x,y) \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad w = f_2(x,y) \quad \text{при} \quad z = a.$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(x,y,z) = &\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f_1(\xi,\eta)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\Big]_{\zeta=0} d\xi\, d\eta - \\ &- \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f_2(\xi,\eta)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\Big]_{\zeta=a} d\xi\, d\eta + \\ &+ \int_0^a \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \Phi(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \end{aligned}$$

Функция Грина:

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big(\frac{1}{r_{n1}} - \frac{1}{r_{n2}}\Big),$$

где

$$\begin{aligned} r_{n1} &= \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta-2na)^2}, \\ r_{n2} &= \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta-2na)^2}. \end{aligned}$$

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 73, 357–359), А. Г. Бутковский (1979, стр. 151–152).

8.2.2-7. Область: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $0 \leqslant z \leqslant a$. Смешанная краевая задача.

Рассматривается бесконечный слой. Заданы граничные условия:

$$w = f_1(x,y) \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad \partial_z w = f_2(x,y) \quad \text{при} \quad z = a.$$

Решение:

$$w(x,y,z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi,\eta)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\Big]_{\zeta=0} d\xi\,d\eta + \\ + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\xi,\eta)G(x,y,z,\xi,\eta,a)\,d\xi\,d\eta + \\ + \int_0^a\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Функция Грина:

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big(\frac{1}{r_{n1}} - \frac{1}{r_{n2}}\Big),$$

где

$$r_{n1} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + [z-(-1)^n\zeta - 2na]^2},$$
$$r_{n2} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + [z+(-1)^n\zeta - 2na]^2}.$$

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 73, 360–361).

8.2.2-8. Область: $0 \leqslant x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $0 \leqslant z \leqslant a$. Первая краевая задача.

Рассматривается полубесконечный слой. Заданы граничные условия:

$$w = f_1(y,z) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w = f_2(x,y) \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad w = f_3(x,y) \quad \text{при} \quad z = a.$$

Решение:

$$w(x,y,z) = \int_0^a\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\eta,\zeta)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\Big]_{\xi=0} d\eta\,d\zeta + \\ + \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} f_2(\xi,\eta)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\Big]_{\zeta=0} d\xi\,d\eta - \\ - \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} f_3(\xi,\eta)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\Big]_{\zeta=a} d\xi\,d\eta + \\ + \int_0^a\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} \Phi(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Функция Грина:

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big(\frac{1}{r_{n1}} - \frac{1}{r_{n2}} - \frac{1}{r_{n3}} + \frac{1}{r_{n4}}\Big),$$

где

$$r_{n1} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta-2na)^2},$$
$$r_{n2} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta-2na)^2},$$
$$r_{n3} = \sqrt{(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta-2na)^2},$$
$$r_{n4} = \sqrt{(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta-2na)^2}.$$

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 73, 362).

8.2.2-9. Область: $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $-\infty < z < \infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается бесконечная цилиндрическая область прямоугольного сечения. Заданы граничные условия:

$$w = f_1(y,z) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w = f_2(y,z) \quad \text{при} \quad x = a,$$
$$w = f_3(x,z) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad w = f_4(x,z) \quad \text{при} \quad y = b.$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(x,y,z) = {} & \int_0^b \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\eta,\zeta)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\Big]_{\xi=0} d\zeta\,d\eta \,- \\
& - \int_0^b \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\eta,\zeta)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\Big]_{\xi=a} d\zeta\,d\eta \,+ \\
& + \int_0^a \int_{-\infty}^{\infty} f_3(\xi,\zeta)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\Big]_{\eta=0} d\zeta\,d\xi \,- \\
& - \int_0^a \int_{-\infty}^{\infty} f_4(\xi,\zeta)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\Big]_{\eta=b} d\zeta\,d\xi \,+ \\
& + \int_0^a \int_0^b \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\,d\zeta\,d\eta\,d\xi.
\end{aligned}
$$

Функция Грина:

$$
G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{2}{ab}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_{nm}}\sin(p_n x)\sin(q_m y)\sin(p_n\xi)\sin(q_m\eta)\exp(-\beta_{nm}|z-\zeta|),
$$

$$
p_n = \frac{n\pi}{a}, \quad q_m = \frac{m\pi}{b}, \quad \beta_{nm} = \sqrt{p_n^2+q_m^2}.
$$

Другое представление для функции Грина:

$$
G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\Big(\frac{1}{r_{nm}^{(1)}} - \frac{1}{r_{nm}^{(2)}} - \frac{1}{r_{nm}^{(3)}} + \frac{1}{r_{nm}^{(4)}}\Big),
$$

где

$$
\begin{aligned}
r_{nm}^{(1)} &= \sqrt{(x-\xi-2na)^2+(y-\eta-2mb)^2+(z-\zeta)^2},\\
r_{nm}^{(2)} &= \sqrt{(x+\xi-2na)^2+(y-\eta-2mb)^2+(z-\zeta)^2},\\
r_{nm}^{(3)} &= \sqrt{(x-\xi-2na)^2+(y+\eta-2mb)^2+(z-\zeta)^2},\\
r_{nm}^{(4)} &= \sqrt{(x+\xi-2na)^2+(y+\eta-2mb)^2+(z-\zeta)^2}.
\end{aligned}
$$

8.2.2-10. Область: $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $-\infty < z < \infty$. Третья краевая задача.

Рассматривается бесконечная цилиндрическая область прямоугольного сечения. Заданы граничные условия:

$$
\begin{aligned}
&\partial_x w - k_1 w = f_1(y,z) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad && \partial_x w + k_2 w = f_2(y,z) \quad \text{при} \quad x = a,\\
&\partial_y w - k_3 w = f_3(x,z) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad && \partial_y w + k_4 w = f_4(x,z) \quad \text{при} \quad y = b.
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(x,y,z) = {} & -\int_0^b \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\eta,\zeta)G(x,y,z,0,\eta,\zeta)\,d\zeta\,d\eta + \int_0^b \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\eta,\zeta)G(x,y,z,a,\eta,\zeta)\,d\zeta\,d\eta \,- \\
& - \int_0^a \int_{-\infty}^{\infty} f_3(\xi,\zeta)G(x,y,z,\xi,0,\zeta)\,d\zeta\,d\xi + \int_0^a \int_{-\infty}^{\infty} f_4(\xi,\zeta)G(x,y,z,\xi,b,\zeta)\,d\zeta\,d\xi \,+ \\
& + \int_0^a \int_0^b \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\,d\zeta\,d\eta\,d\xi.
\end{aligned}
$$

Функция Грина:

$$
G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{u_{nm}(x,y)u_{nm}(\xi,\eta)}{\|u_{nm}\|^2\beta_{nm}}\exp(-\beta_{nm}|z-\zeta|),
$$

где

$$
w_{nm}(x,y) = (\mu_n\cos\mu_n x + k_1\sin\mu_n x)(\nu_m\cos\nu_m y + k_3\sin\nu_m y), \qquad \beta_{nm} = \sqrt{\mu_n^2+\nu_m^2},
$$

$$
\|w_{nm}\|^2 = \frac{1}{4}(\mu_n^2+k_1^2)(\nu_m^2+k_3^2)\Big[a + \frac{(k_1+k_2)(\mu_n^2+k_1k_2)}{(\mu_n^2+k_1^2)(\mu_n^2+k_2^2)}\Big]\Big[b + \frac{(k_3+k_4)(\nu_m^2+k_3k_4)}{(\nu_m^2+k_3^2)(\nu_m^2+k_4^2)}\Big].
$$

Здесь μ_n и ν_m — положительные корни трансцендентных уравнений
$$\operatorname{tg}(\mu a) = \frac{(k_1+k_2)\mu}{\mu^2 - k_1 k_2}, \qquad \operatorname{tg}(\nu b) = \frac{(k_3+k_4)\nu}{\nu^2 - k_3 k_4}.$$

8.2.2-11. Область: $0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b,\ -\infty < z < \infty$. Смешанные краевые задачи.

1°. Рассматривается бесконечная цилиндрическая область прямоугольного сечения. Заданы граничные условия:
$$w = f_1(y,z) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad \partial_x w = f_2(y,z) \quad \text{при} \quad x = a,$$
$$w = f_3(x,z) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \partial_y w = f_4(x,z) \quad \text{при} \quad y = b.$$

Решение:
$$\begin{aligned} w(x,y,z) = &\int_0^b \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\eta,\zeta) \Big[\frac{\partial}{\partial \xi} G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\Big]_{\xi=0} d\zeta\, d\eta + \\ &+ \int_0^b \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\eta,\zeta) G(x,y,z,a,\eta,\zeta)\, d\zeta\, d\eta + \\ &+ \int_0^a \int_{-\infty}^{\infty} f_3(\xi,\zeta) \Big[\frac{\partial}{\partial \eta} G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\Big]_{\eta=0} d\zeta\, d\xi + \\ &+ \int_0^a \int_{-\infty}^{\infty} f_4(\xi,\zeta) G(x,y,z,\xi,b,\zeta)\, d\zeta\, d\xi + \\ &+ \int_0^a \int_0^b \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi,\eta,\zeta) G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\, d\zeta\, d\eta\, d\xi. \end{aligned}$$

Функция Грина:
$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{2}{ab} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_{nm}} \sin(p_n x) \sin(q_m y) \sin(p_n \xi) \sin(q_m \eta) \exp(-\beta_{nm}|z-\zeta|),$$
где
$$p_n = \frac{(2n+1)\pi}{2a}, \quad q_m = \frac{(2m+1)\pi}{2b}, \quad \beta_{nm} = \sqrt{p_n^2 + q_m^2}.$$

2°. Рассматривается бесконечная цилиндрическая область прямоугольного сечения. Заданы граничные условия:
$$w = f_1(y,z) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w = f_2(y,z) \quad \text{при} \quad x = a,$$
$$\partial_y w = f_3(x,z) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \partial_y w = f_4(x,z) \quad \text{при} \quad y = b.$$

Решение:
$$\begin{aligned} w(x,y,z) = &\int_0^b \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\eta,\zeta) \Big[\frac{\partial}{\partial \xi} G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\Big]_{\xi=0} d\zeta\, d\eta - \\ &- \int_0^b \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\eta,\zeta) \Big[\frac{\partial}{\partial \xi} G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\Big]_{\xi=a} d\zeta\, d\eta - \\ &- \int_0^a \int_{-\infty}^{\infty} f_3(\xi,\zeta) G(x,y,z,\xi,0,\zeta)\, d\zeta\, d\xi + \\ &+ \int_0^a \int_{-\infty}^{\infty} f_4(\xi,\zeta) G(x,y,z,\xi,b,\zeta)\, d\zeta\, d\xi + \\ &+ \int_0^a \int_0^b \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi,\eta,\zeta) G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\, d\zeta\, d\eta\, d\xi. \end{aligned}$$

Функция Грина:
$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{\beta_{nm}} \sin(p_n x) \cos(q_m y) \sin(p_n \xi) \cos(q_m \eta) \exp(-\beta_{nm}|z-\zeta|),$$
где
$$p_n = \frac{n\pi}{a}, \quad q_m = \frac{m\pi}{b}, \quad \beta_{nm} = \sqrt{p_n^2 + q_m^2}, \quad A_m = \begin{cases} 1 & \text{при } m = 0, \\ 2 & \text{при } m \neq 0. \end{cases}$$

► *В разд. 8.2.2-12 — 8.2.2-17 приводятся только функции Грина. Полное решение в этих случаях строится по формулам из разд. 8.2.1-1 — 8.2.1-3.*

8.2.2-12. Область: $0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant x,\ -\infty < z < \infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается бесконечная цилиндрическая область треугольного сечения. Заданы граничные условия:

$$w = f_1(y,z) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w = f_2(x,z) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad w = f_3(x,z) \quad \text{при} \quad y = x.$$

Функция Грина:

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = H(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) - H(x,y,z,\eta,\xi,\zeta),$$

где

$$H(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{2}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_{nm}}\sin(p_n x)\sin(p_m y)\sin(p_n\xi)\sin(p_m\eta)\exp(-\beta_{nm}|z-\zeta|),$$

$$p_n = \frac{n\pi}{a}, \quad p_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta_{nm} = \sqrt{p_n^2 + p_m^2}.$$

Другое представление для функции Грина можно получить, полагая

$$H(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{r_{nm}^{(1)}} - \frac{1}{r_{nm}^{(2)}} - \frac{1}{r_{nm}^{(3)}} + \frac{1}{r_{nm}^{(4)}}\right),$$

где функции $r_{nm}^{(k)}$ $(k = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ берутся из разд. 8.2.2-9 при $a = b$.

⦿ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 74, 364–365).

8.2.2-13. Область: $0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b,\ 0 \leqslant z < \infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается полубесконечная цилиндрическая область прямоугольного сечения. Заданы граничные условия:

$$\begin{aligned} &w = f_1(y,z) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad && w = f_2(y,z) \quad \text{при} \quad x = a,\\ &w = f_3(x,z) \quad \text{при} \quad y = 0, && w = f_4(x,z) \quad \text{при} \quad y = b,\\ &w = f_5(x,y) \quad \text{при} \quad z = 0. \end{aligned}$$

Функция Грина:

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{4}{ab}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_{nm}}\sin(p_n x)\sin(q_m y)\sin(p_n\xi)\sin(q_m\eta)H_{nm}(z,\zeta),$$

$$p_n = \frac{n\pi}{a}, \quad q_m = \frac{m\pi}{b}, \quad \beta_{nm} = \sqrt{p_n^2 + q_m^2},$$

$$H_{nm}(z,\zeta) = \begin{cases} \exp(-\beta_{nm}z)\operatorname{sh}(\beta_{nm}\zeta) & \text{при} \quad z > \zeta \geqslant 0,\\ \exp(-\beta_{nm}\zeta)\operatorname{sh}(\beta_{nm}z) & \text{при} \quad \zeta > z \geqslant 0. \end{cases}$$

Другое представление для функции Грина:

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{r_{nm}^{(1)}} - \frac{1}{r_{nm}^{(2)}} - \frac{1}{r_{nm}^{(3)}} + \frac{1}{r_{nm}^{(4)}} - \frac{1}{r_{nm}^{(5)}} + \frac{1}{r_{nm}^{(6)}} + \frac{1}{r_{nm}^{(7)}} - \frac{1}{r_{nm}^{(8)}}\right),$$

где

$$\begin{aligned} r_{nm}^{(1)} &= \sqrt{(x-\xi-2na)^2 + (y-\eta-2mb)^2 + (z-\zeta)^2},\\ r_{nm}^{(2)} &= \sqrt{(x+\xi-2na)^2 + (y-\eta-2mb)^2 + (z-\zeta)^2},\\ r_{nm}^{(3)} &= \sqrt{(x-\xi-2na)^2 + (y+\eta-2mb)^2 + (z-\zeta)^2},\\ r_{nm}^{(4)} &= \sqrt{(x+\xi-2na)^2 + (y+\eta-2mb)^2 + (z-\zeta)^2},\\ r_{nm}^{(5)} &= \sqrt{(x-\xi-2na)^2 + (y-\eta-2mb)^2 + (z+\zeta)^2},\\ r_{nm}^{(6)} &= \sqrt{(x+\xi-2na)^2 + (y-\eta-2mb)^2 + (z+\zeta)^2},\\ r_{nm}^{(7)} &= \sqrt{(x-\xi-2na)^2 + (y+\eta-2mb)^2 + (z+\zeta)^2},\\ r_{nm}^{(8)} &= \sqrt{(x+\xi-2na)^2 + (y+\eta-2mb)^2 + (z+\zeta)^2}. \end{aligned}$$

8.2.2-14. Область: $0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b,\ 0 \leqslant z < \infty$. Третья краевая задача.

Рассматривается полубесконечная цилиндрическая область прямоугольного сечения. Заданы граничные условия:

$$\begin{aligned}
&\partial_x w - k_1 w = f_1(y,z) \quad \text{при} \quad x = 0, && \partial_x w + k_2 w = f_2(y,z) \quad \text{при} \quad x = a,\\
&\partial_y w - k_3 w = f_3(x,z) \quad \text{при} \quad y = 0, && \partial_y w + k_4 w = f_4(x,z) \quad \text{при} \quad y = b,\\
&\partial_z w - k_5 w = f_5(x,y) \quad \text{при} \quad z = 0.
\end{aligned}$$

Функция Грина:

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{u_{nm}(x,y)u_{nm}(\xi,\eta)}{\|u_{nm}\|^2} H_{nm}(z,\zeta),$$

где

$$w_{nm}(x,y) = (\mu_n \cos\mu_n x + k_1 \sin\mu_n x)(\nu_m \cos\nu_m y + k_3 \sin\nu_m y),$$

$$\|w_{nm}\|^2 = \frac{1}{4}(\mu_n^2 + k_1^2)(\nu_m^2 + k_3^2)\left[a + \frac{(k_1+k_2)(\mu_n^2 + k_1k_2)}{(\mu_n^2+k_1^2)(\mu_n^2+k_2^2)}\right]\left[b + \frac{(k_3+k_4)(\nu_m^2 + k_3k_4)}{(\nu_m^2+k_3^2)(\nu_m^2+k_4^2)}\right],$$

$$H_{nm}(z,\zeta) = \begin{cases} \dfrac{\exp(-\beta_{nm}z)\left[\beta_{nm}\operatorname{ch}(\beta_{nm}\zeta) + k_5 \operatorname{sh}(\beta_{nm}\zeta)\right]}{\beta_{nm}(\beta_{nm}+k_5)} & \text{при} \quad z > \zeta,\\[2ex] \dfrac{\exp(-\beta_{nm}\zeta)\left[\beta_{nm}\operatorname{ch}(\beta_{nm}z) + k_5 \operatorname{sh}(\beta_{nm}z)\right]}{\beta_{nm}(\beta_{nm}+k_5)} & \text{при} \quad \zeta > z, \end{cases} \qquad \beta_{nm} = \sqrt{\mu_n^2 + \nu_m^2}.$$

Здесь μ_n и ν_m — положительные корни трансцендентных уравнений

$$\operatorname{tg}(\mu a) = \frac{(k_1+k_2)\mu}{\mu^2 - k_1k_2}, \qquad \operatorname{tg}(\nu b) = \frac{(k_3+k_4)\nu}{\nu^2 - k_3k_4}.$$

8.2.2-15. Область: $0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b,\ 0 \leqslant z < \infty$. Смешанные краевые задачи.

1°. Рассматривается полубесконечная цилиндрическая область прямоугольного сечения. Заданы граничные условия:

$$\begin{aligned}
&w = f_1(y,z) \quad \text{при} \quad x = 0, && w = f_2(y,z) \quad \text{при} \quad x = a,\\
&w = f_3(x,z) \quad \text{при} \quad y = 0, && w = f_4(x,z) \quad \text{при} \quad y = b,\\
&\partial_z w = f_5(x,y) \quad \text{при} \quad z = 0.
\end{aligned}$$

Функция Грина:

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{4}{ab}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_{nm}} \sin(p_n x)\sin(q_m y)\sin(p_n\xi)\sin(q_m\eta) H_{nm}(z,\zeta),$$

$$p_n = \frac{n\pi}{a}, \quad q_m = \frac{m\pi}{b}, \quad \beta_{nm} = \sqrt{p_n^2 + q_m^2},$$

$$H_{nm}(z,\zeta) = \begin{cases} \exp(-\beta_{nm}z)\operatorname{ch}(\beta_{nm}\zeta) & \text{при} \quad z > \zeta \geqslant 0,\\ \exp(-\beta_{nm}\zeta)\operatorname{ch}(\beta_{nm}z) & \text{при} \quad \zeta > z \geqslant 0. \end{cases}$$

2°. Рассматривается полубесконечная цилиндрическая область прямоугольного сечения. Заданы граничные условия:

$$\begin{aligned}
&\partial_x w = f_1(y,z) \quad \text{при} \quad x = 0, && \partial_x w = f_2(y,z) \quad \text{при} \quad x = a,\\
&\partial_y w = f_3(x,z) \quad \text{при} \quad y = 0, && \partial_y w = f_4(x,z) \quad \text{при} \quad y = b,\\
&w = f_5(x,y) \quad \text{при} \quad z = 0.
\end{aligned}$$

Функция Грина:

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{ab}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_nA_m}{\beta_{nm}} \cos(p_n x)\cos(q_m y)\cos(p_n\xi)\cos(q_m\eta) H_{nm}(z,\zeta),$$

$$p_n = \frac{n\pi}{a}, \quad q_m = \frac{m\pi}{b}, \quad \beta_{nm} = \sqrt{p_n^2 + q_m^2}, \quad A_n = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad n = 0,\\ 2 & \text{при} \quad n \neq 0, \end{cases}$$

$$H_{nm}(z,\zeta) = \begin{cases} \exp(-\beta_{nm}z)\operatorname{sh}(\beta_{nm}\zeta) & \text{при} \quad z > \zeta \geqslant 0,\\ \exp(-\beta_{nm}\zeta)\operatorname{sh}(\beta_{nm}z) & \text{при} \quad \zeta > z \geqslant 0. \end{cases}$$

8.2.2-16. Область: $0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b,\ 0 \leqslant z \leqslant c$. Первая краевая задача.

Рассматривается прямоугольный параллелепипед. Заданы граничные условия:

$$\begin{aligned} &w = f_1(y,z) \quad \text{при} \quad x=0, && w = f_2(y,z) \quad \text{при} \quad x=a,\\ &w = f_3(x,z) \quad \text{при} \quad y=0, && w = f_4(x,z) \quad \text{при} \quad y=b,\\ &w = f_5(x,y) \quad \text{при} \quad z=0, && w = f_6(x,y) \quad \text{при} \quad z=c. \end{aligned}$$

1°. Функция Грина в виде двойного ряда:

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{4}{ab}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sin(p_n x)\sin(q_m y)\sin(p_n\xi)\sin(q_m\eta)F_{nm}(z,\zeta),$$

$$F_{nm}(z,\zeta) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh}(\beta_{nm}\zeta)\operatorname{sh}[\beta_{nm}(c-z)]}{\beta_{nm}\operatorname{sh}(\beta_{nm}c)} & \text{при} \quad c \geqslant z > \zeta \geqslant 0,\\[2ex] \dfrac{\operatorname{sh}(\beta_{nm}z)\operatorname{sh}[\beta_{nm}(c-\zeta)]}{\beta_{nm}\operatorname{sh}(\beta_{nm}c)} & \text{при} \quad c \geqslant \zeta > z \geqslant 0, \end{cases}$$

$$p_n = \frac{\pi n}{a}, \quad q_m = \frac{\pi m}{b}, \quad \beta_{nm} = \sqrt{p_n^2 + q_m^2}.$$

Из этой формулы можно получить два других представления для функции Грина с помощью циклической перестановки троек величин:

$$(x,\xi,a) \to (y,\eta,b) \to (z,\zeta,c).$$

2°. Функция Грина в виде тройного ряда:

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{8}{abc}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(p_n x)\sin(q_m y)\sin(s_k z)\sin(p_n\xi)\sin(q_m\eta)\sin(s_k\zeta)}{p_n^2+q_m^2+s_k^2},$$

$$p_n = \frac{\pi n}{a}, \quad q_m = \frac{\pi m}{b}, \quad s_k = \frac{\pi k}{c}.$$

3°. Другое представление для функции Грина в виде тройного ряда:

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\biggl(\frac{1}{r_{nmk}^{(1)}} - \frac{1}{r_{nmk}^{(2)}} - \frac{1}{r_{nmk}^{(3)}} + \frac{1}{r_{nmk}^{(4)}} - {} - \frac{1}{r_{nmk}^{(5)}} + \frac{1}{r_{nmk}^{(6)}} + \frac{1}{r_{nmk}^{(7)}} - \frac{1}{r_{nmk}^{(8)}}\biggr),$$

где

$$\begin{aligned} r_{nmk}^{(1)} &= \sqrt{(x-\xi-2na)^2 + (y-\eta-2mb)^2 + (z-\zeta-2kc)^2},\\ r_{nmk}^{(2)} &= \sqrt{(x+\xi-2na)^2 + (y-\eta-2mb)^2 + (z-\zeta-2kc)^2},\\ r_{nmk}^{(3)} &= \sqrt{(x-\xi-2na)^2 + (y+\eta-2mb)^2 + (z-\zeta-2kc)^2},\\ r_{nmk}^{(4)} &= \sqrt{(x+\xi-2na)^2 + (y+\eta-2mb)^2 + (z-\zeta-2kc)^2},\\ r_{nmk}^{(5)} &= \sqrt{(x-\xi-2na)^2 + (y-\eta-2mb)^2 + (z+\zeta-2kc)^2},\\ r_{nmk}^{(6)} &= \sqrt{(x+\xi-2na)^2 + (y-\eta-2mb)^2 + (z+\zeta-2kc)^2},\\ r_{nmk}^{(7)} &= \sqrt{(x-\xi-2na)^2 + (y+\eta-2mb)^2 + (z+\zeta-2kc)^2},\\ r_{nmk}^{(8)} &= \sqrt{(x+\xi-2na)^2 + (y+\eta-2mb)^2 + (z+\zeta-2kc)^2}. \end{aligned}$$

8.2.2-17. Область: $0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b,\ 0 \leqslant z \leqslant c$. Третья краевая задача.

Рассматривается прямоугольный параллелепипед. Заданы граничные условия:

$$\begin{aligned} &\partial_x w - k_1 w = f_1(y,z) \quad \text{при} \quad x=0, && \partial_x w + k_2 w = f_2(y,z) \quad \text{при} \quad x=a,\\ &\partial_y w - k_3 w = f_3(x,z) \quad \text{при} \quad y=0, && \partial_y w + k_4 w = f_4(x,z) \quad \text{при} \quad y=b,\\ &\partial_z w - k_5 w = f_5(x,y) \quad \text{при} \quad z=0, && \partial_z w + k_6 w = f_6(x,y) \quad \text{при} \quad z=c. \end{aligned}$$

Функция Грина:

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)\psi_m(y)\psi_m(\eta)\chi_s(z)\chi_s(\zeta)}{\|\varphi_n\|^2\|\psi_m\|^2\|\chi_s(\zeta)\|^2(\mu_n^2+\lambda_m^2+\nu_s^2)},$$

$$\varphi_n(x) = \cos(\mu_n x) + \frac{k_1}{\mu_n}\sin(\mu_n x), \quad \|\varphi_n\|^2 = \frac{k_2}{2\mu_n^2}\frac{\mu_n^2+k_1^2}{\mu_n^2+k_2^2} + \frac{k_1}{2\mu_n^2} + \frac{a}{2}\Big(1+\frac{k_1^2}{\mu_n^2}\Big),$$

$$\psi_m(y) = \cos(\lambda_m y) + \frac{k_3}{\lambda_m}\sin(\lambda_m y), \quad \|\psi_m\|^2 = \frac{k_4}{2\lambda_m^2}\frac{\lambda_m^2+k_3^2}{\lambda_m^2+k_4^2} + \frac{k_3}{2\lambda_m^2} + \frac{b}{2}\Big(1+\frac{k_3^2}{\lambda_m^2}\Big),$$

$$\chi_s(z) = \cos(\nu_s z) + \frac{k_5}{\nu_s}\sin(\nu_s z), \quad \|\chi_s\|^2 = \frac{k_6}{2\nu_s^2}\frac{\nu_s^2+k_5^2}{\nu_s^2+k_6^2} + \frac{k_5}{2\nu_s^2} + \frac{c}{2}\Big(1+\frac{k_5^2}{\nu_s^2}\Big),$$

где μ_n, λ_m, ν_s — положительные корни трансцендентных уравнений

$$\frac{\operatorname{tg}(\mu a)}{\mu} = \frac{k_1+k_2}{\mu^2-k_1k_2}, \quad \frac{\operatorname{tg}(\lambda b)}{\lambda} = \frac{k_3+k_4}{\lambda^2-k_3k_4}, \quad \frac{\operatorname{tg}(\nu c)}{\nu} = \frac{k_5+k_6}{\nu^2-k_5k_6}.$$

8.2.2-18. Область: $0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b,\ 0 \leqslant z \leqslant c$. Смешанная краевая задача.

Рассматривается прямоугольный параллелепипед. Заданы граничные условия:

$$\begin{aligned} &w = f_1(y,z) \quad \text{при} \quad x=0, && \partial_x w = f_2(y,z) \quad \text{при} \quad x=a,\\ &w = f_3(x,z) \quad \text{при} \quad y=0, && \partial_y w = f_4(x,z) \quad \text{при} \quad y=b,\\ &w = f_5(x,y) \quad \text{при} \quad z=0, && \partial_z w = f_6(x,y) \quad \text{при} \quad z=c. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(x,y,z) = &\int_0^a\!\!\int_0^b\!\!\int_0^c \Phi(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\,d\zeta\,d\eta\,d\xi\,+\\ &+\int_0^b\!\!\int_0^c f_1(\eta,\zeta)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\Big]_{\xi=0} d\zeta\,d\eta + \int_0^b\!\!\int_0^c f_2(\eta,\zeta)G(x,y,z,a,\eta,\zeta)\,d\zeta\,d\eta\,+\\ &+\int_0^a\!\!\int_0^c f_3(\xi,\zeta)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\Big]_{\eta=0} d\zeta\,d\xi + \int_0^a\!\!\int_0^c f_4(\xi,\zeta)G(x,y,z,\xi,b,\zeta)\,d\zeta\,d\xi\,+\\ &+\int_0^a\!\!\int_0^b f_5(\xi,\eta)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\Big]_{\zeta=0} d\eta\,d\xi + \int_0^a\!\!\int_0^b f_6(\xi,\eta)G(x,y,z,\xi,\eta,c)\,d\eta\,d\xi. \end{aligned}$$

1°. Функция Грина в виде двойного ряда:

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{4}{ab}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \sin(p_n x)\sin(q_m y)\sin(p_n\xi)\sin(q_m\eta)F_{nm}(z,\zeta),$$

$$F_{nm}(z,\zeta) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh}(\beta_{nm}\zeta)\operatorname{ch}[\beta_{nm}(c-z)]}{\beta_{nm}\operatorname{ch}(\beta_{nm}c)} & \text{при } c \geqslant z > \zeta \geqslant 0,\\[2ex] \dfrac{\operatorname{sh}(\beta_{nm}z)\operatorname{ch}[\beta_{nm}(c-\zeta)]}{\beta_{nm}\operatorname{ch}(\beta_{nm}c)} & \text{при } c \geqslant \zeta > z \geqslant 0, \end{cases}$$

$$p_n = \frac{\pi(2n+1)}{2a}, \quad q_m = \frac{\pi(2m+1)}{2b}, \quad \beta_{nm} = \sqrt{p_n^2+q_m^2}.$$

Из этой формулы можно получить два других представления для функции Грина с помощью циклической перестановки троек величин:

$$(x,\xi,a) \to (y,\eta,b) \to (z,\zeta,c).$$

2°. Функция Грина в виде тройного ряда:

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{8}{abc}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(p_n x)\sin(q_m y)\sin(s_k z)\sin(p_n\xi)\sin(q_m\eta)\sin(s_k\zeta)}{p_n^2+q_m^2+s_k^2},$$

$$p_n = \frac{\pi(2n+1)}{2a}, \quad q_m = \frac{\pi(2m+1)}{2b}, \quad s_k = \frac{\pi(2k+1)}{2c}.$$

8.2.3. Задачи в цилиндрической системе координат

Трехмерное уравнение Пуассона в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=-\Phi(r,\varphi,z),\qquad r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

8.2.3-1. Область: $0\leqslant r\leqslant R,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ -\infty<z<\infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается бесконечный круговой цилиндр. Задано граничное условие:

$$w=f(\varphi,z)\quad\text{при}\quad r=R.$$

Решение:

$$w(r,\varphi,z)=-R\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\eta,\zeta)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta)\right]_{\xi=R}d\zeta\,d\eta+$$
$$+\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta)\xi\,d\zeta\,d\eta\,d\xi.$$

Функция Грина:

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{2\pi R^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_nJ_n(\mu_{nm}r)J_n(\mu_{nm}\xi)}{\left[J_n'(\mu_{nm}R)\right]^2\mu_{nm}}\cos\left[n(\varphi-\eta)\right]\exp\left(-\mu_{nm}|z-\zeta|\right),$$

где $A_0=1$, $A_n=2$ при $n\neq 0$; $J_n(\xi)$ — функции Бесселя; μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_n(\mu R)=0$.

8.2.3-2. Область: $0\leqslant r\leqslant R,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ -\infty<z<\infty$. Третья краевая задача.

Рассматривается бесконечный круговой цилиндр. Задано граничное условие:

$$\partial_r w+kw=f(\varphi,z)\quad\text{при}\quad r=R.$$

Решение:

$$w(r,\varphi,z)=R\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,R,\eta,\zeta)\,d\zeta\,d\eta+$$
$$+\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta)\xi\,d\zeta\,d\eta\,d\xi.$$

Функция Грина:

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_n\mu_{nm}J_n(\mu_{nm}r)J_n(\mu_{nm}\xi)\cos\left[n(\varphi-\eta)\right]}{(\mu_{nm}^2R^2+k^2R^2-n^2)J_n^2(\mu_{nm}R)}\exp\left(-\mu_{nm}|z-\zeta|\right),$$

где $A_0=1$, $A_n=2$ при $n\neq 0$; $J_n(\xi)$ — функции Бесселя; μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\mu J_n'(\mu R)+kJ_n(\mu R)=0.$$

8.2.3-3. Область: $0\leqslant r\leqslant R,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant z<\infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается полубесконечный круговой цилиндр. Заданы граничные условия:

$$w=f_1(\varphi,z)\quad\text{при}\quad r=R,\qquad w=f_2(r,\varphi)\quad\text{при}\quad z=0.$$

Решение:

$$w(r,\varphi,z)=-R\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}f_1(\eta,\zeta)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta)\right]_{\xi=R}d\zeta\,d\eta+$$
$$+\int_0^{2\pi}\int_0^R f_2(\xi,\eta)\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta)\right]_{\zeta=0}\xi\,d\xi\,d\eta+$$
$$+\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\Phi(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta)\xi\,d\zeta\,d\eta\,d\xi.$$

Функция Грина:

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{2\pi R^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_n J_n(\mu_{nm}r)J_n(\mu_{nm}\xi)}{\left[J_n'(\mu_{nm}R)\right]^2\mu_{nm}}\cos\left[n(\varphi-\eta)\right]F_{nm}(z,\zeta),$$

$$F_{nm}(z,\zeta) = \exp(-\mu_{nm}|z-\zeta|) - \exp(-\mu_{nm}|z+\zeta|), \quad A_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n=0, \\ 2 & \text{при } n\neq 0, \end{cases}$$

где μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_n(\mu R) = 0$.

8.2.3-4. Область: $0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant z < \infty$. Третья краевая задача.

Рассматривается полубесконечный круговой цилиндр. Заданы граничные условия:

$$\partial_r w + k_1 w = f(\varphi, z) \quad \text{при} \quad r=R, \qquad \partial_z w - k_2 w = f_2(r,\varphi) \quad \text{при} \quad z=0.$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,\varphi,z) = R\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} & f_1(\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,R,\eta,\zeta)\,d\zeta\,d\eta - \\ & - \int_0^{2\pi}\int_0^{R} f_2(\xi,\eta)G(r,\varphi,z,R,\eta,0)\xi\,d\xi\,d\eta + \\ & + \int_0^{R}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\Phi(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta)\xi\,d\zeta\,d\eta\,d\xi. \end{aligned}$$

Функция Грина:

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_n\mu_{nm}^2 J_n(\mu_{nm}r)J_n(\mu_{nm}\xi)\cos\left[n(\varphi-\eta)\right]}{(\mu_{nm}^2R^2 + k_1^2R^2 - n^2)J_n^2(\mu_{nm}R)}F_{nm}(z,\zeta),$$

$$A_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n=0, \\ 2 & \text{при } n\neq 0, \end{cases} \quad F_{nm}(z,\zeta) = \begin{cases} \dfrac{\exp(-\mu_{nm}z)\left[\mu_{nm}\operatorname{ch}(\mu_{nm}\zeta) + k_2\operatorname{sh}(\mu_{nm}\zeta)\right]}{\mu_{nm}(\mu_{nm}+k_2)} & \text{при } z>\zeta, \\ \dfrac{\exp(-\mu_{nm}\zeta)\left[\mu_{nm}\operatorname{ch}(\mu_{nm}z) + k_2\operatorname{sh}(\mu_{nm}z)\right]}{\mu_{nm}(\mu_{nm}+k_2)} & \text{при } \zeta>z, \end{cases}$$

где $J_n(\xi)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\mu J_n'(\mu R) + k_1 J_n(\mu R) = 0.$$

8.2.3-5. Область: $0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant z < \infty$. Смешанная краевая задача.

Рассматривается полубесконечный круговой цилиндр. Заданы граничные условия:

$$w = f_1(\varphi, z) \quad \text{при} \quad r=R, \qquad \partial_z w = f_2(r,\varphi) \quad \text{при} \quad z=0.$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,\varphi,z) = -R\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} & f_1(\eta,\zeta)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta)\right]_{\xi=R}d\zeta\,d\eta - \\ & - \int_0^{2\pi}\int_0^{R} f_2(\xi,\eta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,0)\xi\,d\xi\,d\eta + \\ & + \int_0^{R}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\Phi(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta)\xi\,d\zeta\,d\eta\,d\xi. \end{aligned}$$

Функция Грина:

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{2\pi R^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_n J_n(\mu_{nm}r)J_n(\mu_{nm}\xi)}{\left[J_n'(\mu_{nm}R)\right]^2\mu_{nm}}\cos\left[n(\varphi-\eta)\right]F_{nm}(z,\zeta),$$

$$F_{nm}(z,\zeta) = \exp(-\mu_{nm}|z-\zeta|) + \exp(-\mu_{nm}|z+\zeta|), \quad A_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n=0, \\ 2 & \text{при } n\neq 0, \end{cases}$$

где $J_n(\xi)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — корни трансцендентного уравнения $J_n(\mu R) = 0$.

► *В разд. 8.2.3-6 — 8.3.3-10 приводятся только функции Грина. Полное решение в этих случаях строится по формулам из разд. 8.2.1. См. также разд. 8.3.1-4 и 8.3.1-8 при $\lambda = 0$.*

8.2.3-6. Область: $0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant z \leqslant a$. Первая краевая задача.

Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы граничные условия:

$$w = f_1(\varphi, z) \quad \text{при} \quad r = R, \qquad w = f_2(r, \varphi) \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad w = f_3(r, \varphi) \quad \text{при} \quad z = a.$$

Функция Грина в виде двойного ряда:

$$G(r, \varphi, z, \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{\pi R^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_n J_n(\mu_{nm} r) J_n(\mu_{nm} \xi)}{\left[J_n'(\mu_{nm} R)\right]^2 \mu_{nm} \operatorname{sh}(\mu_{nm} a)} \cos\left[n(\varphi - \eta)\right] F_{nm}(z, \zeta),$$

$$F_{nm}(z, \zeta) = \begin{cases} \operatorname{sh}(\mu_{nm}\zeta) \operatorname{sh}\left[\mu_{nm}(a - z)\right] & \text{при } a \geqslant z > \zeta \geqslant 0, \\ \operatorname{sh}(\mu_{nm} z) \operatorname{sh}\left[\mu_{nm}(a - \zeta)\right] & \text{при } a \geqslant \zeta > z \geqslant 0, \end{cases} \qquad A_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 2 & \text{при } n \neq 0, \end{cases}$$

где $J_n(\xi)$ — функции Бесселя (штрих означает производную по аргументу), μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_n(\mu R) = 0$.

Функция Грина в виде тройного ряда:

$$G(r, \varphi, z, \xi, \eta, \zeta) = \frac{2a}{\pi R^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_n}{[J_n'(\mu_{nm} R)]^2 \left[(a\mu_{nm})^2 + (\pi k)^2\right]} J_n(\mu_{nm} r) J_n(\mu_{nm} \xi) \times$$
$$\times \cos\left[n(\varphi - \eta)\right] \sin\left(\frac{k\pi z}{a}\right) \sin\left(\frac{k\pi\zeta}{a}\right).$$

8.2.3-7. Область: $0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant z \leqslant a$. Третья краевая задача.

Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы граничные условия:

$$\begin{aligned} \partial_r w + k_1 w &= f_1(\varphi, z) \quad \text{при} \quad r = R, \\ \partial_z w - k_2 w &= f_2(r, \varphi) \quad \text{при} \quad z = 0, \\ \partial_z w + k_3 w &= f_3(r, \varphi) \quad \text{при} \quad z = a. \end{aligned}$$

Функция Грина:

$$G(r, \varphi, z, \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_n \mu_{nm}^2 J_n(\mu_{nm} r) J_n(\mu_{nm} \xi) \cos\left[n(\varphi - \eta)\right] h_s(z) h_s(\zeta)}{(\mu_{nm}^2 R^2 + k_1^2 R^2 - n^2)(\mu_{nm}^2 + \lambda_s^2)[J_n(\mu_{nm} R)]^2 \|h_s\|^2},$$

$$h_s(z) = \cos(\lambda_s z) + \frac{k_2}{\lambda_s} \sin(\lambda_s z), \qquad \|h_s\|^2 = \frac{k_3}{2\lambda_s^2} \frac{\lambda_s^2 + k_2^2}{\lambda_s^2 + k_3^2} + \frac{k_2}{2\lambda_s^2} + \frac{a}{2}\left(1 + \frac{k_2^2}{\lambda_s^2}\right).$$

Здесь $A_0 = 1$, $A_n = 2$ при $n \neq 0$; $J_n(\xi)$ — функции Бесселя; μ_{nm} и λ_s — положительные корни трансцендентных уравнений

$$\mu J_n'(\mu R) + k_1 J_n(\mu R) = 0, \qquad \frac{\operatorname{tg}(\lambda a)}{\lambda} = \frac{k_2 + k_3}{\lambda^2 - k_2 k_3}.$$

8.2.3-8. Область: $0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant z \leqslant a$. Смешанная краевая задача.

Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы граничные условия:

$$w = f_1(\varphi, z) \quad \text{при} \quad r = R, \qquad \partial_z w = f_2(r, \varphi) \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad \partial_z w = f_3(r, \varphi) \quad \text{при} \quad z = a.$$

Функция Грина:

$$G(r, \varphi, z, \xi, \eta, \zeta) = \frac{a}{\pi R^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_n A_k}{[J_n'(\mu_{nm} R)]^2 \left[(a\mu_{nm})^2 + (\pi k)^2\right]} J_n(\mu_{nm} r) J_n(\mu_{nm} \xi) \times$$
$$\times \cos\left[n(\varphi - \eta)\right] \cos\left(\frac{k\pi z}{a}\right) \cos\left(\frac{k\pi\zeta}{a}\right),$$

где $A_0 = 1$, $A_n = 2$ при $n \neq 0$; $J_n(\xi)$ — функции Бесселя (штрих означает производную по аргументу); μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_n(\mu R) = 0$.

8.2.3-9. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, $0 \leqslant z \leqslant a$. Первая краевая задача.

Рассматривается цилиндрический сектор конечной толщины. Заданы граничные условия:

$$w = f_1(r,z) \quad \text{при} \quad \varphi = 0, \qquad w = f_2(r,z) \quad \text{при} \quad \varphi = \varphi_0, \qquad w = f_3(\varphi,z) \quad \text{при} \quad r = R,$$
$$w = f_4(r,\varphi) \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad w = f_5(r,\varphi) \quad \text{при} \quad z = a.$$

Функция Грина:

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{8a}{R^2\varphi_0} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}r) J_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}\xi)}{[J'_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}R)]^2\,[(a\mu_{nm})^2 + (\pi k)^2]} \times$$
$$\times \sin\Bigl(\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\Bigr) \sin\Bigl(\frac{n\pi\eta}{\varphi_0}\Bigr) \sin\Bigl(\frac{k\pi z}{a}\Bigr) \sin\Bigl(\frac{k\pi\zeta}{a}\Bigr),$$

где $J_{n\pi/\varphi_0}(r)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_{n\pi/\varphi_0}(\mu R) = 0$.

8.2.3-10. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, $0 \leqslant z \leqslant a$. Смешанная краевая задача.

Рассматривается цилиндрический сектор конечной толщины. Заданы граничные условия:

$$w = f_1(r,z) \quad \text{при} \quad \varphi = 0, \qquad w = f_2(r,z) \quad \text{при} \quad \varphi = \varphi_0, \qquad w = f_3(\varphi,z) \quad \text{при} \quad r = R,$$
$$\partial_z w = f_4(r,\varphi) \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad \partial_z w = f_5(r,\varphi) \quad \text{при} \quad z = a.$$

Функция Грина:

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{4a}{R^2\varphi_0} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k J_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}r) J_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}\xi)}{[J'_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm}R)]^2\,[(a\mu_{nm})^2 + (\pi k)^2]} \times$$
$$\times \sin\Bigl(\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\Bigr) \sin\Bigl(\frac{n\pi\eta}{\varphi_0}\Bigr) \cos\Bigl(\frac{k\pi z}{a}\Bigr) \cos\Bigl(\frac{k\pi\zeta}{a}\Bigr),$$

где $A_0 = 1$, $A_k = 2$ при $k \neq 0$; $J_{n\pi/\varphi_0}(r)$ — функции Бесселя; μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_{n\pi/\varphi_0}(\mu R) = 0$.

8.2.4. Задачи в сферической системе координат

Трехмерное уравнение Пуассона в сферической системе координат имеет вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Bigl(r^2\frac{\partial w}{\partial r}\Bigr) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Bigl(\sin\theta\frac{\partial w}{\partial\theta}\Bigr) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2} = -\Phi(r,\theta,\varphi), \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

► *Ниже приводятся только функции Грина. Полное решение строится по формулам из разд. 8.2.1.*

8.2.4-1. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Первая краевая задача.

Рассматривается сферическая область. Задано граничное условие:

$$w = f(\varphi,\theta) \quad \text{при} \quad r = R.$$

Функция Грина:

$$G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{4\pi\sqrt{r^2 - 2r\xi\cos\gamma + \xi^2}} - \frac{1}{4\pi\sqrt{r^2\xi^2 - 2R^2 r\xi\cos\gamma + R^4}},$$
$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\eta + \sin\theta\sin\eta\cos(\varphi - \zeta).$$

Другая форма записи функции Грина:

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} - \frac{1}{4\pi}\frac{R}{r_0|(R/r_0)^2\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|}, \qquad r_0 = |\mathbf{r}_0|,$$

где

$$\mathbf{r} = \{x,y,z\}, \qquad x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$
$$\mathbf{r}_0 = \{x_0,y_0,z_0\}, \quad x_0 = \xi\sin\eta\cos\zeta, \quad y_0 = \xi\sin\eta\sin\zeta, \quad z_0 = \xi\cos\eta.$$

⊙ *Литература*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 109–110), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 366).

8.2.4-2. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Вторая краевая задача.

Рассматривается сферическая область. Задано граничное условие:

$$\partial_r w = f(\varphi, \theta) \quad \text{при} \quad r = R.$$

Функция Грина:

$$G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} + \frac{R}{|\mathbf{r}_0||\mathbf{r}_1|} + \frac{1}{R}\ln\frac{2R^2}{R^2+|\mathbf{r}_0||\mathbf{r}_1| - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_0)}\right\},$$

где

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| = \sqrt{r^2 - 2r\xi\cos\gamma + \xi^2}, \quad |\mathbf{r}_0||\mathbf{r}_1| = \sqrt{r^2\xi^2 - 2R^2 r\xi\cos\gamma + R^4},$$
$$|\mathbf{r}_0| = \xi, \quad (\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_0) = r\xi\cos\gamma, \quad \cos\gamma = \cos\theta\cos\eta + \sin\theta\sin\eta\cos(\varphi-\zeta).$$

Для существования решения второй краевой задачи должно выполняться условие разрешимости (см. разд. 8.2.1-2).

⊙ *Литература*: Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов (1970, стр. 343–346).

8.2.4-3. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Третья краевая задача.

Рассматривается сферическая область. Задано граничное условие:

$$\partial_r w + kw = f(\theta, \varphi) \quad \text{при} \quad r = R.$$

Функция Грина:

$$G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{2\pi\sqrt{r\xi}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n} A_s B_{nms} J_{n+1/2}(\lambda_{nm} r) J_{n+1/2}(\lambda_{nm}\xi)\times$$
$$\times P_n^s(\cos\theta) P_n^s(\cos\eta)\cos\bigl[s(\varphi-\zeta)\bigr],$$

$$A_s = \begin{cases} 1 & \text{при } s=0, \\ 2 & \text{при } s\neq 0, \end{cases} \qquad B_{nms} = \frac{(2n+1)(n-s)!}{(n+s)!\bigl[R^2\lambda_{nm}^2 + (kR+n)(kR-n-1)\bigr]\bigl[J_{n+1/2}(\lambda_{nm}R)\bigr]^2}.$$

Здесь $J_{n+1/2}(r)$ — функции Бесселя, $P_n^s(\mu)$ — присоединенные функции Лежандра, которые выражаются через полиномы Лежандра $P_n(\mu)$ по формулам

$$P_n^s(\mu) = (1-\mu^2)^{s/2}\frac{d^s}{d\mu^s}P_n(\mu), \qquad P_n(\mu) = \frac{1}{n!\,2^n}\frac{d^n}{d\mu^n}(\mu^2-1)^n;$$

λ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\lambda R J'_{n+1/2}(\lambda R) + \bigl(kR - \tfrac{1}{2}\bigr)J_{n+1/2}(\lambda R) = 0.$$

8.2.4-4. Область: $R \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Первая краевая задача.

Рассматривается пространство со сферической полостью. Задано граничное условие:

$$w = f(\varphi, \theta) \quad \text{при} \quad r = R.$$

Функция Грина для внешней первой краевой задачи дается тем же выражением, что и для внутренней первой краевой задачи (см. разд. 8.2.4-1), но при $r \geqslant R$, $\xi \geqslant R$.

8.2.4-5. Область: $R \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Вторая краевая задача.

Рассматривается пространство со сферической полостью. Задано граничное условие:

$$\partial_r w = f(\varphi, \theta) \quad \text{при} \quad r = R.$$

Функция Грина:

$$G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} + \frac{R}{|\mathbf{r}_0||\mathbf{r}_1|} + \frac{1}{R}\ln\frac{(1-\cos\gamma)|\mathbf{r}||\mathbf{r}_0|}{R^2+|\mathbf{r}_0||\mathbf{r}_1| - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_0)}\right\},$$

где

$$|\mathbf{r}| = r, \quad |\mathbf{r}_0| = \xi, \quad |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| = \sqrt{r^2 - 2r\xi\cos\gamma + \xi^2}, \quad |\mathbf{r}_0||\mathbf{r}_1| = \sqrt{r^2\xi^2 - 2R^2 r\xi\cos\gamma + R^4},$$
$$(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_0) = r\xi\cos\gamma, \quad \cos\gamma = \cos\theta\cos\eta + \sin\theta\sin\eta\cos(\varphi-\zeta).$$

⊙ *Литература*: Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов (1970, стр. 346).

8.2.4-6. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Первая краевая задача.

Рассматривается сферический слой. Заданы граничные условия:

$$w = f_1(\theta,\varphi) \quad \text{при} \quad r = R_1, \qquad w = f_2(\theta,\varphi) \quad \text{при} \quad r = R_2.$$

Функция Грина:

$$G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta) = \frac{\pi}{8\sqrt{r\xi}} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} A_k B_{nmk} Z_{n+1/2}(\lambda_{nm} r) Z_{n+1/2}(\lambda_{nm}\xi) \times \\ \times P_n^k(\cos\theta) P_n^k(\cos\eta) \cos\bigl[k(\varphi-\zeta)\bigr],$$

где

$$Z_{n+1/2}(\lambda_{nm} r) = J_{n+1/2}(\lambda_{nm} R_1) Y_{n+1/2}(\lambda_{nm} r) - Y_{n+1/2}(\lambda_{nm} R_1) J_{n+1/2}(\lambda_{nm} r),$$

$$A_k = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 0, \\ 2 & \text{при } k \neq 0, \end{cases} \qquad B_{nmk} = \frac{(2n+1)(n-k)!\, J^2_{n+1/2}(\lambda_{nm} R_2)}{(n+k)!\bigl[J^2_{n+1/2}(\lambda_{nm} R_1) - J^2_{n+1/2}(\lambda_{nm} R_2)\bigr]};$$

$J_{n+1/2}(r)$ — функции Бесселя, $P_n^k(\mu)$ — присоединенные функции Лежандра (см. разд. 8.2.4-3), λ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$Z_{n+1/2}(\lambda R_2) = 0.$$

8.2.4-7. Область: $0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Первая краевая задача.

Рассматривается половина шара. Заданы граничные условия:

$$w = f_1(\varphi,\theta) \quad \text{при} \quad r = R, \qquad w = f_2(r,\varphi) \quad \text{при} \quad \theta = \pi/2,$$

Функция Грина в сферической системе координат:

$$G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta) = G_{\rm s}(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta) - G_{\rm s}(r,\theta,\varphi,\xi,\pi-\eta,\zeta),$$

где $G_{\rm s}(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta)$ — функция Грина для шара, приведенная в разд. 8.2.4-1.

Функция Грина в декартовой системе координат:

$$G(x,y,z,x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} - \frac{R}{|\mathbf{r}_0||\mathbf{r}-\mathbf{r}_0^*|}\right) - \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} - \frac{R}{|\mathbf{r}_0||\mathbf{r}-\mathbf{r}_1^*|}\right),$$

$$\mathbf{r} = \{x,y,z\}, \quad \mathbf{r}_0 = \{x_0,y_0,z_0\}, \quad \mathbf{r}_1 = \{x_0,y_0,-z_0\}, \quad \mathbf{r}_k^* = (R/r_0)^2\mathbf{r}_k, \quad k = 0,\ 1.$$

⦿ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 369), В. С. Владимиров, В. П. Михайлов, А. А. Вашарин и др. (1974, стр. 198, 200).

8.2.4-8. Область: $0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Первая краевая задача.

Рассматривается четверть шара. Заданы граничные условия:

$$w = f_1(\varphi,\theta) \quad \text{при} \quad r = R, \qquad w = f_2(r,\varphi) \quad \text{при} \quad \theta = \pi/2,$$
$$w = f_3(r,\theta) \quad \text{при} \quad \varphi = 0, \qquad w = f_4(r,\theta) \quad \text{при} \quad \varphi = \pi.$$

Функция Грина в сферической системе координат:

$$G(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta) = G_{\rm s}(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta) - G_{\rm s}(r,\theta,\varphi,\xi,\pi-\eta,\zeta) + \\ + G_{\rm s}(r,\theta,\varphi,\xi,\pi-\eta,2\pi-\zeta) - G_{\rm s}(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,2\pi-\zeta),$$

где $G_{\rm s}(r,\theta,\varphi,\xi,\eta,\zeta)$ — функция Грина для шара, приведенная в разд. 8.2.4-1.

Функция Грина в декартовой системе координат:

$$G(x,y,z,x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{4\pi}\sum_{n,k=0}^{1}(-1)^{n+k}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{nk}|} - \frac{R}{|\mathbf{r}_0||\mathbf{r}-\mathbf{r}_{nk}^*|}\right),$$

$$\mathbf{r} = \{x,y,z\}, \quad \mathbf{r}_0 = \{x_0,y_0,z_0\}, \quad \mathbf{r}_{nk} = \{x_0,(-1)^n y_0,(-1)^k z_0\}, \quad \mathbf{r}_{nk}^* = (R/r_0)^2\mathbf{r}_{nk},$$

где $r_0 = |\mathbf{r}_0|$; $n = 0,\ 1$; $k = 0,\ 1$.

⦿ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 369), В. С. Владимиров, В. П. Михайлов, А. А. Вашарин и др. (1974, стр. 198, 201).

8.3. Уравнение Гельмгольца $\Delta_3 w + \lambda w = -\Phi(\mathbf{x})$

К трехмерному уравнению Гельмгольца при $\lambda > 0$ приводит широкий класс задач, связанных с установившимися колебаниями (механическими, акустическими, тепловыми, электромагнитными и др.). При $\lambda < 0$ это уравнение описывает процессы массопереноса с объемной химической реакцией первого порядка. К уравнению Гельмгольца приводится любое уравнение эллиптического типа с постоянными коэффициентами.

8.3.1. Общие замечания, результаты и формулы

8.3.1-1. Некоторые определения.

При $\Phi = 0$ уравнение Гельмгольца называется однородным, при $\Phi \neq 0$ — неоднородным. Однородной краевой задачей называется краевая задача для однородного уравнения с однородными краевыми условиями (частным решением однородной краевой задачи является $w = 0$).

Значения параметра $\lambda = \lambda_n$, при которых существуют нетривиальные (т. е. отличные от тождественного нуля) решения однородной краевой задачи, называются собственными значениями, а соответствующие им решения $w = w_n$ — собственными функциями данной краевой задачи.

Далее одновременно рассматриваются первая, вторая и третья краевые задачи для трехмерного уравнения Гельмгольца в конечной трехмерной области V с достаточно гладкой поверхностью S. Для третьей краевой задачи с граничным условием

$$\frac{\partial w}{\partial N} + kw = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \in S$$

считается, что $k > 0$. Здесь $\frac{\partial w}{\partial N}$ — производная по внешней нормали к поверхности S и использовано обозначение $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$.

8.3.1-2. Свойства собственных значений и собственных функций.

1°. Существует бесконечное множество собственных значений $\{\lambda_n\}$, которое образует дискретный спектр данной краевой задачи.

2°. Все собственные значения положительны, за исключением собственных значений второй краевой задачи, для которой существует $\lambda_0 = 0$ (соответствующая собственная функция $w_0 = \text{const}$). Собственные значения будем располагать в порядке возрастания $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$

3°. Собственные значения стремятся к бесконечности с возрастанием их номера. Справедливы асимптотическая оценка:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n^{3/2}} = \frac{V_3}{6\pi^2},$$

где V_3 — объем рассматриваемой области.

4°. Собственные функции определены с точностью до постоянного множителя. Собственные функции, соответствующие разным собственным значениям $\lambda_n \neq \lambda_m$, ортогональны:

$$\int_V w_n w_m \, dV = 0.$$

5°. Всякая дважды непрерывно дифференцируемая функция $f = f(\mathbf{r})$, удовлетворяющая граничным условиям соответствующей краевой задачи, может быть разложена в равномерно сходящийся ряд по собственным функциям этой краевой задачи:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n w_n, \qquad \text{где} \quad a_n = \frac{1}{\|w_n\|^2} \int_V f w_n \, dV, \quad \|w_n\|^2 = \int_V w_n^2 \, dV.$$

Если f суммируема с квадратом, то ряд сходится в среднем.

6°. Собственные значения первой краевой задачи не возрастают при расширении области.

Замечание 1. В трехмерной задаче каждому собственному значению λ_n вообще говоря соответствует конечное число линейно независимых собственных функций $w_n^{(1)}, w_n^{(2)}, \ldots, w_n^{(p)}$. Эти функции всегда можно заменить такими их линейными комбинациями

$$\bar{w}_n^{(s)} = c_{s,1} w_n^{(1)} + \cdots + c_{s,s-1} w_n^{(s-1)} + w_n^{(s)}, \qquad s = 1,\, 2,\, \ldots,\, p,$$

что $\bar{w}_n^{(1)}, \bar{w}_n^{(2)}, \ldots, \bar{w}_n^{(p)}$ будут уже попарно ортогональны. Поэтому без ограничения общности можно считать, что все собственные функции ортогональны.

⊙ *Литература*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 122–125).

8.3.1-3. Неоднородное уравнение Гельмгольца с однородными краевыми условиями.

Имеются три возможности:

1°. Если параметр λ не равен ни одному из собственных значений, то существует решение задачи, определяемое рядом

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\lambda_n - \lambda} w_n, \quad \text{где} \quad A_n = \frac{1}{\|w_n\|^2} \int_V \Phi w_n \, dV, \quad \|w_n\|^2 = \int_V w_n^2 \, dV.$$

2°. Если $\lambda = \lambda_m$, то условием существования решения неоднородной задачи будет условие ортогональности функции Φ к собственной функции w_m:

$$\int_V \Phi w_m \, dV = 0.$$

Решение в этом случае имеет вид

$$w = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{A_n}{\lambda_n - \lambda_m} w_n + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{A_n}{\lambda_n - \lambda_m} w_n + C w_m, \quad A_n = \frac{1}{\|w_n\|^2} \int_V \Phi w_n \, dV,$$

где C — произвольная постоянная, $\|w_n\|^2 = \int_V w_n^2 \, dV$.

3°. Если $\lambda = \lambda_m$ и $\int_V \Phi w_m \, dV \neq 0$, то краевая задача для неоднородного уравнения не имеет решения.

Замечание 2. Если каждому собственному значению λ_n соответствует p_n взаимно ортогональных собственных функций $w_n^{(s)}$ $(s = 1, 2, \ldots, p_n)$, то при $\lambda \neq \lambda_n$ решение записывается так:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{p_n} \frac{A_n^{(s)}}{\lambda_n - \lambda} w_n^{(s)}, \quad \text{где} \quad A_n^{(s)} = \frac{1}{\|w_n^{(s)}\|^2} \int_V \Phi w_n^{(s)} \, dV, \quad \|w_n^{(s)}\|^2 = \int_V \bigl[w_n^{(s)}\bigr]^2 \, dV.$$

⊙ *Литература*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 146–147).

8.3.1-4. Решение неоднородных краевых задач общего вида.

1°. Решение первой краевой задачи для уравнения Гельмгольца с граничным условием

$$w = f(\mathbf{r}) \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \in S$$

может быть представлено в виде

$$w(\mathbf{r}) = \int_V \Phi(\boldsymbol{\rho}) G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) \, dV_\rho - \int_S f(\boldsymbol{\rho}) \frac{\partial}{\partial N_\rho} G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) \, dS_\rho. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$, $\boldsymbol{\rho} = \{\xi, \eta, \zeta\}$ $(\mathbf{r} \in V,\ \boldsymbol{\rho} \in V)$; $\frac{\partial}{\partial N_\rho}$ — производная по внешней нормали к поверхности S, взятая относительно переменных ξ, η, ζ. Функция Грина дается рядом

$$G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n(\mathbf{r}) w_n(\boldsymbol{\rho})}{\|w_n\|^2 (\lambda_n - \lambda)}, \qquad \lambda \neq \lambda_n, \tag{2}$$

где w_n и λ_n — собственные функции и собственные значения однородной первой краевой задачи.

2°. Решение второй краевой задачи с граничным условием

$$\frac{\partial w}{\partial N} = f(\mathbf{r}) \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \in S$$

может быть представлено в виде

$$w(\mathbf{r}) = \int_V \Phi(\boldsymbol{\rho}) G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})\, dV_\rho + \int_S f(\boldsymbol{\rho}) G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})\, dS_\rho. \qquad (3)$$

Здесь функция Грина дается рядом

$$G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) = -\frac{1}{V_3 \lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n(\mathbf{r}) w_n(\boldsymbol{\rho})}{\|w_n\|^2 (\lambda_n - \lambda)}, \qquad (4)$$

где V_3 — объем рассматриваемой трехмерной области, а λ_n и w_n — положительные собственные значения и соответствующие собственные функции однородной второй краевой задачи. В формуле (4) для наглядности выделено слагаемое, соответствующее нулевому собственному значению $\lambda_0 = 0$ ($w_0 = \mathrm{const}$). Считается, что $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \lambda_n$.

3°. Решение третьей краевой задачи для уравнения Гельмгольца с граничным условием

$$\frac{\partial w}{\partial N} + kw = f(\mathbf{r}) \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \in S$$

дается формулой (3), где функция Грина представлена рядом (2), в который входят собственные функции w_n и собственные значения λ_n однородной третьей краевой задачи.

4°. Пусть на разных участках поверхности $S = \sum\limits_{i=1}^{m} S_i$ выставляются неоднородные граничные условия разных типов

$$\Gamma_i[w] = f_i(\mathbf{r}) \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \in S_i.$$

Решение соответствующей смешанной краевой задачи можно записать в виде

$$w(\mathbf{r}) = \int_V \Phi(\boldsymbol{\rho}) G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})\, dV_\rho + \sum_{i=1}^{m} \int_{S_i} f_i(\boldsymbol{\rho}) \Lambda_i(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})\, dS_\rho^{(i)},$$

где

$$\Lambda_i(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) = \begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial N_\rho} G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) & \text{если на } S_i \text{ выставлено граничное условие 1-го рода,} \\ G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) & \text{если на } S_i \text{ выставлено граничное условие 2-го или 3-го рода.} \end{cases}$$

Функция Грина представляется рядом (2), в который входят собственные функции w_n и собственные значения λ_n однородной смешанной краевой задачи.

8.3.1-5. Граничные условия на бесконечности в случае неограниченной области.

Ниже считается, что функция Φ финитна или достаточно быстро затухает при $r \to \infty$.

1°. При $\lambda < 0$ в случае неограниченной области выставляется дополнительное условие затухания решения на бесконечности

$$w \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty.$$

2°. При $\lambda > 0$ в случае неограниченной области часто используются условия излучения (условия Зоммерфельда) на бесконечности, которые в трехмерных задачах имеют вид:

$$\lim_{r \to \infty} rw = \mathrm{const}, \qquad \lim_{r \to \infty} r\Big(\frac{\partial w}{\partial r} + i\sqrt{\lambda}\, w\Big) = 0,$$

где $i^2 = -1$.

Для выделения единственного решения используют также принцип предельного поглощения и принцип предельной амплитуды.

⦿ *Литература*: А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972, стр. 501–510).

8.3.1-6. Функция Грина для бесконечной цилиндрической области произвольного сечения.

Рассмотрим трехмерное уравнение Гельмгольца

$$\Delta_3 w + \lambda w = -\Phi(\mathbf{r}) \qquad (5)$$

внутри бесконечной цилиндрической области $V = \{(x,y) \in D,\ -\infty < z < \infty\}$ с произвольным сечением D. Пусть на поверхности этой области $S = \{(x,y) \in L,\ -\infty < z < \infty\}$, где L — граница сечения D, задано однородное граничное условие общего вида

$$s\frac{\partial w}{\partial N} + kw = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \in S, \tag{6}$$

где $sk \geqslant 0$. При соответствующем выборе постоянных s и k в (6) можно получить граничное условие первого ($s = 0,\ k = 1$), второго ($s = 1,\ k = 0$) и третьего ($sk \neq 0$) рода.

Функцию Грина первой и третьей краевой задачи можно представить в виде*

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(x,y)u_n(\xi,\eta)}{\|u_n\|^2\sqrt{\mu_n-\lambda}}e^{-\sqrt{\mu_n-\lambda}\,|z-\zeta|}, \qquad \|u_n\|^2 = \int_D u_n^2(x,y)\,dx\,dy, \tag{7}$$

где μ_n и u_n — собственные значения и собственные функции соответствующей двумерной краевой задачи на сечении:

$$\begin{aligned} &\Delta_2 u + \mu u = 0 && \text{при } (x,y) \in D,\\ &s\frac{\partial u}{\partial N} + ku = 0 && \text{при } (x,y) \in L. \end{aligned} \tag{8}$$

Напомним, что все $\mu_n > 0$.

Для второй краевой задачи появляется нулевое собственное значение $\mu_0 = 0$ и суммирование в формуле (7) надо проводить начиная с $n = 0$. При этом $u_0 = 1$, $\|u_0\|^2 = D_2$, где D_2 — площадь сечения D.

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 127, 583–584; 132, 615), А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972, стр. 530–533).

8.3.1-7. Функция Грина для полубесконечной цилиндрической области.

1°. Функция Грина трехмерной первой краевой задачи для уравнения (5) в полубесконечной цилиндрической области $V = \{(x,y) \in D,\ 0 \leqslant z < \infty\}$ с произвольным сечением D дается формулой

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(x,y)u_n(\xi,\eta)}{\|u_n\|^2}H_n(z,\zeta), \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} H_n(z,\zeta) &= \frac{1}{2\beta_n}\bigl[\exp(-\beta_n|z-\zeta|) - \exp(-\beta_n|z+\zeta|)\bigr] = \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{\beta_n}\exp(-\beta_n z)\,\mathrm{sh}(\beta_n\zeta) & \text{при } z > \zeta \geqslant 0,\\ \dfrac{1}{\beta_n}\exp(-\beta_n\zeta)\,\mathrm{sh}(\beta_n z) & \text{при } \zeta > z \geqslant 0, \end{cases} \qquad \beta_n = \sqrt{\mu_n-\lambda}. \end{aligned} \tag{10}$$

В формулы (9)–(10) входят собственные функции u_n и собственные значения μ_n двумерной первой краевой задачи (8) при $s = 0$, $k = 1$.

2°. Функция Грина трехмерной второй краевой задачи для уравнения (5) в полубесконечной цилиндрической области $V = \{(x,y) \in D,\ 0 \leqslant z < \infty\}$ с произвольным сечением D дается формулой

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{D_2}H_0(z,\zeta) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(x,y)u_n(\xi,\eta)}{\|u_n\|^2}H_n(z,\zeta), \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned} H_n(z,\zeta) &= \frac{1}{2\beta_n}\bigl[\exp(-\beta_n|z-\zeta|) + \exp(-\beta_n|z+\zeta|)\bigr] = \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{\beta_n}\exp(-\beta_n z)\,\mathrm{ch}(\beta_n\zeta) & \text{при } z > \zeta \geqslant 0,\\ \dfrac{1}{\beta_n}\exp(-\beta_n\zeta)\,\mathrm{ch}(\beta_n z) & \text{при } \zeta > z \geqslant 0, \end{cases} \qquad \beta_n = \sqrt{\mu_n-\lambda}. \end{aligned} \tag{12}$$

* В разд. 8.3.1-6 — 8.3.1-8 считается, что сечение D имеет конечные размеры.

В формулы (11), (12) входят собственные функции u_n и собственные значения μ_n двумерной второй краевой задачи (8) при $s=1$, $k=0$. При этом в выражении для функции Грина специально выделено слагаемое, отвечающее нулевому собственному значению $\mu_0 = 0$ (D_2 — площадь сечения D).

3°. Функция Грина трехмерной третьей краевой задачи для уравнения (5) с граничными условиями

$$\frac{\partial w}{\partial z} - k_1 w = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial N} + k_2 w = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \in S$$

в полубесконечной цилиндрической области $V = \{(x,y) \in D,\ 0 \leqslant z < \infty\}$ с произвольным сечением D и боковой поверхностью S дается формулой (9), где

$$H_n(z,\zeta) = \begin{cases} \dfrac{\exp(-\beta_n z)\big[\beta_n \operatorname{ch}(\beta_n\zeta) + k_1 \operatorname{sh}(\beta_n\zeta)\big]}{\beta_n(\beta_n + k_1)} & \text{при } z > \zeta \geqslant 0, \\ \dfrac{\exp(-\beta_n \zeta)\big[\beta_n \operatorname{ch}(\beta_n z) + k_1 \operatorname{sh}(\beta_n z)\big]}{\beta_n(\beta_n + k_1)} & \text{при } \zeta > z \geqslant 0, \end{cases} \qquad \beta_n = \sqrt{\mu_n - \lambda}. \quad (13)$$

В формулы (9), (13) входят собственные функции u_n и собственные значения μ_n двумерной третьей краевой задачи (8) при $s = 1$, $k = k_2$.

4°. Функция Грина трехмерной смешанной краевой задачи для уравнения (5) с граничным условием второго рода на торце и граничным условием первого рода на боковой поверхности дается формулами (9), (12), где μ_n и u_n собственные значения и собственные функции двумерной первой краевой задачи (8) при $s = 0$, $k = 1$.

Аналогичным образом строятся функции Грина для других смешанных краевых задач.

8.3.1-8. Функция Грина для цилиндрической области конечных размеров.

1°. Функция Грина трехмерной первой краевой задачи для уравнения (5) в цилиндрической области конечных размеров $V = \{(x,y) \in D,\ 0 \leqslant z \leqslant a\}$ с произвольным сечением D дается формулой (9), где

$$H_n(z,\zeta) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh}(\beta_n\zeta)\operatorname{sh}\big[\beta_n(a-z)\big]}{\beta_n \operatorname{sh}(\beta_n a)} & \text{при } a \geqslant z > \zeta \geqslant 0, \\ \dfrac{\operatorname{sh}(\beta_n z)\operatorname{sh}\big[\beta_n(a-\zeta)\big]}{\beta_n \operatorname{sh}(\beta_n a)} & \text{при } a \geqslant \zeta > z \geqslant 0, \end{cases} \qquad \beta_n = \sqrt{\mu_n - \lambda}. \quad (14)$$

В формулы (9), (14) входят собственные функции u_n и собственные значения μ_n двумерной первой краевой задачи (8) при $s = 0$, $k = 1$.

Другое представление для функции Грина:

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{u_n(x,y)u_n(\xi,\eta)\sin(q_m z)\sin(q_m\zeta)}{\|u_n\|^2(\mu_n + q_m^2 - \lambda)}, \qquad q_m = \frac{\pi m}{a},$$

которое является следствием формулы (2).

2°. Функция Грина трехмерной второй краевой задачи для уравнения (5) в цилиндрической области конечных размеров $V = \{(x,y) \in D,\ 0 \leqslant z \leqslant a\}$ с произвольным сечением D дается формулой (11), где

$$H_n(z,\zeta) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{ch}(\beta_n\zeta)\operatorname{ch}\big[\beta_n(a-z)\big]}{\beta_n \operatorname{sh}(\beta_n a)} & \text{при } a \geqslant z > \zeta \geqslant 0, \\ \dfrac{\operatorname{ch}(\beta_n z)\operatorname{ch}\big[\beta_n(a-\zeta)\big]}{\beta_n \operatorname{sh}(\beta_n a)} & \text{при } a \geqslant \zeta > z \geqslant 0, \end{cases} \qquad \beta_n = \sqrt{\mu_n - \lambda}. \quad (15)$$

В формулы (11), (15) входят собственные функции u_n и собственные значения μ_n двумерной второй краевой задачи (8) при $s = 1$, $k = 0$.

Другое представление для функции Грина:

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m u_n(x,y)u_n(\xi,\eta)\cos(q_m z)\cos(q_m\zeta)}{\|u_n\|^2(\mu_n + q_m^2 - \lambda)},$$

$$q_m = \frac{\pi m}{a}, \quad \varepsilon_m = \begin{cases} 1 & \text{при } m = 0, \\ 2 & \text{при } m \neq 0, \end{cases} \quad \mu_0 = 0, \quad u_0 = 1,$$

которое является следствием формулы (4).

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 132, 617).

3°. Функция Грина трехмерной третьей краевой задачи для уравнения (5) с граничными условиями

$$\frac{\partial w}{\partial z} - k_1 w = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial z} + k_2 w = 0 \quad \text{при} \quad z = a, \qquad \frac{\partial w}{\partial N} + k_3 w = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \in S$$

в цилиндрической области конечных размеров $V = \{(x, y) \in D,\ 0 \leqslant z \leqslant a\}$ с произвольным сечением D и боковой поверхностью S дается формулой (9), где

$$H_n(z,\zeta) = \begin{cases} \dfrac{[\beta_n \operatorname{ch}(\beta_n\zeta) + k_1 \operatorname{sh}(\beta_n\zeta)]\{\beta_n \operatorname{ch}[\beta_n(a-z)] + k_2 \operatorname{sh}[\beta_n(a-z)]\}}{\beta_n[\beta_n(k_1+k_2)\operatorname{ch}(\beta_n a) + (\beta_n^2 + k_1 k_2)\operatorname{sh}(\beta_n a)]} & \text{при } z > \zeta, \\[2ex] \dfrac{[\beta_n \operatorname{ch}(\beta_n z) + k_1 \operatorname{sh}(\beta_n z)]\{\beta_n \operatorname{ch}[\beta_n(a-\zeta)] + k_2 \operatorname{sh}[\beta_n(a-\zeta)]\}}{\beta_n[\beta_n(k_1+k_2)\operatorname{ch}(\beta_n a) + (\beta_n^2 + k_1 k_2)\operatorname{sh}(\beta_n a)]} & \text{при } z < \zeta, \end{cases} \tag{16}$$

$$\beta_n = \sqrt{\mu_n - \lambda} \qquad (0 \leqslant z \leqslant a,\ 0 \leqslant \zeta \leqslant a).$$

В формулы (9), (16) входят собственные функции u_n и собственные значения μ_n двумерной третьей краевой задачи (8) при $s = 1$, $k = k_3$.

4°. Функция Грина трехмерной смешанной краевой задачи для уравнения (5) с граничным условием второго рода на торцах и граничным условием первого рода на боковой поверхности дается формулами (9), (15), где μ_n и u_n собственные значения и собственные функции двумерной первой краевой задачи (8) при $s = 0$, $k = 1$.

Функция Грина трехмерной смешанной краевой задачи для уравнения (5) с граничными условиями

$$w = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad \partial_z w = 0 \quad \text{при} \quad z = a, \qquad w = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \in S$$

в цилиндрической области конечных размеров $V = \{(x, y) \in D,\ 0 \leqslant z \leqslant a\}$ с произвольным сечением D и боковой поверхностью S дается формулой (9), где

$$H_n(z,\zeta) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh}(\beta_n\zeta)\operatorname{ch}[\beta_n(a-z)]}{\beta_n \operatorname{ch}(\beta_n a)} & \text{при } a \geqslant z > \zeta \geqslant 0, \\[2ex] \dfrac{\operatorname{sh}(\beta_n z)\operatorname{ch}[\beta_n(a-\zeta)]}{\beta_n \operatorname{ch}(\beta_n a)} & \text{при } a \geqslant \zeta > z \geqslant 0, \end{cases} \qquad \beta_n = \sqrt{\mu_n - \lambda}. \tag{17}$$

В формулы (9), (17) входят собственные функции u_n и собственные значения μ_n двумерной первой краевой задачи (8) при $s = 0$, $k = 1$.

Аналогичным образом строятся функции Грина для других смешанных краевых задач.

8.3.2. Задачи декартовой системе координат

Трехмерное неоднородное уравнение Гельмгольца в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \lambda w = -\Phi(x, y, z).$$

8.3.2-1. Частные решения однородного уравнения (при $\Phi \equiv 0$):

$w = (A_1 \cos kx + A_2 \sin kx)(B_1 \cos my + B_2 \sin my)(C_1 z + C_2)$, $\lambda = k^2 + m^2$;

$w = (A_1 \cos kx + A_2 \sin kx)(B_1 \operatorname{ch} my + B_2 \operatorname{sh} my)(C_1 z + C_2)$, $\lambda = k^2 - m^2$;

$w = (A_1 \cos kx + A_2 \sin kx)(B_1 \cos my + B_2 \sin my)(C_1 \cos nz + C_2 \sin nz)$, $\lambda = k^2 + m^2 + n^2$;

$w = (A_1 \operatorname{ch} kx + A_2 \operatorname{sh} kx)(B_1 \cos my + B_2 \sin my)(C_1 \cos nz + C_2 \sin nz)$, $\lambda = -k^2 + m^2 + n^2$;

$w = (A_1 \operatorname{ch} kx + A_2 \operatorname{sh} kx)(B_1 \operatorname{ch} my + B_2 \operatorname{sh} my)(C_1 \cos nz + C_2 \sin nz)$, $\lambda = -k^2 - m^2 + n^2$;

$w = (A_1 \operatorname{ch} kx + A_2 \operatorname{sh} kx)(B_1 \operatorname{ch} my + B_2 \operatorname{sh} my)(C_1 \operatorname{ch} nz + C_2 \operatorname{sh} nz)$, $\lambda = -k^2 - m^2 - n^2$,

где A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Фундаментальные решения:

$$\mathscr{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi r} \exp(-kr), \qquad \lambda = -k^2 < 0,$$

$$\mathscr{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi r} \exp(\mp ikr), \qquad \lambda = k^2 > 0,$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $k > 0$, $i^2 = -1$.

8.3.2-2. Область: $-\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty,\ -\infty < z < \infty$.

1°. Решение при $\lambda = -k^2 < 0$:

$$w(x,y,z) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi,\eta,\zeta)\frac{\exp\bigl[-k\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}\,\bigr]}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

2°. Решение при $\lambda = k^2 > 0$:

$$w(x,y,z) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi,\eta,\zeta)\frac{\exp\bigl[-ik\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}\,\bigr]}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Для получения этого решения используются условия излучения на бесконечности (см. разд. 8.3.1-5, п. 2°).

⊙ *Литература*: А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972, стр. 501–510).

8.3.2-3. Область: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $0 \leqslant z < \infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается полупространство. Задано граничное условие:

$$w = f(x,y) \quad \text{при} \quad z = 0.$$

Решение:

$$w(x,y,z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta)\Bigl[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\Bigr]_{\zeta=0}\,d\xi\,d\eta\,+$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Функция Грина при $\lambda = -k^2 < 0$:

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{\exp(-k\mathcal{R}_1)}{4\pi\mathcal{R}_1} - \frac{\exp(-k\mathcal{R}_2)}{4\pi\mathcal{R}_2},$$
$$\mathcal{R}_1 = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2},\quad \mathcal{R}_2 = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}.$$

⊙ *Литература*: А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972, стр. 496).

8.3.2-4. Область: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $0 \leqslant z < \infty$. Вторая краевая задача.

Рассматривается полупространство. Задано граничное условие:

$$\partial_z w = f(x,y) \quad \text{при} \quad z = 0.$$

Решение:

$$w(x,y,z) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta)G(x,y,z,\xi,\eta,0)\,d\xi\,d\eta\,+$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Функция Грина при $\lambda = -k^2 < 0$:

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{\exp(-k\mathcal{R}_1)}{4\pi\mathcal{R}_1} + \frac{\exp(-k\mathcal{R}_2)}{4\pi\mathcal{R}_2},$$
$$\mathcal{R}_1 = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2},\quad \mathcal{R}_2 = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}.$$

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 126, 583).

8.3.2-5. Область: $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$, $0 \leqslant z < \infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается двугранный угол. Заданы граничные условия:

$$w = f_1(x,z) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad w = f_2(x,y) \quad \text{при} \quad z = 0.$$

Решение:

$$w(x,y,z) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f_1(\xi,\zeta)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\Big]_{\eta=0} d\xi\,d\zeta + \\ + \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f_2(\xi,\eta)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\Big]_{\zeta=0} d\xi\,d\eta + \\ + \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \Phi(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Функция Грина при $\lambda = -k^2 < 0$:

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{\exp(-k\mathcal{R}_1)}{4\pi\mathcal{R}_1} - \frac{\exp(-k\mathcal{R}_2)}{4\pi\mathcal{R}_2} - \frac{\exp(-k\mathcal{R}_3)}{4\pi\mathcal{R}_3} + \frac{\exp(-k\mathcal{R}_4)}{4\pi\mathcal{R}_4},$$

$$\mathcal{R}_1 = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}, \quad \mathcal{R}_2 = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2},$$
$$\mathcal{R}_3 = \sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2+(z-\zeta)^2}, \quad \mathcal{R}_4 = \sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2+(z+\zeta)^2}.$$

8.3.2-6. Область: $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$, $0 \leqslant z < \infty$. Вторая краевая задача.

Рассматривается двугранный угол. Заданы граничные условия:

$$\partial_y w = f_1(x,z) \quad \text{при} \quad y=0, \qquad \partial_z w = f_2(x,y) \quad \text{при} \quad z=0.$$

Решение:

$$w(x,y,z) = -\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f_1(\xi,\zeta)G(x,y,z,\xi,0,\zeta)\,d\xi\,d\zeta - \\ - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f_2(\xi,\eta)G(x,y,z,\xi,\eta,0)\,d\xi\,d\eta + \\ + \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \Phi(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Функция Грина при $\lambda = -k^2 < 0$:

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{\exp(-k\mathcal{R}_1)}{4\pi\mathcal{R}_1} + \frac{\exp(-k\mathcal{R}_2)}{4\pi\mathcal{R}_2} + \frac{\exp(-k\mathcal{R}_3)}{4\pi\mathcal{R}_3} + \frac{\exp(-k\mathcal{R}_4)}{4\pi\mathcal{R}_4},$$

$$\mathcal{R}_1 = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}, \quad \mathcal{R}_2 = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2},$$
$$\mathcal{R}_3 = \sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2+(z-\zeta)^2}, \quad \mathcal{R}_4 = \sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2+(z+\zeta)^2}.$$

8.3.2-7. Область: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $0 \leqslant z \leqslant a$. Первая краевая задача.

Рассматривается бесконечный слой. Заданы граничные условия:

$$w = f_1(x,y) \quad \text{при} \quad z=0, \qquad w = f_2(x,y) \quad \text{при} \quad z=a.$$

Решение:

$$w(x,y,z) = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f_1(\xi,\eta)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\Big]_{\zeta=0} d\xi\,d\eta - \\ - \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f_2(\xi,\eta)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\Big]_{\zeta=a} d\xi\,d\eta + \\ + \int_0^a \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \Phi(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Функция Грина при $\lambda = -k^2 < 0$:

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\exp(-k\mathcal{R}_{n1})}{4\pi\mathcal{R}_{n1}} - \frac{\exp(-k\mathcal{R}_{2n})}{4\pi\mathcal{R}_{2n}}\right],$$

$$\mathcal{R}_{1n} = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta-2na)^2},$$
$$\mathcal{R}_{2n} = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta-2na)^2}.$$

8.3.2-8. Область: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $0 \leqslant z \leqslant a$. Вторая краевая задача.

Рассматривается бесконечный слой. Заданы граничные условия:

$$\partial_z w = f_1(x,y) \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad \partial_z w = f_2(x,y) \quad \text{при} \quad z = a.$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(x,y,z) = &-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi,\eta)G(x,y,z,\xi,\eta,0)\,d\xi\,d\eta + \\ &+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\xi,\eta)G(x,y,z,\xi,\eta,a)\,d\xi\,d\eta + \\ &+\int_0^a\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta. \end{aligned}$$

Функция Грина при $\lambda = -k^2 < 0$:

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\exp(-k\mathcal{R}_{n1})}{4\pi\mathcal{R}_{n1}} + \frac{\exp(-k\mathcal{R}_{2n})}{4\pi\mathcal{R}_{2n}}\right],$$

$$\mathcal{R}_{1n} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta-2na)^2},$$
$$\mathcal{R}_{2n} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta-2na)^2}.$$

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 127, 583).

8.3.2-9. Область: $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $-\infty < z < \infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается бесконечная цилиндрическая область прямоугольного сечения. Заданы граничные условия:

$$w = f_1(y,z) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w = f_2(y,z) \quad \text{при} \quad x = a,$$
$$w = f_3(x,z) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad w = f_4(x,z) \quad \text{при} \quad y = b.$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(x,y,z) = &\int_0^b\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\eta,\zeta)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\right]_{\xi=0} d\zeta\,d\eta - \\ &-\int_0^b\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\eta,\zeta)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\right]_{\xi=a} d\zeta\,d\eta + \\ &+\int_0^a\int_{-\infty}^{\infty} f_3(\xi,\zeta)\left[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\right]_{\eta=0} d\zeta\,d\xi - \\ &-\int_0^a\int_{-\infty}^{\infty} f_4(\xi,\zeta)\left[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\right]_{\eta=b} d\zeta\,d\xi + \\ &+\int_0^a\int_0^b\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\,d\zeta\,d\eta\,d\xi. \end{aligned}$$

Функция Грина:

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{2}{ab}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_{nm}}\sin(p_n x)\sin(q_m y)\sin(p_n\xi)\sin(q_m\eta)\exp(-\beta_{nm}|z-\zeta|),$$
$$p_n = \frac{n\pi}{a}, \quad q_m = \frac{m\pi}{b}, \quad \beta_{nm} = \sqrt{p_n^2 + q_m^2 - \lambda}.$$

⊙ *Литература*: А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972, стр. 532–533).

8.3.2-10. Область: $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $-\infty < z < \infty$. Вторая краевая задача.

Рассматривается бесконечная цилиндрическая область прямоугольного сечения. Заданы граничные условия:

$$\partial_x w = f_1(y,z) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad \partial_x w = f_2(y,z) \quad \text{при} \quad x = a,$$
$$\partial_y w = f_3(x,z) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \partial_y w = f_4(x,z) \quad \text{при} \quad y = b.$$

Решение:

$$w(x,y,z) = -\int_0^b\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\eta,\zeta)G(x,y,z,0,\eta,\zeta)\,d\zeta\,d\eta + \int_0^b\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\eta,\zeta)G(x,y,z,a,\eta,\zeta)\,d\zeta\,d\eta -$$

$$-\int_0^a\int_{-\infty}^{\infty} f_3(\xi,\zeta)G(x,y,z,\xi,0,\zeta)\,d\zeta\,d\xi + \int_0^a\int_{-\infty}^{\infty} f_4(\xi,\zeta)G(x,y,z,\xi,b,\zeta)\,d\zeta\,d\xi +$$

$$+\int_0^a\int_0^b\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\,d\zeta\,d\eta\,d\xi.$$

Функция Грина:

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{2ab}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_nA_m}{\beta_{nm}}\cos(p_n x)\cos(q_m y)\cos(p_n\xi)\cos(q_m\eta)\exp(-\beta_{nm}|z-\zeta|),$$

$$p_n = \frac{n\pi}{a},\quad q_m = \frac{m\pi}{b},\quad \beta_{nm} = \sqrt{p_n^2 + q_m^2 - \lambda},\quad A_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n=0, \\ 2 & \text{при } n\neq 0. \end{cases}$$

⊙ *Литература*: А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972, стр. 533).

8.3.2-11. Область: $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $-\infty < z < \infty$. Третья краевая задача.

Рассматривается бесконечная цилиндрическая область прямоугольного сечения. Заданы граничные условия:

$$\partial_x w - k_1 w = f_1(y,z) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad \partial_x w + k_2 w = f_2(y,z) \quad \text{при} \quad x = a,$$
$$\partial_y w - k_3 w = f_3(x,z) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \partial_y w + k_4 w = f_4(x,z) \quad \text{при} \quad y = b.$$

Решение $w(x,y,z)$ определяется по формуле из разд. 8.3.2-10, где

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{u_{nm}(x,y)u_{nm}(\xi,\eta)}{\|u_{nm}\|^2\beta_{nm}}\exp(-\beta_{nm}|z-\zeta|).$$

Здесь

$$w_{nm}(x,y) = (\mu_n\cos\mu_n x + k_1\sin\mu_n x)(\nu_m\cos\nu_m y + k_3\sin\nu_m y), \qquad \beta_{nm} = \sqrt{\mu_n^2 + \nu_m^2 - \lambda},$$

$$\|w_{nm}\|^2 = \frac{1}{4}(\mu_n^2 + k_1^2)(\nu_m^2 + k_3^2)\left[a + \frac{(k_1+k_2)(\mu_n^2 + k_1k_2)}{(\mu_n^2+k_1^2)(\mu_n^2+k_2^2)}\right]\left[b + \frac{(k_3+k_4)(\nu_m^2 + k_3k_4)}{(\nu_m^2+k_3^2)(\nu_m^2+k_4^2)}\right],$$

где μ_n и ν_m — положительные корни трансцендентных уравнений

$$\operatorname{tg}(\mu a) = \frac{(k_1+k_2)\mu}{\mu^2 - k_1k_2}, \qquad \operatorname{tg}(\nu b) = \frac{(k_3+k_4)\nu}{\nu^2 - k_3k_4}.$$

8.3.2-12. Область: $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $-\infty < z < \infty$. Смешанные краевые задачи.

1°. Рассматривается бесконечная цилиндрическая область прямоугольного сечения. Заданы граничные условия:

$$w = f_1(y,z) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad \partial_x w = f_2(y,z) \quad \text{при} \quad x = a,$$
$$w = f_3(x,z) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \partial_y w = f_4(x,z) \quad \text{при} \quad y = b.$$

Решение:

$$w(x,y,z) = \int_0^b\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\eta,\zeta)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\right]_{\xi=0}d\zeta\,d\eta +$$

$$+\int_0^b\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\eta,\zeta)G(x,y,z,a,\eta,\zeta)\,d\zeta\,d\eta +$$

$$+\int_0^a\int_{-\infty}^{\infty} f_3(\xi,\zeta)\left[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\right]_{\eta=0}d\zeta\,d\xi +$$

$$+\int_0^a\int_{-\infty}^{\infty} f_4(\xi,\zeta)G(x,y,z,\xi,b,\zeta)\,d\zeta\,d\xi +$$

$$+\int_0^a\int_0^b\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\,d\zeta\,d\eta\,d\xi.$$

Функция Грина:

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{2}{ab}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\beta_{nm}}\sin(p_n x)\sin(q_m y)\sin(p_n\xi)\sin(q_m\eta)\exp(-\beta_{nm}|z-\zeta|),$$

$$p_n = \frac{(2n+1)\pi}{2a},\quad q_m = \frac{(2m+1)\pi}{2b},\quad \beta_{nm} = \sqrt{p_n^2+q_m^2-\lambda}.$$

2°. Рассматривается бесконечная цилиндрическая область прямоугольного сечения. Заданы граничные условия:

$$w = f_1(y,z) \quad\text{при}\quad x=0, \qquad w = f_2(y,z) \quad\text{при}\quad x=a,$$
$$\partial_y w = f_3(x,z) \quad\text{при}\quad y=0, \qquad \partial_y w = f_4(x,z) \quad\text{при}\quad y=b.$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(x,y,z) = &\int_0^b\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\eta,\zeta)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\Big]_{\xi=0}\,d\zeta\,d\eta - \\ &-\int_0^b\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\eta,\zeta)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\Big]_{\xi=a}\,d\zeta\,d\eta - \\ &-\int_0^a\int_{-\infty}^{\infty} f_3(\xi,\zeta)G(x,y,z,\xi,0,\zeta)\,d\zeta\,d\xi + \\ &+\int_0^a\int_{-\infty}^{\infty} f_4(\xi,\zeta)G(x,y,z,\xi,b,\zeta)\,d\zeta\,d\xi + \\ &+\int_0^a\int_0^b\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\,d\zeta\,d\eta\,d\xi. \end{aligned}$$

Функция Грина:

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{ab}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_m}{\beta_{nm}}\sin(p_n x)\cos(q_m y)\sin(p_n\xi)\cos(q_m\eta)\exp(-\beta_{nm}|z-\zeta|),$$

$$p_n = \frac{n\pi}{a},\quad q_m = \frac{m\pi}{b},\quad \beta_{nm} = \sqrt{p_n^2+q_m^2-\lambda},\quad A_m = \begin{cases} 1 & \text{при } m=0, \\ 2 & \text{при } m\neq 0. \end{cases}$$

8.3.2-13. Область: $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z < \infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается полубесконечная цилиндрическая область прямоугольного сечения. Заданы граничные условия:

$$w = f_1(y,z) \quad\text{при}\quad x=0, \qquad w = f_2(y,z) \quad\text{при}\quad x=a,$$
$$w = f_3(x,z) \quad\text{при}\quad y=0, \qquad w = f_4(x,z) \quad\text{при}\quad y=b,$$
$$w = f_5(x,y) \quad\text{при}\quad z=0.$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(x,y,z) = &\int_0^b\int_0^{\infty} f_1(\eta,\zeta)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\Big]_{\xi=0}\,d\zeta\,d\eta - \\ &-\int_0^b\int_0^{\infty} f_2(\eta,\zeta)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\Big]_{\xi=a}\,d\zeta\,d\eta + \\ &+\int_0^a\int_0^{\infty} f_3(\xi,\zeta)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\Big]_{\eta=0}\,d\zeta\,d\xi - \\ &-\int_0^a\int_0^{\infty} f_4(\xi,\zeta)\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\Big]_{\eta=b}\,d\zeta\,d\xi + \\ &+\int_0^a\int_0^b f_5(\xi,\eta)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\Big]_{\zeta=0}\,d\eta\,d\xi + \\ &+\int_0^a\int_0^b\int_0^{\infty}\Phi(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\,d\zeta\,d\eta\,d\xi. \end{aligned}$$

Функция Грина:

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{4}{ab}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_{nm}}\sin(p_n x)\sin(q_m y)\sin(p_n\xi)\sin(q_m\eta)H_{nm}(z,\zeta),$$

$$p_n = \frac{n\pi}{a}, \quad q_m = \frac{m\pi}{b}, \quad \beta_{nm} = \sqrt{p_n^2 + q_m^2 - \lambda},$$

$$H_{nm}(z,\zeta) = \begin{cases} \exp(-\beta_{nm}z)\,\mathrm{sh}(\beta_{nm}\zeta) & \text{при } z > \zeta \geqslant 0, \\ \exp(-\beta_{nm}\zeta)\,\mathrm{sh}(\beta_{nm}z) & \text{при } \zeta > z \geqslant 0. \end{cases}$$

8.3.2-14. Область: $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z < \infty$. Вторая краевая задача.

Рассматривается полубесконечная цилиндрическая область прямоугольного сечения. Заданы граничные условия:

$$\begin{aligned} &\partial_x w = f_1(y,z) \quad \text{при} \quad x = 0, && \partial_x w = f_2(y,z) \quad \text{при} \quad x = a, \\ &\partial_y w = f_3(x,z) \quad \text{при} \quad y = 0, && \partial_y w = f_4(x,z) \quad \text{при} \quad y = b, \\ &\partial_z w = f_5(x,y) \quad \text{при} \quad z = 0. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(x,y,z) = &\int_0^a\int_0^b\int_0^\infty \Phi(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\,d\zeta\,d\eta\,d\xi\, - \\ &- \int_0^b\int_0^\infty f_1(\eta,\zeta)G(x,y,z,0,\eta,\zeta)\,d\zeta\,d\eta + \int_0^b\int_0^\infty f_2(\eta,\zeta)G(x,y,z,a,\eta,\zeta)\,d\zeta\,d\eta\, - \\ &- \int_0^a\int_0^\infty f_3(\xi,\zeta)G(x,y,z,\xi,0,\zeta)\,d\zeta\,d\xi + \int_0^a\int_0^\infty f_4(\xi,\zeta)G(x,y,z,\xi,b,\zeta)\,d\zeta\,d\xi\, - \\ &- \int_0^a\int_0^b f_5(\xi,\eta)G(x,y,z,\xi,\eta,0)\,d\eta\,d\xi. \end{aligned}$$

Функция Грина:

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{ab}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_n A_m}{\beta_{nm}}\cos(p_n x)\cos(q_m y)\cos(p_n\xi)\cos(q_m\eta)H_{nm}(z,\zeta),$$

$$p_n = \frac{n\pi}{a}, \quad q_m = \frac{m\pi}{b}, \quad \beta_{nm} = \sqrt{p_n^2 + q_m^2 - \lambda}, \quad A_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 2 & \text{при } n \neq 0, \end{cases}$$

$$H_{nm}(z,\zeta) = \begin{cases} \exp(-\beta_{nm}z)\,\mathrm{ch}(\beta_{nm}\zeta) & \text{при } z > \zeta \geqslant 0, \\ \exp(-\beta_{nm}\zeta)\,\mathrm{ch}(\beta_{nm}z) & \text{при } \zeta > z \geqslant 0. \end{cases}$$

8.3.2-15. Область: $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z < \infty$. Третья краевая задача.

Рассматривается полубесконечная цилиндрическая область прямоугольного сечения. Заданы граничные условия:

$$\begin{aligned} &\partial_x w - k_1 w = f_1(y,z) \quad \text{при} \quad x = 0, && \partial_x w + k_2 w = f_2(y,z) \quad \text{при} \quad x = a, \\ &\partial_y w - k_3 w = f_3(x,z) \quad \text{при} \quad y = 0, && \partial_y w + k_4 w = f_4(x,z) \quad \text{при} \quad y = b, \\ &\partial_z w - k_5 w = f_5(x,y) \quad \text{при} \quad z = 0. \end{aligned}$$

Решение $w(x,y,z)$ определяется по формуле из разд. 8.3.2-14, где

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{u_{nm}(x,y)u_{nm}(\xi,\eta)}{\|u_{nm}\|^2}H_{nm}(z,\zeta).$$

Здесь

$$w_{nm}(x,y) = (\mu_n\cos\mu_n x + k_1\sin\mu_n x)(\nu_m\cos\nu_m y + k_3\sin\nu_m y),$$

$$\|w_{nm}\|^2 = \frac{1}{4}(\mu_n^2 + k_1^2)(\nu_m^2 + k_3^2)\left[a + \frac{(k_1 + k_2)(\mu_n^2 + k_1k_2)}{(\mu_n^2 + k_1^2)(\mu_n^2 + k_2^2)}\right]\left[b + \frac{(k_3 + k_4)(\nu_m^2 + k_3k_4)}{(\nu_m^2 + k_3^2)(\nu_m^2 + k_4^2)}\right],$$

$$H_{nm}(z,\zeta) = \begin{cases} \dfrac{\exp(-\beta_{nm}z)\left[\beta_{nm}\,\mathrm{ch}(\beta_{nm}\zeta) + k_5\,\mathrm{sh}(\beta_{nm}\zeta)\right]}{\beta_{nm}(\beta_{nm} + k_5)} & \text{при } z > \zeta, \\ \dfrac{\exp(-\beta_{nm}\zeta)\left[\beta_{nm}\,\mathrm{ch}(\beta_{nm}z) + k_5\,\mathrm{sh}(\beta_{nm}z)\right]}{\beta_{nm}(\beta_{nm} + k_5)} & \text{при } \zeta > z, \end{cases} \qquad \beta_{nm} = \sqrt{\mu_n^2 + \nu_m^2 - \lambda},$$

где μ_n и ν_m — положительные корни трансцендентных уравнений
$$\operatorname{tg}(\mu a) = \frac{(k_1+k_2)\mu}{\mu^2 - k_1 k_2}, \qquad \operatorname{tg}(\nu b) = \frac{(k_3+k_4)\nu}{\nu^2 - k_3 k_4}.$$

8.3.2-16. Область: $0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b,\ 0 \leqslant z < \infty$. Смешанные краевые задачи.

1°. Рассматривается полубесконечная цилиндрическая область прямоугольного сечения. Заданы граничные условия:
$$w = f_1(y,z) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w = f_2(y,z) \quad \text{при} \quad x = a,$$
$$w = f_3(x,z) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad w = f_4(x,z) \quad \text{при} \quad y = b,$$
$$\partial_z w = f_5(x,y) \quad \text{при} \quad z = 0.$$

Решение:
$$\begin{aligned} w(x,y,z) = &\int_0^b \int_0^\infty f_1(\eta,\zeta)\Big[\frac{\partial}{\partial \xi} G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\Big]_{\xi=0} d\zeta\, d\eta - \\ &- \int_0^b \int_0^\infty f_2(\eta,\zeta)\Big[\frac{\partial}{\partial \xi} G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\Big]_{\xi=a} d\zeta\, d\eta + \\ &+ \int_0^a \int_0^\infty f_3(\xi,\zeta)\Big[\frac{\partial}{\partial \eta} G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\Big]_{\eta=0} d\zeta\, d\xi - \\ &- \int_0^a \int_0^\infty f_4(\xi,\zeta)\Big[\frac{\partial}{\partial \eta} G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\Big]_{\eta=b} d\zeta\, d\xi - \\ &- \int_0^a \int_0^b f_5(\xi,\eta) G(x,y,z,\xi,\eta,0)\, d\eta\, d\xi + \\ &+ \int_0^a \int_0^b \int_0^\infty \Phi(\xi,\eta,\zeta) G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\, d\zeta\, d\eta\, d\xi. \end{aligned}$$

Функция Грина:
$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{4}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_{nm}} \sin(p_n x) \sin(q_m y) \sin(p_n \xi) \sin(q_m \eta) H_{nm}(z,\zeta),$$
$$p_n = \frac{n\pi}{a}, \quad q_m = \frac{m\pi}{b}, \quad \beta_{nm} = \sqrt{p_n^2 + q_m^2 - \lambda},$$
$$H_{nm}(z,\zeta) = \begin{cases} \exp(-\beta_{nm} z)\operatorname{ch}(\beta_{nm}\zeta) & \text{при} \ z > \zeta \geqslant 0, \\ \exp(-\beta_{nm} \zeta)\operatorname{ch}(\beta_{nm} z) & \text{при} \ \zeta > z \geqslant 0. \end{cases}$$

2°. Рассматривается полубесконечная цилиндрическая область прямоугольного сечения. Заданы граничные условия:
$$\partial_x w = f_1(y,z) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad \partial_x w = f_2(y,z) \quad \text{при} \quad x = a,$$
$$\partial_y w = f_3(x,z) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \partial_y w = f_4(x,z) \quad \text{при} \quad y = b,$$
$$w = f_5(x,y) \quad \text{при} \quad z = 0.$$

Решение:
$$\begin{aligned} w(x,y,z) = &\int_0^a \int_0^b \int_0^\infty \Phi(\xi,\eta,\zeta) G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\, d\zeta\, d\eta\, d\xi - \\ &- \int_0^b \int_0^\infty f_1(\eta,\zeta) G(x,y,z,0,\eta,\zeta)\, d\zeta\, d\eta + \int_0^b \int_0^\infty f_2(\eta,\zeta) G(x,y,z,a,\eta,\zeta)\, d\zeta\, d\eta - \\ &- \int_0^a \int_0^\infty f_3(\xi,\zeta) G(x,y,z,\xi,0,\zeta)\, d\zeta\, d\xi + \int_0^a \int_0^\infty f_4(\xi,\zeta) G(x,y,z,\xi,b,\zeta)\, d\zeta\, d\xi + \\ &+ \int_0^a \int_0^b f_5(\xi,\eta)\Big[\frac{\partial}{\partial \zeta} G(x,y,z,\xi,\eta,\xi)\Big]_{\zeta=0} d\eta\, d\xi. \end{aligned}$$

Функция Грина:
$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{ab} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_n A_m}{\beta_{nm}} \cos(p_n x) \cos(q_m y) \cos(p_n \xi) \cos(q_m \eta) H_{nm}(z,\zeta).$$

Здесь

$$p_n = \frac{n\pi}{a}, \quad q_m = \frac{m\pi}{b}, \quad \beta_{nm} = \sqrt{p_n^2 + q_m^2 - \lambda}, \quad A_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 2 & \text{при } n \neq 0, \end{cases}$$

$$H_{nm}(z,\zeta) = \begin{cases} \exp(-\beta_{nm} z) \operatorname{sh}(\beta_{nm}\zeta) & \text{при } z > \zeta \geqslant 0, \\ \exp(-\beta_{nm}\zeta) \operatorname{sh}(\beta_{nm} z) & \text{при } \zeta > z \geqslant 0. \end{cases}$$

► *В разд. 8.3.2-17 — 8.3.2-23 приводятся собственные значения и собственные функции однородных краевых задач для однородного уравнения Гельмгольца при $\Phi \equiv 0$. Решения соответствующих неоднородных краевых задач строятся по формулам, указанным в разд. 8.3.1-4 и 8.3.1-8.*

8.3.2-17. Область: $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$. Первая краевая задача.

Рассматривается прямоугольный параллелепипед. Заданы граничные условия:

$$\begin{aligned} w &= f_1(y,z) \quad \text{при} \quad x = 0, & w &= f_2(y,z) \quad \text{при} \quad x = a, \\ w &= f_3(x,z) \quad \text{при} \quad y = 0, & w &= f_4(x,z) \quad \text{при} \quad y = b, \\ w &= f_5(x,y) \quad \text{при} \quad z = 0, & w &= f_6(x,y) \quad \text{при} \quad z = c. \end{aligned}$$

1°. Собственные значения однородной задачи:

$$\lambda_{nmk} = \pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{k^2}{c^2}\right); \qquad n,\ m,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Собственные функции и квадрат нормы функций:

$$w_{nmk} = \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi m y}{b}\right)\sin\left(\frac{\pi k z}{c}\right), \qquad \|w_{nmk}\|^2 = \frac{abc}{8}.$$

2°. Функция Грина в виде двойного ряда:

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{4}{ab}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \sin(p_n x)\sin(q_m y)\sin(p_n\xi)\sin(q_m\eta) H_{nm}(z,\zeta),$$

$$H_{nm}(z,\zeta) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh}(\beta_{nm}\zeta)\operatorname{sh}[\beta_{nm}(c-z)]}{\beta_{nm}\operatorname{sh}(\beta_{nm}c)} & \text{при } c \geqslant z > \zeta \geqslant 0, \\ \dfrac{\operatorname{sh}(\beta_{nm}z)\operatorname{sh}[\beta_{nm}(c-\zeta)]}{\beta_{nm}\operatorname{sh}(\beta_{nm}c)} & \text{при } c \geqslant \zeta > z \geqslant 0, \end{cases}$$

$$p_n = \frac{\pi n}{a}, \quad q_m = \frac{\pi m}{b}, \quad \beta_{nm} = \sqrt{p_n^2 + q_m^2 - \lambda}.$$

Из этой формулы можно получить два других представления для функции Грина с помощью циклической перестановки троек величин:

$$(x,\xi,a) \to (y,\eta,b) \to (z,\zeta,c).$$

Функция Грина в виде тройного ряда:

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{8}{abc}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(p_n x)\sin(q_m y)\sin(s_k z)\sin(p_n\xi)\sin(q_m\eta)\sin(s_k\zeta)}{p_n^2 + q_m^2 + s_k^2 - \lambda},$$

$$p_n = \frac{\pi n}{a}, \quad q_m = \frac{\pi m}{b}, \quad s_k = \frac{\pi k}{c}.$$

⊙ *Литература*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 134), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 129, 596).

8.3.2-18. Область: $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$. Вторая краевая задача.

Рассматривается прямоугольный параллелепипед. Заданы граничные условия:

$$\begin{aligned} \partial_x w &= f_1(y,z) \quad \text{при} \quad x = 0, & \partial_x w &= f_2(y,z) \quad \text{при} \quad x = a, \\ \partial_y w &= f_3(x,z) \quad \text{при} \quad y = 0, & \partial_y w &= f_4(x,z) \quad \text{при} \quad y = b, \\ \partial_z w &= f_5(x,y) \quad \text{при} \quad z = 0, & \partial_z w &= f_6(x,y) \quad \text{при} \quad z = c. \end{aligned}$$

1°. Собственные значения однородной задачи:

$$\lambda_{nmk} = \pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{k^2}{c^2}\right); \qquad n,\ m,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Собственные функции:

$$w_{nmk} = \cos\left(\frac{\pi n x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi m y}{b}\right)\cos\left(\frac{\pi k z}{c}\right).$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w_{nmk}\|^2 = \frac{abc}{8}(1+\delta_{n0})(1+\delta_{m0})(1+\delta_{k0}), \qquad \delta_{n0} = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 0 & \text{при } n \neq 0. \end{cases}$$

2°. Функция Грина в виде двойного ряда:

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{ab}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_n\varepsilon_m\cos(p_n x)\cos(q_m y)\cos(p_n\xi)\cos(q_m\eta)H_{nm}(z,\zeta),$$

$$H_{nm}(z,\zeta) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{ch}(\beta_{nm}\zeta)\operatorname{ch}[\beta_{nm}(c-z)]}{\beta_{nm}\operatorname{sh}(\beta_{nm}c)} & \text{при } c \geqslant z > \zeta \geqslant 0, \\[2ex] \dfrac{\operatorname{ch}(\beta_{nm}z)\operatorname{ch}[\beta_{nm}(c-\zeta)]}{\beta_{nm}\operatorname{sh}(\beta_{nm}c)} & \text{при } c \geqslant \zeta > z \geqslant 0, \end{cases}$$

$$p_n = \frac{\pi n}{a}, \quad q_m = \frac{\pi m}{b}, \quad \beta_{nm} = \sqrt{p_n^2 + q_m^2 - \lambda}, \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 2 & \text{при } n \neq 0. \end{cases}$$

Из этой формулы можно получить два других представления для функции Грина с помощью циклической перестановки троек величин:

$$(x,\xi,a) \to (y,\eta,b) \to (z,\zeta,c).$$

Функция Грина в виде тройного ряда:

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{abc}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_n\varepsilon_m\varepsilon_k\cos(p_n x)\cos(q_m y)\cos(s_k z)\cos(p_n\xi)\cos(q_m\eta)\cos(s_k\zeta)}{p_n^2+q_m^2+s_k^2-\lambda},$$

$$p_n = \frac{\pi n}{a}, \quad q_m = \frac{\pi m}{b}, \quad s_k = \frac{\pi k}{c}.$$

⊙ *Литература*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 134), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 129, 597).

8.3.2-19. Область: $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$. Третья краевая задача.

Рассматривается прямоугольный параллелепипед. Заданы граничные условия:

$$\begin{aligned} &\partial_x w - k_1 w = f_1(y,z) \quad \text{при} \quad x = 0, &\quad &\partial_x w + k_2 w = f_2(y,z) \quad \text{при} \quad x = a, \\ &\partial_y w - k_3 w = f_3(x,z) \quad \text{при} \quad y = 0, &\quad &\partial_y w + k_4 w = f_4(x,z) \quad \text{при} \quad y = b, \\ &\partial_z w - k_5 w = f_5(x,y) \quad \text{при} \quad z = 0, &\quad &\partial_z w + k_6 w = f_6(x,y) \quad \text{при} \quad z = c. \end{aligned}$$

Собственные значения однородной задачи:

$$\lambda_{nml} = \mu_n^2 + \nu_m^2 + \sigma_l^2; \qquad n,\ m,\ l = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Здесь μ_n, ν_m, σ_l — положительные корни трансцендентных уравнений

$$\operatorname{tg}(\mu a) = \frac{(k_1+k_2)\mu}{\mu^2 - k_1k_2}, \quad \operatorname{tg}(\nu b) = \frac{(k_3+k_4)\nu}{\nu^2 - k_3k_4}, \quad \operatorname{tg}(\sigma c) = \frac{(k_5+k_6)\sigma}{\sigma^2 - k_5k_6}.$$

Собственные функции:

$$w_{nml} = \frac{1}{A_nB_mC_l}(\mu_n\cos\mu_n x + k_1\sin\mu_n x)(\nu_m\cos\nu_m y + k_3\sin\nu_m y)(\sigma_l\cos\sigma_l z + k_5\sin\sigma_l z),$$

$$A_n = \sqrt{\mu_n^2 + k_1^2}, \quad B_m = \sqrt{\nu_m^2 + k_3^2}, \quad C_l = \sqrt{\sigma_l^2 + k_5^2}.$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w_{nml}\|^2 = \frac{1}{8}\left[a + \frac{(k_1+k_2)(\mu_n^2+k_1k_2)}{(\mu_n^2+k_1^2)(\mu_n^2+k_2^2)}\right]\left[b + \frac{(k_3+k_4)(\nu_m^2+k_3k_4)}{(\nu_m^2+k_3^2)(\nu_m^2+k_4^2)}\right]\left[c + \frac{(k_5+k_6)(\sigma_l^2+k_5k_6)}{(\sigma_l^2+k_5^2)(\sigma_l^2+k_6^2)}\right].$$

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 129, 597).

8.3.2-20. Область: $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$. Смешанные краевые задачи.

1°. Рассматривается прямоугольный параллелепипед.

$$w = f_1(y,z) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w = f_2(y,z) \quad \text{при} \quad x = a,$$
$$w = f_3(x,z) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad w = f_4(x,z) \quad \text{при} \quad y = b,$$
$$\partial_z w = f_5(x,y) \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad \partial_z w = f_6(x,y) \quad \text{при} \quad z = c.$$

Собственные значения однородной задачи:

$$\lambda_{nmk} = \pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{k^2}{c^2}\right); \qquad n,\ m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots;\quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Собственные функции:

$$w_{nmk} = \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi m y}{b}\right)\cos\left(\frac{\pi k z}{c}\right).$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w_{nmk}\|^2 = \frac{abc}{8}(1 + \delta_{k0}), \qquad \delta_{k0} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 0, \\ 0 & \text{при } k \neq 0. \end{cases}$$

2°. Рассматривается прямоугольный параллелепипед. Заданы граничные условия:

$$w = f_1(y,z) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w = f_2(y,z) \quad \text{при} \quad x = a,$$
$$\partial_y w = f_3(x,z) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \partial_y w = f_4(x,z) \quad \text{при} \quad y = b,$$
$$\partial_z w = f_5(x,z) \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad \partial_z w = f_6(x,y) \quad \text{при} \quad z = c.$$

Собственные значения однородной задачи:

$$\lambda_{nmk} = \pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{k^2}{c^2}\right); \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots;\quad m,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Собственные функции:

$$w_{nmk} = \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi m y}{b}\right)\cos\left(\frac{\pi k z}{c}\right).$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w_{nmk}\|^2 = \frac{abc}{8}(1 + \delta_{m0})(1 + \delta_{k0}), \qquad \delta_{m0} = \begin{cases} 1 & \text{при } m = 0, \\ 0 & \text{при } m \neq 0. \end{cases}$$

8.3.2-21. Область: $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant x$, $0 \leqslant z \leqslant c$. Первая краевая задача.

Рассматривается прямая призма с основанием в виде равнобедренного прямоугольного треугольника. Заданы граничные условия:

$$w = f_1(y,z) \quad \text{при} \quad x = 0, \quad w = f_2(x,z) \quad \text{при} \quad y = 0, \quad w = f_3(x,z) \quad \text{при} \quad y = x,$$
$$w = f_4(x,z) \quad \text{при} \quad z = 0, \quad w = f_5(x,y) \quad \text{при} \quad z = c.$$

Собственные значения однородной задачи:

$$\lambda_{nmk} = \frac{\pi^2}{a^2}\left[(n+m)^2 + m^2\right] + \frac{\pi^2 k^2}{c^2}; \qquad n, m, k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Собственные функции:

$$w_{nmk} = \left\{\sin\left[\frac{\pi}{a}(n+m)x\right]\sin\left(\frac{\pi}{a}my\right) - (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{a}mx\right)\sin\left[\frac{\pi}{a}(n+m)y\right]\right\}\sin\left(\frac{\pi k z}{c}\right).$$

8.3.2-22. Область: $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant x$, $0 \leqslant z \leqslant c$. Вторая краевая задача.

Рассматривается прямая призма с основанием в виде равнобедренного прямоугольного треугольника. Заданы граничные условия:

$$\partial_x w = f_1(y,z) \quad \text{при} \quad x = 0, \quad \partial_y w = f_2(x,z) \quad \text{при} \quad y = 0, \quad \partial_N w = f_3(x,z) \quad \text{при} \quad y = x,$$
$$\partial_z w = f_4(x,z) \quad \text{при} \quad z = 0, \quad \partial_z w = f_5(x,y) \quad \text{при} \quad z = c,$$

где $\partial_N w = \mathbf{N}\cdot\nabla w = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_x w + \partial_y w)$.

Собственные значения однородной задачи:

$$\lambda_{nmk} = \frac{\pi^2}{a^2}\left[(n+m)^2 + m^2\right] + \frac{\pi^2 k^2}{c^2}; \qquad n, m, k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Собственные функции:

$$w_{nmk} = \left\{\cos\left[\frac{\pi}{a}(n+m)x\right]\cos\left(\frac{\pi}{a}my\right) - (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{a}mx\right)\cos\left[\frac{\pi}{a}(n+m)y\right]\right\}\cos\left(\frac{\pi k z}{c}\right).$$

8.3.2-23. Область: $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant x$, $0 \leqslant z \leqslant c$. Смешанные краевые задачи.

1°. Рассматривается прямая призма с основанием в виде равнобедренного прямоугольного треугольника. Заданы граничные условия:

$$w = f_1(y,z) \quad \text{при} \quad x=0, \qquad w = f_2(x,z) \quad \text{при} \quad y=0, \qquad w = f_3(x,z) \quad \text{при} \quad y=x,$$
$$\partial_z w = f_4(x,z) \quad \text{при} \quad z=0, \qquad \partial_z w = f_5(x,y) \quad \text{при} \quad z=c.$$

Собственные значения однородной задачи:

$$\lambda_{nmk} = \frac{\pi^2}{a^2}\left[(n+m)^2+m^2\right] + \frac{\pi^2k^2}{c^2}; \qquad n,m = 1,\,2,\,3,\,\ldots; \quad k=0,\,1,\,2,\,\ldots$$

Собственные функции:

$$w_{nmk} = \left\{\sin\left[\frac{\pi}{a}(n+m)x\right]\sin\left(\frac{\pi}{a}my\right) - (-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{a}mx\right)\sin\left[\frac{\pi}{a}(n+m)y\right]\right\}\cos\left(\frac{\pi kz}{c}\right).$$

2°. Рассматривается прямая призма с основанием в виде равнобедренного прямоугольного треугольника. Заданы граничные условия:

$$\partial_x w = f_1(y,z) \quad \text{при} \quad x=0, \qquad \partial_y w = f_2(x,z) \quad \text{при} \quad y=0, \qquad \partial_N w = f_3(x,z) \quad \text{при} \quad y=x,$$
$$w = f_4(x,z) \quad \text{при} \quad z=0, \qquad w = f_5(x,y) \quad \text{при} \quad z=c.$$

Собственные значения однородной задачи:

$$\lambda_{nmk} = \frac{\pi^2}{a^2}\left[(n+m)^2+m^2\right] + \frac{\pi^2k^2}{c^2}; \qquad n,m = 0,\,1,\,2,\,\ldots; \quad k=1,\,2,\,3,\,\ldots$$

Собственные функции:

$$w_{nmk} = \left\{\cos\left[\frac{\pi}{a}(n+m)x\right]\cos\left(\frac{\pi}{a}my\right) - (-1)^n\cos\left(\frac{\pi}{a}mx\right)\cos\left[\frac{\pi}{a}(n+m)y\right]\right\}\sin\left(\frac{\pi kz}{c}\right).$$

8.3.3. Задачи в цилиндрической системе координат

Трехмерное неоднородное уравнение Гельмгольца в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \lambda w = -\Phi(r,\varphi,z), \qquad r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

8.3.3-1. Частные решения однородного уравнения (при $\Phi \equiv 0$):

$$w = \left[AJ_0(r\sqrt{\lambda}) + BY_0(r\sqrt{\lambda})\right](C_1\varphi + D_1)(C_2z+D_2),$$
$$w = J_m\left(r\sqrt{\lambda-\mu^2}\right)(A\cos m\varphi + B\sin m\varphi)(C\cos\mu z + D\sin\mu z), \quad \lambda>\mu^2,$$
$$w = Y_m\left(r\sqrt{\lambda-\mu^2}\right)(A\cos m\varphi + B\sin m\varphi)(C\cos\mu z + D\sin\mu z), \quad \lambda>\mu^2,$$
$$w = J_m\left(r\sqrt{\lambda+\mu^2}\right)(A\cos m\varphi + B\sin m\varphi)(C\operatorname{ch}\mu z + D\operatorname{sh}\mu z), \quad \lambda>-\mu^2,$$
$$w = Y_m\left(r\sqrt{\lambda+\mu^2}\right)(A\cos m\varphi + B\sin m\varphi)(C\operatorname{ch}\mu z + D\operatorname{sh}\mu z), \quad \lambda>-\mu^2,$$
$$w = I_m\left(r\sqrt{\mu^2-\lambda}\right)(A\cos m\varphi + B\sin m\varphi)(C\cos\mu z + D\sin\mu z), \quad \lambda<\mu^2,$$
$$w = Y_m\left(r\sqrt{\mu^2-\lambda}\right)(A\cos m\varphi + B\sin m\varphi)(C\cos\mu z + D\sin\mu z), \quad \lambda<\mu^2,$$

где $m = 0,\,1,\,2,\,\ldots$; A, B, C, D, C_1, C_2, D_1, D_2, μ — произвольные постоянные; $J_m(\xi)$ и $Y_m(\xi)$ — функции Бесселя; $I_m(\xi)$ и $K_m(\xi)$ — модифицированные функции Бесселя.

8.3.3-2. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $-\infty < z < \infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается бесконечный круговой цилиндр. Задано граничное условие:

$$w = f(\varphi, z) \quad \text{при} \quad r=R.$$

Решение:

$$w(r,\varphi,z) = -R\int_0^{2\pi}\!\!\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta,\zeta)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta)\right]_{\xi=R} d\zeta\,d\eta \,+$$
$$+\int_0^R\!\!\int_0^{2\pi}\!\!\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta)\xi\,d\zeta\,d\eta\,d\xi.$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{2\pi R^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_n J_n(\mu_{nm}r)J_n(\mu_{nm}\xi)}{\left[J_n'(\mu_{nm}R)\right]^2\beta_{nm}}\cos\bigl[n(\varphi-\eta)\bigr]\exp\bigl(-\beta_{nm}|z-\zeta|\bigr),$$

$$\beta_{nm} = \sqrt{\mu_{nm}^2-\lambda}, \quad A_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n=0, \\ 2 & \text{при } n\neq 0, \end{cases}$$

где $J_n(\xi)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_n(\mu R) = 0$.

⊙ *Литература*: А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972, стр. 532–533).

8.3.3-3. Область: $0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ -\infty < z < \infty$. Вторая краевая задача.

Рассматривается бесконечный круговой цилиндр. Задано граничное условие:

$$\partial_r w = f(\varphi, z) \quad \text{при} \quad r = R.$$

Решение:

$$w(r,\varphi,z) = R\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,R,\eta,\zeta)\,d\zeta\,d\eta + \\ + \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta)\xi\,d\zeta\,d\eta\,d\xi.$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{\exp\bigl(-\sqrt{-\lambda}\,|z-\zeta|\bigr)}{2\pi R^2\sqrt{-\lambda}} + \\ + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_n\mu_{nm}^2 J_n(\mu_{nm}r)J_n(\mu_{nm}\xi)\cos\bigl[n(\varphi-\eta)\bigr]}{(\mu_{nm}^2R^2-n^2)J_n^2(\mu_{nm}R)\beta_{nm}}\exp\bigl(-\beta_{nm}|z-\zeta|\bigr),$$

$$\beta_{nm} = \sqrt{\mu_{nm}^2-\lambda}, \quad A_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n=0, \\ 2 & \text{при } n\neq 0, \end{cases}$$

где $J_n(\xi)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_n'(\mu R) = 0$.

⊙ *Литература*: А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972, стр. 532–533).

8.3.3-4. Область: $0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ -\infty < z < \infty$. Третья краевая задача.

Рассматривается бесконечный круговой цилиндр. Задано граничное условие:

$$\partial_r w + kw = f(\varphi, z) \quad \text{при} \quad r = R.$$

Решение:

$$w(r,\varphi,z) = R\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,R,\eta,\zeta)\,d\zeta\,d\eta + \\ + \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta)\xi\,d\zeta\,d\eta\,d\xi.$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_n\mu_{nm}^2 J_n(\mu_{nm}r)J_n(\mu_{nm}\xi)\cos\bigl[n(\varphi-\eta)\bigr]}{(\mu_{nm}^2R^2+k^2R^2-n^2)J_n^2(\mu_{nm}R)\beta_{nm}}\exp\bigl(-\beta_{nm}|z-\zeta|\bigr),$$

$$\beta_{nm} = \sqrt{\mu_{nm}^2-\lambda}, \quad A_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n=0, \\ 2 & \text{при } n\neq 0, \end{cases}$$

где $J_n(\xi)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\mu J_n'(\mu R) + kJ_n(\mu R) = 0.$$

8.3.3-5. Область: $0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant z < \infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается полубесконечный круговой цилиндр. Заданы граничные условия:

$$w = f_1(\varphi, z) \quad \text{при} \quad r = R, \qquad w = f_2(r, \varphi) \quad \text{при} \quad z = 0.$$

Решение:

$$w(r,\varphi,z) = -R\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f_1(\eta,\zeta)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta)\Big]_{\xi=R}\,d\zeta\,d\eta + \int_0^{2\pi}\int_0^{R} f_2(\xi,\eta)\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta)\Big]_{\zeta=0}\xi\,d\xi\,d\eta + \int_0^{R}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\Phi(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta)\xi\,d\zeta\,d\eta\,d\xi.$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{2\pi R^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_n J_n(\mu_{nm}r)J_n(\mu_{nm}\xi)}{\big[J_n'(\mu_{nm}R)\big]^2\beta_{nm}}\cos\big[n(\varphi-\eta)\big]F_{nm}(z,\zeta),$$

$$F_{nm}(z,\zeta)=\exp(-\beta_{nm}|z-\zeta|)-\exp(-\beta_{nm}|z+\zeta|),\quad \beta_{nm}=\sqrt{\mu_{nm}^2-\lambda},\quad A_n=\begin{cases}1 & \text{при } n=0,\\ 2 & \text{при } n\neq 0,\end{cases}$$

где $J_n(\xi)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_n(\mu R)=0$.

8.3.3-6. Область: $0\leqslant r\leqslant R,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant z<\infty$. Вторая краевая задача.

Рассматривается полубесконечный круговой цилиндр. Заданы граничные условия:

$$\partial_r w = f_1(\varphi,z)\quad\text{при}\quad r=R,\qquad \partial_z w = f_2(r,\varphi)\quad\text{при}\quad z=0.$$

Решение:

$$w(r,\varphi,z) = R\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f_1(\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,R,\eta,\zeta)\,d\zeta\,d\eta - \int_0^{2\pi}\int_0^{R} f_2(\xi,\eta)G(r,\varphi,z,R,\eta,0)\xi\,d\xi\,d\eta + \int_0^{R}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\Phi(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta)\xi\,d\zeta\,d\eta\,d\xi.$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{\exp\big(-\sqrt{-\lambda}\,|z-\zeta|\big)+\exp\big(-\sqrt{-\lambda}\,|z+\zeta|\big)}{2\pi R^2\sqrt{-\lambda}} + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_n\mu_{nm}^2 J_n(\mu_{nm}r)J_n(\mu_{nm}\xi)\cos\big[n(\varphi-\eta)\big]}{(\mu_{nm}^2R^2-n^2)J_n^2(\mu_{nm}R)\beta_{nm}}F_{nm}(z,\zeta),$$

$$F_{nm}(z,\zeta)=\exp(-\beta_{nm}|z-\zeta|)+\exp(-\beta_{nm}|z+\zeta|),\quad \beta_{nm}=\sqrt{\mu_{nm}^2-\lambda},\quad A_n=\begin{cases}1 & \text{при } n=0,\\ 2 & \text{при } n\neq 0,\end{cases}$$

где $J_n(\xi)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_n'(\mu R)=0$.

8.3.3-7. Область: $0\leqslant r\leqslant R,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant z<\infty$. Третья краевая задача.

Рассматривается полубесконечный круговой цилиндр. Заданы граничные условия:

$$\partial_r w + k_1 w = f(\varphi,z)\quad\text{при}\quad r=R,\qquad \partial_z w - k_2 w = f_2(r,\varphi)\quad\text{при}\quad z=0.$$

Решение:

$$w(r,\varphi,z) = R\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f_1(\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,R,\eta,\zeta)\,d\zeta\,d\eta - \int_0^{2\pi}\int_0^{R} f_2(\xi,\eta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,0)\xi\,d\xi\,d\eta + \int_0^{R}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\Phi(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta)\xi\,d\zeta\,d\eta\,d\xi.$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_n\mu_{nm}^2 J_n(\mu_{nm}r)J_n(\mu_{nm}\xi)\cos[n(\varphi-\eta)]}{(\mu_{nm}^2R^2+k_1^2R^2-n^2)J_n^2(\mu_{nm}R)}F_{nm}(z,\zeta),$$

$$A_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n=0,\\ 2 & \text{при } n\neq 0,\end{cases}\quad F_{nm}(z,\zeta) = \begin{cases} \dfrac{\exp(-\beta_{nm}z)[\beta_{nm}\operatorname{ch}(\beta_{nm}\zeta)+k_2\operatorname{sh}(\beta_{nm}\zeta)]}{\beta_{nm}(\beta_{nm}+k_2)} & \text{при } z>\zeta,\\ \dfrac{\exp(-\beta_{nm}\zeta)[\beta_{nm}\operatorname{ch}(\beta_{nm}z)+k_2\operatorname{sh}(\beta_{nm}z)]}{\beta_{nm}(\beta_{nm}+k_2)} & \text{при } \zeta>z,\end{cases}$$

где $J_n(\xi)$ — функции Бесселя, $\beta_{nm}=\sqrt{\mu_{nm}^2-\lambda}$, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\mu J_n'(\mu R) + k_1 J_n(\mu R) = 0.$$

8.3.3-8. Область: $0\leqslant r\leqslant R$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $0\leqslant z<\infty$. Смешанная краевая задача.

Рассматривается полубесконечный круговой цилиндр. Заданы граничные условия:

$$w = f_1(\varphi,z) \quad\text{при}\quad r=R, \qquad \partial_z w = f_2(r,\varphi) \quad\text{при}\quad z=0.$$

Решение:

$$\begin{aligned} w(r,\varphi,z) = &-R\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f_1(\eta,\zeta)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta)\Big]_{\xi=R}\,d\zeta\,d\eta\,-\\ &-\int_0^{2\pi}\int_0^{R} f_2(\xi,\eta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,0)\xi\,d\xi\,d\eta\,+\\ &+\int_0^{R}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\Phi(\xi,\eta,\zeta)G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta)\xi\,d\zeta\,d\eta\,d\xi. \end{aligned}$$

Здесь

$$G(r,\varphi,z,\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{2\pi R^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_nJ_n(\mu_{nm}r)J_n(\mu_{nm}\xi)}{[J_n'(\mu_{nm}R)]^2\beta_{nm}}\cos[n(\varphi-\eta)]F_{nm}(z,\zeta),$$

$$F_{nm}(z,\zeta)=\exp(-\beta_{nm}|z-\zeta|)+\exp(-\beta_{nm}|z+\zeta|),\quad \beta_{nm}=\sqrt{\mu_{nm}^2-\lambda},\quad A_n=\begin{cases}1 & \text{при } n=0,\\ 2 & \text{при } n\neq 0,\end{cases}$$

где $J_n(\xi)$ — функции Бесселя, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_n(\mu R)=0$.

► *В разд. 8.3.3-9 — 8.3.3-16 приводятся только собственные значения и собственные функции однородных краевых задач для однородного уравнения Гельмгольца при $\Phi\equiv 0$. Решения соответствующих неоднородных краевых задач строятся по формулам, указанным в разд. 8.3.1-4 и 8.3.1.8.*

8.3.3-9. Область: $0\leqslant r\leqslant R$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $0\leqslant z\leqslant a$. Первая краевая задача.

Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы граничные условия:

$$w=0 \quad\text{при}\quad r=R, \qquad w=0 \quad\text{при}\quad z=0, \qquad w=0 \quad\text{при}\quad z=a.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{nmk} = \frac{\pi^2k^2}{a^2}+\frac{\mu_{nm}^2}{R^2};\qquad n=0,\,1,\,\ldots;\quad m,\,k=1,\,2,\,\ldots$$

Здесь μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_n(\mu)=0$.

Собственные функции:

$$w_{nmk}^{(1)} = J_n\Big(\mu_{nm}\frac{r}{R}\Big)\cos(n\varphi)\sin\Big(\frac{\pi kz}{a}\Big),$$
$$w_{nmk}^{(2)} = J_n\Big(\mu_{nm}\frac{r}{R}\Big)\sin(n\varphi)\sin\Big(\frac{\pi kz}{a}\Big).$$

Собственные функции обладающие осевой симметрией:

$$w_{0mk}^{(1)} = J_0\Big(\mu_{0m}\frac{r}{R}\Big)\sin\Big(\frac{\pi kz}{a}\Big).$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w^{(1)}_{nmk}\|^2 = \|w^{(2)}_{nmk}\|^2 = \frac{\pi R^2 a}{4}(1+\delta_{n0})\bigl[J'_n(\mu_{nm})\bigr]^2, \qquad \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{при } n=m, \\ 0 & \text{при } n\neq m. \end{cases}$$

⊙ *Литература*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 136), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 129, 599).

8.3.3-10. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant a$. Вторая краевая задача.

Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы граничные условия:

$$\partial_r w = 0 \quad \text{при} \quad r=R, \qquad \partial_z w = 0 \quad \text{при} \quad z=0, \qquad \partial_z w = 0 \quad \text{при} \quad z=a.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{000} = 0, \quad \lambda_{nmk} = \frac{\pi^2 k^2}{a^2} + \frac{\mu^2_{nm}}{R^2}; \qquad n=0,\,1,\,\ldots; \quad k,\,m = 0,\,1,\,\ldots$$

Здесь μ_{nm} — корни трансцендентного уравнения $J'_n(\mu) = 0$.

Собственные функции:

$$w^{(1)}_{nmk} = J_n\Bigl(\mu_{nm}\frac{r}{R}\Bigr)\cos(n\varphi)\cos\Bigl(\frac{\pi k z}{a}\Bigr), \qquad w^{(1)}_{000} = 1,$$
$$w^{(2)}_{nmk} = J_n\Bigl(\mu_{nm}\frac{r}{R}\Bigr)\sin(n\varphi)\cos\Bigl(\frac{\pi k z}{a}\Bigr).$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w^{(1)}_{nmk}\|^2 = \|w^{(2)}_{nmk}\|^2 = \frac{\pi R^2 a}{4\mu^2_{nm}}(1+\delta_{n0})(\mu^2_{nm}-n^2)\bigl[J_n(\mu_{nm})\bigr]^2, \quad \|w^{(1)}_{000}\|^2 = \pi R^2 a,$$

где δ_{n0} — символ Кронекера.

⊙ *Литература*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 136), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 129, 599).

8.3.3-11. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant a$. Третья краевая задача.

Рассматривается круговой цилиндр конечной длины. Заданы граничные условия:

$$\partial_r w + k_1 w = 0 \quad \text{при} \quad r=R, \qquad \partial_z w - k_2 w = 0 \quad \text{при} \quad z=0, \qquad \partial_z w + k_3 w = 0 \quad \text{при} \quad z=a.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{nml} = \nu_l^2 + \frac{\mu^2_{nm}}{R^2},$$

где ν_l и μ_{nm} — положительные корни трансцендентных уравнений

$$\operatorname{tg}(\nu a) = \frac{(k_2+k_3)\nu}{\nu^2 - k_2 k_3}, \qquad \mu J'_n(\mu) + Rk_1 J_n(\mu) = 0.$$

Собственные функции:

$$w^{(1)}_{nml} = J_n\Bigl(\mu_{nm}\frac{r}{R}\Bigr)\cos(n\varphi)\,\frac{\nu_l\cos\nu_l z + k_2\sin\nu_l z}{\sqrt{\nu_l^2+k_2^2}},$$
$$w^{(2)}_{nml} = J_n\Bigl(\mu_{nm}\frac{r}{R}\Bigr)\sin(n\varphi)\,\frac{\nu_l\cos\nu_l z + k_2\sin\nu_l z}{\sqrt{\nu_l^2+k_2^2}}.$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w^{(i)}_{nml}\|^2 = \frac{\pi R^2}{4\mu^2_{nm}}(1+\delta_{n0})(R^2k_1^2+\mu^2_{nm}-n^2)\bigl[J_n(\mu_{nm})\bigr]^2\Bigl[a + \frac{(k_2+k_3)(\nu_l^2+k_2k_3)}{(\nu_l^2+k_2^2)(\nu_l^2+k_3^2)}\Bigr],$$

где δ_{n0} — символ Кронекера.

8.3.3-12. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant z \leqslant a$. Первая краевая задача.

Рассматривается полый круговой цилиндр конечной длины. Заданы граничные условия:

$$w = 0 \quad \text{при} \quad r = R_1, \qquad w = 0 \quad \text{при} \quad r = R_2,$$
$$w = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad w = 0 \quad \text{при} \quad z = a.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{nmk} = \frac{\pi^2 k^2}{a^2} + \mu_{nm}^2; \qquad n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots; \quad m,\, k = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots$$

Здесь μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_n(\mu R_1) Y_n(\mu R_2) - J_n(\mu R_2) Y_n(\mu R_1) = 0.$$

Собственные функции:

$$w_{nmk}^{(1)} = [J_n(\mu_{nm} r) Y_n(\mu_{nm} R_1) - J_n(\mu_{nm} R_1) Y_n(\mu_{nm} r)] \cos(n\varphi) \sin\left(\frac{\pi k z}{a}\right),$$
$$w_{nmk}^{(2)} = [J_n(\mu_{nm} r) Y_n(\mu_{nm} R_1) - J_n(\mu_{nm} R_1) Y_n(\mu_{nm} r)] \sin(n\varphi) \sin\left(\frac{\pi k z}{a}\right).$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w_{nmk}^{(1)}\|^2 = \|w_{nmk}^{(2)}\|^2 = \frac{a}{\pi \mu_{nm}^2}(1 + \delta_{n0}) \frac{[J_n(\mu_{nm} R_1)]^2 - [J_n(\mu_{nm} R_2)]^2}{[J_n(\mu_{nm} R_2)]^2}, \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

⊙ *Литература*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 137), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 130, 604).

8.3.3-13. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant z \leqslant a$. Вторая краевая задача.

Рассматривается полый круговой цилиндр конечной длины. Заданы граничные условия:

$$\partial_r w = 0 \quad \text{при} \quad r = R_1, \qquad \partial_r w = 0 \quad \text{при} \quad r = R_2,$$
$$\partial_z w = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad \partial_z w = 0 \quad \text{при} \quad z = a.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{nmk} = \frac{\pi^2 k^2}{a^2} + \mu_{nm}^2; \qquad n,\, m,\, k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$$

Здесь μ_{nm} — корни трансцендентного уравнения

$$J_n'(\mu R_1) Y_n'(\mu R_2) - J_n'(\mu R_2) Y_n'(\mu R_1) = 0.$$

Собственные функции:

$$w_{nmk}^{(1)} = [J_n(\mu_{nm} r) Y_n'(\mu_{nm} R_1) - J_n'(\mu_{nm} R_1) Y_n(\mu_{nm} r)] \cos(n\varphi) \cos\left(\frac{\pi k z}{a}\right),$$
$$w_{nmk}^{(2)} = [J_n(\mu_{nm} r) Y_n'(\mu_{nm} R_1) - J_n'(\mu_{nm} R_1) Y_n(\mu_{nm} r)] \sin(n\varphi) \cos\left(\frac{\pi k z}{a}\right).$$

Нулевому собственному значению $\lambda_{000} = 0$ соответствует собственная функция $w_{000}^{(1)} = 1$.

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w_{nmk}^{(1)}\|^2 = \|w_{nmk}^{(2)}\|^2 = \frac{a(1 + \delta_{n0})(1 + \delta_{k0})}{\pi \mu_{nm}^2} \left\{ \left(1 - \frac{n^2}{R_2^2 \mu_{nm}^2}\right) \left[\frac{J_n'(\mu_{nm} R_1)}{J_n'(\mu_{nm} R_2)}\right]^2 - \left(1 - \frac{n^2}{R_1^2 \mu_{nm}^2}\right) \right\},$$

где δ_{n0} — символ Кронекера.

⊙ *Литература*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 137), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 130, 605).

8.3.3-14. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant z \leqslant a$. Смешанные краевые задачи.

1°. Рассматривается полый круговой цилиндр конечной длины. Заданы граничные условия:

$$w = 0 \quad \text{при} \quad r = R_1, \qquad w = 0 \quad \text{при} \quad r = R_2,$$
$$\partial_z w = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad \partial_z w = 0 \quad \text{при} \quad z = a.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{nmk} = \frac{\pi^2 k^2}{a^2} + \mu_{nm}^2; \qquad n,\, k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots; \quad m = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots$$

Здесь μ_{nm} — корни трансцендентного уравнения

$$J_n(\mu R_1) Y_n(\mu R_2) - J_n(\mu R_2) Y_n(\mu R_1) = 0.$$

Собственные функции:

$$w_{nmk}^{(1)} = \left[J_n(\mu_{nm} r) Y_n(\mu_{nm} R_1) - J_n(\mu_{nm} R_1) Y_n(\mu_{nm} r)\right] \cos(n\varphi) \cos\left(\frac{\pi k z}{a}\right),$$
$$w_{nmk}^{(2)} = \left[J_n(\mu_{nm} r) Y_n(\mu_{nm} R_1) - J_n(\mu_{nm} R_1) Y_n(\mu_{nm} r)\right] \sin(n\varphi) \cos\left(\frac{\pi k z}{a}\right).$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w_{nmk}^{(1)}\|^2 = \|w_{nmk}^{(2)}\|^2 = \frac{a\varepsilon_n \varepsilon_k}{\pi \mu_{nm}^2} \frac{\left[J_n(\mu_{nm} R_1)\right]^2 - \left[J_n(\mu_{nm} R_2)\right]^2}{\left[J_n(\mu_{nm} R_2)\right]^2}, \qquad \varepsilon_n = \begin{cases} 2 & \text{при } n = 0, \\ 1 & \text{при } n \neq 0. \end{cases}$$

2°. Рассматривается полый круговой цилиндр конечной длины. Заданы граничные условия:

$$\partial_r w = 0 \quad \text{при} \quad r = R_1, \qquad \partial_r w = 0 \quad \text{при} \quad r = R_2,$$
$$w = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad w = 0 \quad \text{при} \quad z = a.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{nmk} = \frac{\pi^2 k^2}{a^2} + \mu_{nm}^2; \qquad n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots; \quad m,\, k = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots$$

Здесь μ_{nm} — корни трансцендентного уравнения

$$J_n'(\mu R_1) Y_n'(\mu R_2) - J_n'(\mu R_2) Y_n'(\mu R_1) = 0.$$

Собственные функции:

$$w_{nmk}^{(1)} = \left[J_n(\mu_{nm} r) Y_n'(\mu_{nm} R_1) - J_n'(\mu_{nm} R_1) Y_n(\mu_{nm} r)\right] \cos(n\varphi) \sin\left(\frac{\pi k z}{a}\right),$$
$$w_{nmk}^{(2)} = \left[J_n(\mu_{nm} r) Y_n'(\mu_{nm} R_1) - J_n'(\mu_{nm} R_1) Y_n(\mu_{nm} r)\right] \sin(n\varphi) \sin\left(\frac{\pi k z}{a}\right).$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w_{nmk}^{(1)}\|^2 = \|w_{nmk}^{(2)}\|^2 = \frac{a\varepsilon_n}{\pi \mu_{nm}^2} \left\{\left(1 - \frac{n^2}{R_2^2 \mu_{nm}^2}\right) \left[\frac{J_n'(\mu_{nm} R_1)}{J_n'(\mu_{nm} R_2)}\right]^2 - \left(1 - \frac{n^2}{R_1^2 \mu_{nm}^2}\right)\right\},$$

где ε_n см. в п. 1°.

8.3.3-15. Область: $0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0,\ 0 \leqslant z \leqslant a$. Первая краевая задача.

Рассматривается цилиндрический сектор конечной толщины. Заданы граничные условия:

$$w = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = 0, \qquad w = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = \varphi_0, \qquad w = 0 \quad \text{при} \quad r = R,$$
$$w = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad w = 0 \quad \text{при} \quad z = a.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{nmk} = \frac{\pi^2 k^2}{a^2} + \frac{\mu_{nm}^2}{R^2}; \qquad n,\, m,\, k = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots$$

Здесь μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_{n\pi/\varphi_0}(\mu) = 0$.

Собственные функции:

$$w_{nmk} = J_{n\pi/\varphi_0}\left(\frac{\mu_{nm} r}{R}\right) \sin\left(\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\right) \sin\left(\frac{k\pi z}{a}\right).$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w_{nmk}\|^2 = \tfrac{1}{8} a R^2 \varphi_0 \left[J_{n\pi/\varphi_0}'(\mu_{nm})\right]^2.$$

8.3.3-16. Область: $0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0,\ 0 \leqslant z \leqslant a$. Смешанная краевая задача.

Рассматривается цилиндрический сектор конечной толщины. Заданы граничные условия:

$$w = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = 0, \qquad w = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = \varphi_0, \qquad w = 0 \quad \text{при} \quad r = R,$$
$$\partial_z w = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad \partial_z w = 0 \quad \text{при} \quad z = a.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{nmk} = \frac{\pi^2 k^2}{a^2} + \frac{\mu_{nm}^2}{R^2}; \qquad n,\ m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\,; \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Здесь μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_{n\pi/\varphi_0}(\mu) = 0$.

Собственные функции:

$$w_{nmk} = J_{n\pi/\varphi_0}\Bigl(\frac{\mu_{nm} r}{R}\Bigr) \sin\Bigl(\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\Bigr) \cos\Bigl(\frac{k\pi z}{a}\Bigr).$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w_{nmk}\|^2 = \tfrac{1}{8} a R^2 \varphi_0 (1 + \delta_{k0}) \bigl[J'_{n\pi/\varphi_0}(\mu_{nm})\bigr]^2, \qquad \delta_{k0} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 0, \\ 0 & \text{при } k \neq 0. \end{cases}$$

8.3.4. Задачи в сферической системе координат

Трехмерное однородное уравнение Гельмгольца в сферической системе координат имеет вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Bigl(r^2 \frac{\partial w}{\partial r}\Bigr) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\Bigl(\sin\theta \frac{\partial w}{\partial \theta}\Bigr) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \lambda w = 0, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

8.3.4-1. Частные решения:

$$\begin{aligned}
w &= \frac{1}{r}(A \sin \mu r + B \cos \mu r), && \lambda = \mu^2, \\
w &= \frac{1}{r}(A \operatorname{sh} \mu r + B \operatorname{ch} \mu r), && \lambda = -\mu^2, \\
w &= \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+1/2}(\mu r) P_n^m(\cos\theta)(A \cos m\varphi + B \sin m\varphi), && \lambda = \mu^2, \\
w &= \frac{1}{\sqrt{r}} Y_{n+1/2}(\mu r) P_n^m(\cos\theta)(A \cos m\varphi + B \sin m\varphi), && \lambda = \mu^2, \\
w &= \frac{1}{\sqrt{r}} I_{n+1/2}(\mu r) P_n^m(\cos\theta)(A \cos m\varphi + B \sin m\varphi), && \lambda = -\mu^2, \\
w &= \frac{1}{\sqrt{r}} K_{n+1/2}(\mu r) P_n^m(\cos\theta)(A \cos m\varphi + B \sin m\varphi), && \lambda = -\mu^2,
\end{aligned}$$

где $n,\ m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$; A и B — произвольные постоянные; $J_\nu(\xi)$ и $Y_\nu(\xi)$ — функции Бесселя; $I_\nu(\xi)$ и $K_\nu(\xi)$ — модифицированные функции Бесселя; $P_n^m(\xi)$ — присоединенные функции Лежандра, которые выражаются через полиномы Лежандра $P_n(\xi)$ по формулам

$$P_n^m(\xi) = (1 - \xi^2)^{m/2} \frac{d^m}{d\xi^m} P_n(\xi), \qquad P_n(\xi) = \frac{1}{n!\, 2^n} \frac{d^n}{d\xi^n} (\xi^2 - 1)^n.$$

8.3.4-2. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Первая краевая задача.

1°. Рассматривается сферическая область. Задано однородное граничное условие:

$$w = 0 \quad \text{при} \quad r = R.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{nk} = \frac{\mu_{nk}^2}{R^2}; \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\,; \quad k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Здесь μ_{nk} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_{n+1/2}(\mu) = 0$. Отметим, что $J_{n+1/2}(\mu)$ выражаются через элементарные функции, см. Г. Бейтмен, А. Эрдейи (1974, т. 2, стр. 89).

Собственные функции:

$$w_{nmk}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+1/2}\Bigl(\mu_{nk}\frac{r}{R}\Bigr) P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi, \qquad m = 0,\ 1,\ 2,\ \dots;$$

$$w_{nmk}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+1/2}\Bigl(\mu_{nk}\frac{r}{R}\Bigr) P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi, \qquad m = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$$

Здесь $P_n^m(\xi)$ — присоединенные функции Лежандра.

Собственные функции, обладающие центральной симметрией (которые не зависят от θ и φ):

$$w_{00k}^{(1)} = J_{1/2}\Bigl(\mu_{0k}\frac{r}{R}\Bigr).$$

Собственные функции, обладающие осевой симметрией (которые не зависят от φ):

$$w_{n0k}^{(1)} = J_{n+1/2}\Bigl(\mu_{nk}\frac{r}{R}\Bigr) P_n(\cos\theta).$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w_{nmk}^{(1)}\|^2 = \frac{\pi R^2(1+\delta_{m0})(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}\bigl[J'_{n+1/2}(\mu_{nk})\bigr]^2, \qquad \delta_{m0} = \begin{cases} 1 & \text{при } m = 0, \\ 0 & \text{при } m \neq 0, \end{cases}$$

$$\|w_{nmk}^{(1)}\|^2 = \|w_{nmk}^{(2)}\|^2, \qquad m = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$$

2°. Рассматривается сферическая область. Задано граничное условие:

$$w = f(\theta,\varphi) \quad \text{при} \quad r = R.$$

Решение:

$$w(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} f_{nm}\frac{\Psi_n(r\sqrt{\lambda})}{\Psi_n(R\sqrt{\lambda})} Y_n^m(\theta,\varphi), \qquad \Psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} J_{n+1/2}(x),$$

где

$$f_{nm} = \frac{1}{\|Y_n^m\|}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} f(\theta,\varphi) Y_n^m(\theta,\varphi)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi, \qquad \|Y_n^m\| = \frac{2\pi\varepsilon_m}{2n+1}\,\frac{(n+m)!}{(n-m)!},$$

$$Y_n^m(\theta,\varphi) = \begin{cases} P_n(\cos\theta) & \text{при } m = 0, \\ P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi & \text{при } m = 1,\ 2,\ \dots, \\ P_n^{|m|}(\cos\theta)\cos m\varphi & \text{при } m = -1,\ -2,\ \dots, \end{cases} \qquad \varepsilon_m = \begin{cases} 2 & \text{при } m = 0, \\ 1 & \text{при } m \neq 0. \end{cases}$$

При записи решения считалось, что $J_{n+1/2}(R\sqrt{\lambda}) \neq 0$ при $n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$

⦿ *Литература*: А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972, стр. 698–703), М. М. Смирнов (1975, стр. 47, 125–126).

▶ *В разд. 8.3.4-3 — 8.3.4-6 приводятся только собственные значения и собственные функции однородных краевых задач для однородного уравнения Гельмгольца при $\Phi \equiv 0$. Решения соответствующих неоднородных краевых задач строятся по формулам, указанным в разд. 8.3.1-4.*

8.3.4-3. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Вторая краевая задача.

Рассматривается сферическая область. Задано граничное условие:

$$\partial_r w = 0 \quad \text{при} \quad r = R.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{00} = 0, \quad \lambda_{nk} = \frac{\mu_{nk}^2}{R^2}; \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots; \quad k = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$$

Здесь μ_{nk} — корни трансцендентного уравнения

$$2\mu J'_{n+1/2}(\mu) - J_{n+1/2}(\mu) = 0.$$

Собственные функции:

$$w_{000}^{(1)} = 1, \quad w_{nmk}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+1/2}\Bigl(\mu_{nk}\frac{r}{R}\Bigr) P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi, \qquad m = 0,\ 1,\ 2,\ \dots;$$

$$w_{nmk}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+1/2}\Bigl(\mu_{nk}\frac{r}{R}\Bigr) P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi, \qquad m = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w_{000}^{(1)}\|^2 = \tfrac{4}{3}\pi R^3, \quad \|w_{nmk}^{(1)}\|^2 = \frac{\pi R^2 \varepsilon_m (n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}\left[1 - \frac{n(n+1)}{\mu_{nk}^2}\right] J_{n+1/2}^2(\mu_{nk}),$$
$$\|w_{nmk}^{(1)}\|^2 = \|w_{nmk}^{(2)}\|^2, \qquad m = 1,\,2,\,3,\,\dots,$$

где $\varepsilon_m = \begin{cases} 2 & \text{при } m=0, \\ 1 & \text{при } m \neq 0. \end{cases}$

⊙ *Литература*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 140).

8.3.4-4. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$. Третья краевая задача.

Рассматривается сферическая область. Задано граничное условие:

$$\partial_r w + s w = 0 \quad \text{при} \quad r = R.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{nk} = \frac{\mu_{nk}^2}{R^2}; \qquad n = 0,\,1,\,2,\,\dots; \quad k = 1,\,2,\,3,\,\dots$$

Здесь μ_{nk} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$2\mu J'_{n+1/2}(\mu) - (1 - 2Rs) J_{n+1/2}(\mu) = 0.$$

Собственные функции:

$$w_{nmk}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+1/2}\Bigl(\mu_{nk}\frac{r}{R}\Bigr) P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi, \qquad m = 0,\,1,\,2,\,\dots;$$
$$w_{nmk}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+1/2}\Bigl(\mu_{nk}\frac{r}{R}\Bigr) P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi, \qquad m = 1,\,2,\,3,\,\dots$$

Здесь $P_n^m(\xi)$ — присоединенные функции Лежандра.

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w_{nmk}^{(1)}\|^2 = \frac{\pi R^2 \varepsilon_m (n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}\left[1 + \frac{(Rs+n)(Rs-n-1)}{\mu_{nk}^2}\right] J_{n+1/2}^2(\mu_{nk}), \quad \varepsilon_m = \begin{cases} 2 & \text{при } m=0, \\ 1 & \text{при } m\neq 0, \end{cases}$$
$$\|w_{nmk}^{(1)}\|^2 = \|w_{nmk}^{(2)}\|^2, \qquad m = 1,\,2,\,3,\,\dots$$

⊙ *Литература*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964, стр. 140).

8.3.4-5. Область: $R \leqslant r < \infty$. Первая краевая задача.

На границе сферической полости задана искомая величина:

$$w = f(\theta,\varphi) \quad \text{при} \quad r = R,$$

а на бесконечности заданы условия излучения (см. разд. 8.3.1-5, п. 2°).

Решение при $\lambda = k^2 > 0$:

$$w(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} f_{nm}\frac{\Xi_n(kr)}{\Xi_n(kR)} Y_n^m(\theta,\varphi), \qquad \Xi_n(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} H_{n+1/2}^{(2)}(\rho),$$

где $H_{n+1/2}^{(2)}(\rho)$ — функция Ханкеля второго рода, а остальные величины введены также, как и в разд. 8.3.4-2, п. 2°.

⊙ *Литература*: А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972, стр. 698–703).

8.3.4-6. Область: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. Первая краевая задача.

Рассматривается сферический слой. Заданы граничные условия

$$w = 0 \quad \text{при} \quad r = R_1, \qquad w = 0 \quad \text{при} \quad r = R_2.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{nk} = \mu_{nk}^2; \qquad n = 0,\,1,\,2,\,\dots; \quad k = 1,\,2,\,3,\,\dots$$

Здесь μ_{nk} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_{n+1/2}(\mu R_1)Y_{n+1/2}(\mu R_2) - J_{n+1/2}(\mu R_2)Y_{n+1/2}(\mu R_1) = 0.$$

Собственные функции:

$$w^{(1)}_{nmk} = \frac{1}{\sqrt{r}} Z_{n+1/2}(\mu_{nk}r)P^m_n(\cos\theta)\cos m\varphi, \qquad m = 0,\ 1,\ 2,\ \dots;$$

$$w^{(2)}_{nmk} = \frac{1}{\sqrt{r}} Z_{n+1/2}(\mu_{nk}r)P^m_n(\cos\theta)\sin m\varphi, \qquad m = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$$

Здесь $P^m_n(\xi)$ — присоединенные функции Лежандра,

$$Z_{n+1/2}(\mu r) = J_{n+1/2}(\mu R_1)Y_{n+1/2}(\mu r) - Y_{n+1/2}(\mu R_1)J_{n+1/2}(\mu r).$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w^{(1)}_{nmk}\|^2 = \frac{4\varepsilon_m(n+m)!}{\pi(2n+1)(n-m)!}\,\frac{J^2_{n+1/2}(\mu_{nk}R_1) - J^2_{n+1/2}(\mu_{nk}R_2)}{\mu^2_{nk}J^2_{n+1/2}(\mu_{nk}R_2)}, \qquad \varepsilon_m = \begin{cases} 2 & \text{при } m = 0, \\ 1 & \text{при } m \neq 0, \end{cases}$$

$$\|w^{(1)}_{nmk}\|^2 = \|w^{(2)}_{nmk}\|^2, \qquad m = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$$

8.3.5. Другие ортогональные криволинейные системы координат

Трехмерное уравнение Гельмгольца допускает разделение переменных в одиннадцати ортогональных системах координат, перечисленных в табл. 29.

Для системы координат параболического цилиндра множители f и g выражаются через функции параболического цилиндра

$$f(\xi) = A_1 D_{\mu-1/2}(\sigma\xi) + A_2 D_{\mu-1/2}(-\sigma\xi), \quad g(\eta) = B_1 D_{-\mu-1/2}(\sigma\eta) + B_2 D_{-\mu-1/2}(-\sigma\eta),$$

$$\mu = \tfrac{1}{2}\beta(k^2-\lambda)^{-1/2}, \quad \sigma = \left[4(k^2-\lambda)\right]^{1/4},$$

где A_1, B_1, A_2, B_2 — произвольные постоянные.

Для системы координат эллиптического цилиндра функции f и g описываются модифицированным уравнением Матье и уравнением Матье. Их решения можно записать в виде

$$f(u) = \begin{cases} \mathrm{Ce}_n(u,q), \\ \mathrm{Se}_n(u,q), \end{cases} \quad g(v) = \begin{cases} \mathrm{ce}_n(v,q), \\ \mathrm{se}_n(v,q), \end{cases} \qquad q = \tfrac{1}{4}a^2(\lambda - k^2),$$

где $\mathrm{Ce}_n(u,q)$ и $\mathrm{Se}_n(u,q)$ — модифицированные функции Матье, а $\mathrm{ce}_n(v,q)$ и $\mathrm{se}_n(v,q)$ — функции Матье [каждому значению параметра q соответствуют определенные собственные значения $\beta = \beta_n(q)$, см. М. Абрамовиц, И. Стиган (1979, стр. 532–558)].

В системах координат вытянутого и сплюснутого эллипсоида уравнения для функций f и g являются различными формами уравнения сфероидальной волны, ограниченные решения которого даются формулами

$$f(u) = \mathrm{Ps}^{|k|}_n(\operatorname{ch} u, a^2\lambda), \qquad g(u) = \mathrm{Ps}^{|k|}_n(\cos v, a^2\lambda) \qquad \text{для вытянутого эллипсоида},$$

$$f(u) = \mathrm{Ps}^{|k|}_n(-i\operatorname{sh} u, a^2\lambda), \quad g(u) = \mathrm{Ps}^{|k|}_n(\cos v, -a^2\lambda) \qquad \text{для сплюснутого эллипсоида},$$

$$k \text{ — целое число}, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots, \quad -n \leqslant k \leqslant n,$$

где $\mathrm{Ps}^k_n(z,a)$ — сфероидальные волновые функции [см. Г. Бейтмен, А. Эрдейи (1967, т. 3, стр. 169–189), F. Arscott (1964), J. Meixner, F. Schäfke (1965)]. О разделении переменных уравнения Гельмгольца в модифицированных системах координат вытянутого и сплюснутого эллипсоида и сфероидальных волновых функциях см. М. Абрамовиц, И. Стиган (1979, стр. 559–577).

В случае параболической системы координат решения уравнений для f и g выражаются через вырожденные гипергеометрические функции [У. Миллер (1981, стр. 214)]:

$$f(\xi) = \xi^k \exp\bigl(\pm\tfrac{1}{2}\omega\xi^2\bigr)\Phi\Bigl(-\frac{\beta}{4\omega} + \frac{k+1}{2},\ k+1;\ \mp\omega\xi^2\Bigr), \quad \omega = \sqrt{-\lambda},$$

$$g(\eta) = \eta^k \exp\bigl(\pm\tfrac{1}{2}\omega\eta^2\bigr)\Phi\Bigl(\frac{\beta}{4\omega} + \frac{k+1}{2},\ k+1;\ \mp\omega\eta^2\Bigr).$$

В случае параболоидальной системы координат уравнения для f, g, h сводятся к уравнению Уиттекера — Хилла:

$$G''_{\theta\theta} + \bigl(\mu + \tfrac{1}{8}b^2 + bc\cos 2\theta - \tfrac{1}{8}b^2\cos 4\theta\bigr)G = 0.$$

ТАБЛИЦА 29

Ортогональные координаты, допускающие решения с разделенными переменными вида $w = f(\bar{x})g(\bar{y})h(\bar{z})$ для трехмерного уравнения Гельмгольца $\Delta_3 w + \lambda w = 0$.

Координаты	Преобразования	Частные решения (уравнения для f, g, h)
Декартовы x, y, z	$x = x$, $y = y$, $z = z$	$w = \cos(k_1 x + s_1)\cos(k_2 y + s_2)\cos(k_3 z + s_3)$, где $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \lambda$; см. также разд. 8.3.2-1
Цилиндрические r, φ, z	$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$	$w = [AJ_n(\beta r) + BY_n(\beta r)]\cos(n\varphi + c)\cos(kz + s)$, где $k^2 + \beta^2 = \lambda$, см. также разд. 8.3.3-1 (J_n и Y_n — функции Бесселя)
Параболического цилиндра ξ, η, z	$x = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2)$, $y = \xi\eta$, $z = z$	$w = f(\xi)g(\eta)\cos(kz + s)$, $f'' + [(\lambda - k^2)\xi^2 + \beta]f = 0$, $g'' + [(\lambda - k^2)\eta^2 - \beta]g = 0$
Эллиптического цилиндра u, v, z	$x = a\operatorname{ch} u\cos v$, $y = a\operatorname{sh} u\sin v$, $z = z$	$w = f(u)g(v)\cos(kz + s)$, $f'' + [\frac{1}{2}a^2(\lambda - k^2)\operatorname{ch} 2u - \beta]f = 0$, $g'' - [\frac{1}{2}a^2(\lambda - k^2)\cos 2v - \beta]g = 0$
Сферические r, θ, φ	$x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$	$w = r^{-1/2}J_{n+1/2}(\beta r)P_n^m(\cos\theta)\cos(m\varphi + s)$, $w = r^{-1/2}Y_{n+1/2}(\beta r)P_n^m(\cos\theta)\cos(m\varphi + s)$, где $\lambda = \beta^2$; см. также разд. 8.3.4-1
Вытянутого эллипсоида u, v, φ	$x = a\operatorname{sh} u\sin v\cos\varphi$, $y = a\operatorname{sh} u\sin v\sin\varphi$, $z = a\operatorname{ch} u\cos v$	$w = f(u)g(v)\cos(k\varphi + s)$, $f'' + f'\operatorname{cth} u + (-\beta + a^2\lambda\operatorname{sh}^2 u - k^2/\operatorname{sh}^2 u)f = 0$, $g'' + g'\operatorname{ctg} v + (\beta + a^2\lambda\sin^2 v - k^2/\sin^2 v)g = 0$
Сплюснутого эллипсоида u, v, φ	$x = a\operatorname{ch} u\sin v\cos\varphi$, $y = a\operatorname{ch} u\sin v\sin\varphi$, $z = a\operatorname{sh} u\cos v$	$w = f(u)g(v)\cos(k\varphi + s)$, $f'' + f'\operatorname{th} u + (-\beta + a^2\lambda\operatorname{ch}^2 u + k^2/\operatorname{ch}^2 u)f = 0$, $g'' + g'\operatorname{ctg} v + (\beta - a^2\lambda\sin^2 v - k^2/\sin^2 v)g = 0$
Параболические ξ, η, φ	$x = \xi\eta\cos\varphi$, $y = \xi\eta\sin\varphi$, $z = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2)$	$w = f(\xi)g(\eta)\cos(k\varphi + s)$, $\xi^2 f'' + \xi f' + (\lambda\xi^4 - \beta\xi^2 - k^2)f = 0$, $\eta^2 g'' + \eta g' + (\lambda\eta^4 + \beta\eta^2 - k^2)g = 0$
Параболоидальные u, v, φ	$x = 2a\operatorname{ch} u\cos v\operatorname{sh}\varphi$, $y = 2a\operatorname{sh} u\sin v\operatorname{ch}\varphi$, $z = \frac{1}{2}a(\operatorname{ch} 2u + \cos 2v - \operatorname{ch} 2\varphi)$	$f'' + (-k - a\beta\operatorname{ch} 2u + \frac{1}{2}a^2\lambda\operatorname{ch} 4u)f = 0$, $g'' + (k + a\beta\cos 2v - \frac{1}{2}a^2\lambda\cos 4v)g = 0$, $h'' + (-k + a\beta\operatorname{ch} 2\varphi - \frac{1}{2}a^2\lambda\operatorname{ch} 4\varphi)h = 0$
Общие эллипсоидальные μ, ν, ρ	$x = \sqrt{\frac{(\mu-a)(\nu-a)(\rho-a)}{a(a-1)}}$, $y = \sqrt{\frac{(\mu-1)(\nu-1)(\rho-1)}{1-a}}$, $z = \sqrt{\frac{\mu\nu\rho}{a}}$	$4\sqrt{\varphi(\mu)}[\sqrt{\varphi(\mu)}\,f']' + (\lambda\mu^2 + \beta_1\mu + \beta_2)f = 0$, $4\sqrt{\varphi(\nu)}[\sqrt{\varphi(\nu)}\,g']' + (\lambda\nu^2 + \beta_1\nu + \beta_2)g = 0$, $4\sqrt{\varphi(\rho)}[\sqrt{\varphi(\rho)}\,h']' + (\lambda\rho^2 + \beta_1\rho + \beta_2)h = 0$, $\varphi(t) = t(t-1)(t-a)$
Конические ρ, μ, ν	$x = \rho\sqrt{\frac{(a\mu-1)(a\nu-1)}{1-a}}$, $y = \rho\sqrt{\frac{a(\mu-1)(\nu-1)}{a-1}}$, $z = \rho\sqrt{a\mu\nu}$	$w = \rho^{-1/2}J_{\pm(n+1/2)}(\rho\sqrt{\lambda})g(\xi)h(\eta)$, $g'' + [\beta - n(n+1)k^2\operatorname{sn}^2\xi]g = 0$, $h'' + [\beta - n(n+1)k^2\operatorname{sn}^2\eta]h = 0$, где $\mu = \operatorname{sn}^2(\xi, k)$, $\nu = \operatorname{sn}^2(\eta, k)$, $k = \sqrt{a}$

Обозначим через $\mathrm{gc}_n(\theta; b, c)$ и $\mathrm{gs}_n(\theta; b, c)$ соответственно четные и нечетные периодические решения (с периодом 2π) уравнения Уиттекера — Хилла, которое является обобщением уравнения Матье. Индекс $n = 0, 1, 2, \ldots$ отмечает дискретные собственные значения $\mu = \mu_n$. Каждое из решений gc_n и gs_n можно представить в виде сходящегося бесконечного тригонометрического ряда по $\cos n\theta$ и $\sin n\theta$ соответственно [см. K. Urvin, F. Arscott (1970)]. Однозначные решения для функций f, g, h можно записать в виде [У. Миллер (1981, стр. 215)]:

$$f(u)=\begin{cases}\mathrm{gc}_n(iu;2a\omega,\beta/2\omega),\\ \mathrm{gs}_n(iu;2a\omega,\beta/2\omega),\end{cases} \quad g(v)=\begin{cases}\mathrm{gc}_n(v;2a\omega,\beta/2\omega),\\ \mathrm{gs}_n(v;2a\omega,\beta/2\omega),\end{cases} \quad h(\varphi)=\begin{cases}\mathrm{gc}_n(i\varphi+\pi/2;2a\omega,\beta/2\omega),\\ \mathrm{gs}_n(i\varphi+\pi/2;2a\omega,\beta/2\omega),\end{cases}$$

где $\omega=\sqrt{\lambda}$, $k=\mu_n-\frac{1}{2}a^2\lambda$.

Для общих эллипсоидальных координат функции f, g, h выражаются через функции эллипсоидальной волны [подробности см. в F. Arscott (1964), У. Миллер (1981, стр. 215–216)].

Для конической системы координат функции g и h описываются уравнениями Ламе, в которые входит эллиптическая функция Якоби $\operatorname{sn} z=\operatorname{sn}(z,k)$. Условия однозначности преобразования дают значения $n=0,\,1,\,2,\,\dots$ Известно, что для любого положительного целого числа n существует точно $2n+1$ решений, соответствующих $2n+1$ различным собственным значениям β. Эти решения можно представить в виде конечных рядов, называемых многочленами Ламе. Подробнее об уравнении Ламе и его решениях см. Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон (1963, стр. 463–478), F. Arscott (1964), Г. Бейтмен, А. Эрдейи (1967, т. 3, стр. 103–135), У. Миллер (1981, стр. 216–217).

В отличие от уравнения Лапласа для трехмерного уравнения Гельмгольца не существует нетривиальных преобразований, допускающих $\mathcal{R}$-разделение переменных.

⊙ *Литература к разделу 8.3.5*: Ф. М. Морс, Г. Фешбах (1958, 1960), P. Moon, D. Spencer (1961), A. Makarov, J. Smorodinsky, K. Valiev, P. Winternitz (1967), У. Миллер (1981).

8.4. Другие уравнения с тремя пространственными переменными

8.4.1. Уравнения, содержащие произвольные функции

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\Big(\lambda+\dfrac{a}{r}\Big)w=0, \qquad r^2=x^2+y^2+z^2.$

Уравнение Шредингера. Описывает движение электрона в кулоновском поле ядра ($a>0$).

Ищутся решения, удовлетворяющие условию нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|w(x,y,z)|^2\,dx\,dy\,dz=1.$$

Собственные значения:

$$\lambda_n=-\frac{a^2}{4n^2};\qquad n=1,\,2,\,3,\,\dots$$

Нормированные собственные функции (в сферической системе координат r, θ, φ):

$$w_{nmk}=\Big(\frac{2}{n}\Big)^{3/2}\sqrt{\frac{(2k+1)(k-m)!\,(n-k-1)!}{4\pi\varepsilon_m n(n+k)!\,(m+k)!}}\,\Big(\frac{ar}{n}\Big)^k\exp\Big(-\frac{ar}{2n}\Big)L_{n-k-1}^{2k+1}\Big(\frac{ar}{n}\Big)Y_k^{(m)}(\theta,\varphi),$$
$$n=1,\,2,\,3,\,\dots;\quad m=0,\,\pm1,\,\pm2,\,\dots,\,\pm k;\quad k=0,\,1,\,2\,\dots,\,n-1;$$

где

$$\varepsilon_m=\begin{cases}2 & \text{при } m=0,\\ 1 & \text{при } m\neq 0,\end{cases}\qquad Y_k^{(m)}(\theta,\varphi)=\begin{cases}P_k(\cos\theta) & \text{при } m=0,\\ P_k^m(\cos\theta)\sin m\varphi & \text{при } m=1,\,2,\,\dots,\\ P_k^{|m|}(\cos\theta)\cos m\varphi & \text{при } m=-1,\,-2,\,\dots,\end{cases}$$

$$L_k^s(x)=\frac{1}{k!}x^{-s}e^x\frac{d^k}{dx^k}\big(x^{k+s}e^{-x}\big),\quad P_k^m(x)=(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_k(x),\quad P_k(x)=\frac{1}{k!\,2^k}\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k.$$

В эти формулы входят обобщенные полиномы Лаггера $L_k^s(x)$ и присоединенные функции Лежандра $P_n^m(\xi)$ [$P_n(\xi)$ — полиномы Лежандра].

⊙ *Литература*: Г. Корн, Т. Корн (1968, стр. 310), А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972, стр. 714–718).

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}=ay\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Это уравнение встречается в задачах конвективного тепло- и массопереноса в простом сдвиговом потоке.

Фундаментальное решение:

$$\mathscr{E}(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{(4\pi)^{3/2}}\int_0^{\infty}\exp\bigg\{-\frac{[x-\xi-\frac{1}{2}at(y+\eta)]^2}{4t(1+\frac{1}{12}a^2t^2)}-\frac{(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4t}\bigg\}\frac{dt}{\sqrt{t^3(1+\frac{1}{12}a^2t^2)}}.$$

⊙ *Литература*: Е. А. Новиков (1958), D. E. Elrick (1962).

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}+a_1 x\dfrac{\partial w}{\partial x}+a_2 y\dfrac{\partial w}{\partial x}+a_3 z\dfrac{\partial w}{\partial z}=0.$

Это уравнение встречается в задачах конвективного массо- и теплопереноса в деформационном сдвиговом потоке.

Фундаментальное решение:

$$\mathscr{E}(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)=\int_0^\infty F(x,\xi,t;a_1)F(y,\eta,t;a_2)F(z,\zeta,t;a_3)\,dt,$$
$$F(x,\xi,t;a)=\Bigl[\frac{2\pi}{a}\bigl(e^{2at}-1\bigr)\Bigr]^{-1/2}\exp\Bigl[-\frac{a\bigl(xe^{at}-\xi\bigr)^2}{2\bigl(e^{2at}-1\bigr)}\Bigr].$$

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_3^2}=\displaystyle\sum_{n,k=1}^{3}a_{nk}x_n\dfrac{\partial w}{\partial x_k}.$

Это уравнение встречается в задачах конвективного тепло- и массопереноса в произвольном линейном сдвиговом потоке.

Решение, описывающее источник единичной мощности в начале координат:

$$w(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{(4\pi)^{3/2}}\int_0^\infty \exp\Bigl[-\sum_{n,k=1}^{3}\frac{b_{nk}(t)x_n x_k}{4D(t)}\Bigr]\frac{dt}{\sqrt{D(t)}}.$$

Здесь $D=D(t)$ — определитель матрицы $\mathbf{B}=\{B_{nk}\}$; $b_{nk}=b_{nk}(t)$ — алгебраические дополнения матричных элементов $B_{nk}=B_{nk}(t)$, которые определяются путем решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dB_{nk}}{dt}=\delta_{nk}+\sum_{m=1}^{3}a_{nm}B_{km}+\sum_{m=1}^{3}a_{km}B_{nm},$$
$$B_{nk}\to\delta_{nk}t\quad\text{при}\quad t\to 0\quad\text{(начальные условия)},$$

где $\delta_{nn}=1$, $\delta_{nk}=0$ при $n\neq k$.

⊙ *Литература*: G. K. Batchelor (1979).

5. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl[f_1(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr]+\dfrac{\partial}{\partial y}\Bigl[f_2(y)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Bigr]+\dfrac{\partial}{\partial z}\Bigl[f_3(z)\dfrac{\partial w}{\partial z}\Bigr]=\beta w.$

Трехмерное линейное уравнение теории тепло- и массопереноса с источником в неоднородной анизотропной среде. Здесь $f_1=f_1(x)$, $f_2=f_2(y)$, $f_3=f_3(z)$ — главные коэффициенты температуропроводности.

1°. Уравнение допускает разделение переменных — существуют решения в виде произведения функций различных аргументов $w(x,y,z)=\varphi_1(x)\varphi_2(y)\varphi_3(z)$.

2°. Существуют решения в виде суммы функций различных аргументов $w(x,y,z)=\psi_1(x)+\psi_2(y)+\psi_3(z)$.

3°. При $f_1=ax^n$, $f_2=by^m$, $f_3=cz^k$ $(n\neq 2,\ m\neq 2,\ k\neq 2)$ существуют частные решения вида

$$w=w(\xi),\qquad \xi^2=4\Bigl[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2}+\frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2}+\frac{z^{2-k}}{c(2-k)^2}\Bigr],$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2w}{d\xi^2}+\frac{A}{\xi}\frac{dw}{d\xi}=\beta w,\qquad A=2\Bigl(\frac{1}{2-n}+\frac{1}{2-m}+\frac{1}{2-k}\Bigr)-1,$$

решения которого выражаются через функции Бесселя.

8.4.2. Уравнения вида $\operatorname{div}[a(x,y,z)\nabla w]-q(x,y,z)w=-\Phi(x,y,z)$

Уравнения этого вида часто встречаются в теории тепло- и массопереноса. При записи уравнения использовано краткое обозначение:

$$\operatorname{div}\bigl[a(\mathbf{r})\nabla w\bigr]=\frac{\partial}{\partial x}\Bigl[a(\mathbf{r})\frac{\partial w}{\partial x}\Bigr]+\frac{\partial}{\partial y}\Bigl[a(\mathbf{r})\frac{\partial w}{\partial y}\Bigr]+\frac{\partial}{\partial z}\Bigl[a(\mathbf{r})\frac{\partial w}{\partial z}\Bigr],\qquad \mathbf{r}=\{x,y,z\}.$$

Задачи для данного уравнения будем рассматривать в ограниченной области V с достаточно гладкой поверхностью S. Далее считается, что $a(\mathbf{r})>0$, $q(\mathbf{r})\geqslant 0$.

8.4.2-1. Первая краевая задача.

Рассматривается уравнение с граничным условием первого рода:

$$w = f(\mathbf{r}) \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \in S.$$

Решение:

$$w(\mathbf{r}) = \int_V \Phi(\boldsymbol{\rho}) G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})\, dV_\rho - \int_S f(\boldsymbol{\rho}) a(\boldsymbol{\rho}) \frac{\partial}{\partial N_\rho} G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})\, dS_\rho. \tag{1}$$

Здесь функция Грина определяется по формуле

$$G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(\mathbf{r}) u_n(\boldsymbol{\rho})}{\|u_n\|^2 \lambda_n}, \qquad \|u_n\|^2 = \int_V u_n^2(\mathbf{r})\, dV, \quad \boldsymbol{\rho} = \{\xi, \eta, \zeta\}, \tag{2}$$

где λ_n и $u_n(\mathbf{r})$ — собственные значения и собственные функции задачи Штурма — Лиувилля для эллиптического уравнения второго порядка с однородным граничным условием первого рода:

$$\operatorname{div}\bigl[a(\mathbf{r})\nabla u\bigr] - q(\mathbf{r})u + \lambda u = 0, \tag{3}$$

$$u = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \in S. \tag{4}$$

Интегрирование в решении (1) ведется по переменным ξ, η, ζ; $\frac{\partial}{\partial N_\rho}$ — производная по внешней нормали к поверхности S относительно этих же переменных.

Общие свойства задачи Штурма — Лиувилля (3)–(4):

1°. Существует счетное множество собственных значений. Все собственные значения вещественны и могут быть упорядочены $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \cdots$, причем $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$ (поэтому может быть лишь конечное число отрицательных собственных значений).

2°. При $a(\mathbf{r}) > 0$, $q(\mathbf{r}) \geqslant 0$ все собственные значения положительны: $\lambda_n > 0$.

3°. Собственные функции определяются с точностью до постоянного множителя. Собственные функции $u_n(\mathbf{r})$ и $u_m(\mathbf{r})$, отвечающие различным собственным значениям λ_n и λ_m, ортогональны между собой в области V:

$$\int_V u_n(\mathbf{r}) u_m(\mathbf{r})\, dV = 0 \quad \text{при} \quad n \neq m.$$

4°. Произвольная функция $F(\mathbf{r})$, дважды непрерывно дифференцируемая и удовлетворяющая граничному условию задачи Штурма — Лиувилля ($F = 0$ для $\mathbf{r} \in S$), разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям:

$$F(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n u_n(\mathbf{r}), \quad F_n = \frac{1}{\|u_n\|^2} \int_V F(\mathbf{r}) u_n(\mathbf{r})\, dV,$$

где формула для $\|u_n\|^2$ приведена в (2).

Замечание. В трехмерной задаче каждому собственному значению λ_n вообще говоря соответствует конечное число линейно независимых собственных функций $u_n^{(1)}, u_n^{(2)}, \ldots, u_n^{(m)}$. Эти функции всегда можно заменить такими их линейными комбинациями

$$\bar{u}_n^{(k)} = A_{k,1} u_n^{(1)} + \cdots + A_{k,k-1} u_n^{(k-1)} + u_n^{(k)}, \qquad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, m,$$

что $\bar{u}_n^{(1)}, \bar{u}_n^{(2)}, \ldots, \bar{u}_n^{(m)}$ будут уже попарно ортогональны. Поэтому без ограничения общности можно считать, что все собственные функции ортогональны.

8.4.2-2. Вторая краевая задача.

Рассматривается уравнение при $q(\mathbf{r}) > 0$ с граничным условием второго рода:

$$\frac{\partial w}{\partial N} = f(\mathbf{r}) \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \in S.$$

Решение:

$$w(\mathbf{r}) = \int_V \Phi(\boldsymbol{\rho}) G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})\, dV_\rho + \int_S f(\boldsymbol{\rho}) a(\boldsymbol{\rho}) G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})\, dS_\rho. \tag{5}$$

Здесь функция Грина определяется по формуле (2), где λ_n и $u_n(\mathbf{r})$ — собственные значения и собственные функции задачи Штурма — Лиувилля для эллиптического уравнения второго порядка (3) с однородным граничным условием второго рода

$$\frac{\partial u}{\partial N} = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \in S. \tag{6}$$

При $q(\mathbf{r}) > 0$ общие свойства задачи на собственные значения (3), (6) будут такими же, как и для первой краевой задачи (см. разд. 8.4.2-1).

8.4.2-3. Третья краевая задача.

Рассматривается уравнение с граничным условием второго рода:

$$\frac{\partial w}{\partial N} + k(\mathbf{r})w = f(\mathbf{r}) \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \in S.$$

Решение третьей краевой задачи описывается формулами (5) и (2), где λ_n и $u_n(\mathbf{r})$ — собственные значения и собственные функции задачи Штурма — Лиувилля для эллиптического уравнения второго порядка (3) с однородным граничным условием третьего рода

$$\frac{\partial u}{\partial N} + k(\mathbf{r})u = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \in S. \tag{7}$$

При $q(\mathbf{r}) \geqslant 0$, $k(\mathbf{r}) > 0$ общие свойства задачи на собственные значения (3), (7) будут такими же, как и для первой краевой задачи (см. разд. 8.4.2-1).

Пусть $k(\mathbf{r}) = k$. Обозначим функции Грина второй и третьей краевых задач соответственно $G_2(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})$ и $G_3(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}, k)$. При $q(\mathbf{r}) > 0$ справедливо предельное соотношение: $G_2(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) = \lim\limits_{k \to 0} G_3(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}, k)$.

8.5. Уравнения с n пространственными переменными

8.5.1. Уравнение Лапласа $\Delta_n w = 0$

Уравнение Лапласа в прямоугольной декартовой системе координат $x_1, \ldots, x_n$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 w}{\partial x_n^2} = 0.$$

При $n = 2$ и $n = 3$ см. разд. 7.1.1 и 8.1.1.

Регулярные решения уравнения Лапласа называются гармоническими функциями.

Далее будем использовать обозначения: $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

8.5.1-1. Частные решения.

1°. Фундаментальное решение:

$$\mathscr{E}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{(n-2)\sigma_n |\mathbf{x}|^{n-2}}, \quad \sigma_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \qquad (n \geqslant 3).$$

2°. Решение, содержащее произвольные функции $(n-1)$ переменных:

$$w(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{x_n^{2k}}{(2k)!} \Delta^k f(x_1, \ldots, x_{n-1}) + \frac{x_n^{2k+1}}{(2k+1)!} \Delta^k g(x_1, \ldots, x_{n-1}) \right],$$

где $f(x_1, \ldots, x_{n-1})$ и $g(x_1, \ldots, x_{n-1})$ — произвольные бесконечно дифференцируемые функции.

3°. Пусть $w(x_1, \ldots, x_n)$ — гармоническая функция. Тогда функции

$$w_1 = Aw(\pm\lambda x_1 + C_1, \ldots, \pm\lambda x_n + C_n),$$
$$w_2 = \frac{A}{|\mathbf{x}|^{n-2}} w\left(\frac{x_1}{|\mathbf{x}|^2}, \ldots, \frac{x_n}{|\mathbf{x}|^2}\right),$$

также будут гармоническими функциями всюду, где они определены (A, $C_1, \ldots, C_n$, λ — произвольные постоянные). Знаки при λ в формуле для w_1 выбираются произвольно независимо друг от друга.

⊙ *Литература*: Р. Курант (1964, стр. 245), А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко (1985, стр. 30, 33).

8.5.1-2. Область: $-\infty < x_1 < \infty,\ \dots,\ -\infty < x_{n-1} < \infty,\ 0 \leqslant x_n < \infty$. Первая краевая задача.

Рассматривается n-мерное полупространство. Задано граничное условие:

$$w = f(x_1, \dots, x_{n-1}) \quad \text{при} \quad x_n = 0.$$

Решение:

$$w(x_1, \dots, x_n) = \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_n f(y_1, \dots, y_{n-1})}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n-1} (y_k - x_k)^2 + x_n^2\right]^{n/2}} \, dy_1 \dots dy_{n-1},$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

⊙ *Литература*: А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко (1985, стр. 43).

8.5.1-3. Область: $|\mathbf{x}| \leqslant 1$. Первая краевая задача.

Рассматривается шар единичного радиуса в n-мерном пространстве. Задано граничное условие:

$$w = f(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad |\mathbf{x}| = 1.$$

Решение (интеграл Пуассона):

$$w(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}} \int\limits_{|\mathbf{y}|=1} \frac{1 - |\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^n} f(\mathbf{y}) \, dS_{\mathbf{y}}.$$

⊙ *Литература*: А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко (1985, стр. 41).

8.5.2. Другие уравнения

1. $\Delta_n w = -\Phi(x_1, \dots, x_n)$.

Уравнение Пуассона с n независимыми переменными. При $n = 2$ и $n = 3$ см. разд. 7.2 и 8.2.

1°. Решение:

$$w(x_1, \dots, x_n) = \frac{\Gamma(n/2)}{2(n-2)\pi^{n/2}} \int_{\mathcal{R}_n} \frac{\Phi(y_1, \dots, y_n) \, dy_1 \dots dy_n}{\left[(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2\right]^{\frac{n-2}{2}}}.$$

⊙ *Литература*: С. Г. Крейн (1972, стр. 516).

2°. Область: $0 \leqslant x_k \leqslant a_k$; $k = 1, \dots, n$. Первая краевая задача.
Рассматривается прямоугольный параллелепипед. Заданы граничные условия:

$$\begin{aligned} w &= f_k(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \quad \text{при} \quad x_k = 0, \\ w &= g_k(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \quad \text{при} \quad x_k = a_k. \end{aligned}$$

Функция Грина:

$$G(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \frac{2^n}{a_1 a_2 \dots a_n} \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} \frac{\sin(p_{k_1} x_1) \sin(p_{k_1} y_1) \dots \sin(p_{k_n} x_n) \sin(p_{k_n} y_n)}{p_{k_1}^2 + \dots + p_{k_n}^2},$$

$$p_{k_1} = \frac{\pi k_1}{a_1}, \quad p_{k_2} = \frac{\pi k_2}{a_2}, \quad \dots, \quad p_{k_n} = \frac{\pi k_n}{a_n}.$$

3°. Область: $0 \leqslant x_k \leqslant a_k$; $k = 1, \dots, n$. Смешанная краевая задача.
Рассматривается прямоугольный параллелепипед. Заданы граничные условия:

$$\begin{aligned} w &= f_k(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \quad \text{при} \quad x_k = 0, \\ \partial_{x_k} w &= g_k(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \quad \text{при} \quad x_k = a_k. \end{aligned}$$

$$G(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \frac{2^n}{a_1 a_2 \dots a_n} \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{\sin(p_{k_1} x_1) \sin(p_{k_1} y_1) \dots \sin(p_{k_n} x_n) \sin(p_{k_n} y_n)}{p_{k_1}^2 + \dots + p_{k_n}^2},$$

$$p_{k_1} = \frac{\pi(2k_1 + 1)}{2a_1}, \quad p_{k_2} = \frac{\pi(2k_2 + 1)}{2a_2}, \quad \dots, \quad p_{k_n} = \frac{\pi(2k_n + 1)}{2a_n}.$$

2. $\Delta_n w + \lambda w = 0.$

Уравнение Гельмгольца с n независимыми переменными. При $n = 2$ и $n = 3$ см. разд. 7.3 и 8.3.

1°. Фундаментальное решение при $\lambda = k^2 > 0$:

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{k^{\frac{n-2}{2}}}{4(2\pi)^{\frac{n-2}{2}}} r^{-\frac{n-2}{2}} Y_{\frac{n-2}{2}}(kr), \quad r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \qquad \text{при } n \text{ — четном},$$

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{k^{\frac{n-2}{2}}}{4(2\pi)^{\frac{n-2}{2}} \sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right)} r^{-\frac{n-2}{2}} J_{-\frac{n-2}{2}}(kr) \qquad \text{при } n \text{ — нечетном},$$

где $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ — функции Бесселя.

2°. Область: $0 \leqslant x_k \leqslant a_k$; $k = 1, \ldots, n$. Первая краевая задача.
Рассматривается прямоугольный параллелепипед. Заданы граничные условия:

$$w = f_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n) \quad \text{при} \quad x_k = 0,$$
$$w = g_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n) \quad \text{при} \quad x_k = a_k.$$

Функция Грина:

$$G(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = \frac{2^n}{a_1 a_2 \ldots a_n} \sum_{k_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{k_n=1}^{\infty} \frac{\sin(p_{k_1} x_1) \sin(p_{k_1} y_1) \ldots \sin(p_{k_n} x_n) \sin(p_{k_n} y_n)}{p_{k_1}^2 + \cdots + p_{k_n}^2 - \lambda},$$
$$p_{k_1} = \frac{\pi k_1}{a_1}, \quad p_{k_2} = \frac{\pi k_2}{a_2}, \quad \ldots, \quad p_{k_n} = \frac{\pi k_n}{a_n}.$$

3°. Область: $0 \leqslant x_k \leqslant a_k$; $k = 1, \ldots, n$. Вторая краевая задача.
Рассматривается прямоугольный параллелепипед. Заданы граничные условия:

$$\partial_{x_k} w = f_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n) \quad \text{при} \quad x_k = 0,$$
$$\partial_{x_k} w = g_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n) \quad \text{при} \quad x_k = a_k.$$

$$G(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n}{a_1 a_2 \ldots a_n} \frac{\cos(p_{k_1} x_1) \cos(p_{k_1} y_1) \ldots \cos(p_{k_n} x_n) \cos(p_{k_n} y_n)}{p_{k_1}^2 + \cdots + p_{k_n}^2 - \lambda},$$
$$p_{k_1} = \frac{\pi k_1}{a_1}, \quad p_{k_2} = \frac{\pi k_2}{a_2}, \quad \ldots, \quad p_{k_n} = \frac{\pi k_n}{a_n}, \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 2 & \text{при } n \neq 0. \end{cases}$$

4°. Область: $0 \leqslant x_k \leqslant a_k$; $k = 1, \ldots, n$. Смешанная краевая задача.
Рассматривается прямоугольный параллелепипед. Заданы граничные условия:

$$w = f_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n) \quad \text{при} \quad x_k = 0,$$
$$\partial_{x_k} w = g_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n) \quad \text{при} \quad x_k = a_k.$$

$$G(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = \frac{2^n}{a_1 a_2 \ldots a_n} \sum_{k_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{\sin(p_{k_1} x_1) \sin(p_{k_1} y_1) \ldots \sin(p_{k_n} x_n) \sin(p_{k_n} y_n)}{p_{k_1}^2 + \cdots + p_{k_n}^2 - \lambda},$$
$$p_{k_1} = \frac{\pi(2k_1 + 1)}{2a_1}, \quad p_{k_2} = \frac{\pi(2k_2 + 1)}{2a_2}, \quad \ldots, \quad p_{k_n} = \frac{\pi(2k_n + 1)}{2a_n}.$$

⊙ *Литература*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, Михлин и др. (1964, стр. 154).

3. $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} = 0.$

Считается, что для любых вещественных $y_1, \ldots, y_n$ выполнено неравенство $\Big|\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j\Big| \geqslant$ $\geqslant k \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2$, где k некоторая положительная константа.

Фундаментальное решение:

$$\mathscr{E}(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(n/2)}{2(n-2)\pi^{n/2}\sqrt{A}}\Bigl[\sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x_i-y_i)(x_j-y_j)\Bigr]^{-\frac{n-2}{2}} & \text{при } n\geqslant 3,\\ \dfrac{1}{2\pi\sqrt{A}}\ln\Bigl[\sum\limits_{i,j=1}^{2} b_{ij}(x_i-y_i)(x_j-y_j)\Bigr]^{-1/2} & \text{при } n=2,\end{cases}$$

где A — определитель матрицы $\mathbf{A}=\{a_{ij}\}$; b_{ij} — элементы матрицы, обратной к $\mathbf{A}$.

⊙ *Литература*: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, Михлин и др. (1964, стр. 152).

4. $\displaystyle \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2}+\frac{\partial}{\partial x_n}\Bigl(x_n^\beta\frac{\partial w}{\partial x_n}\Bigr)+\lambda w=0.$

Область: $a_i\leqslant x_i\leqslant b_i$ $(i=1,\dots,n-1)$, $0\leqslant x_n\leqslant c$.

1°. Случай $0<\beta<1$. Первая краевая задача. На всех границах области $w=0$.

Собственные значения и собственные функции:

$$\lambda_{k_1,\dots,k_{n-1},m}=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{k_i^2\pi^2}{(b_i-a_i)^2}+\frac{(2-\beta)^2\gamma_{\nu m}}{4c^{2-\beta}},$$

$$w_{k_1,\dots,k_{n-1},m}=x_n^{\frac{1-\beta}{2}}J_\nu\biggl(\gamma_{\nu m}\Bigl(\frac{x_n}{a}\Bigr)^{\frac{2-\beta}{2}}\biggr)\prod_{i=1}^{n-1}\sin\frac{k_i\pi(x_i-a_i)}{b_i-a_i},$$

где $\gamma_{\nu m}$ — m-й положительный корень уравнения $J_\nu(\gamma)=0$,

$$k_1,\ \dots,\ k_{n-1}=1,\ 2,\ \dots;\qquad m=1,\ 2,\ \dots;\qquad \nu=\frac{1-\beta}{2-\beta}.$$

2°. Случай $1\leqslant\beta<2$. Условия краевой задачи: решение ограничено при $x_n=0$, на всех других границах области $w=0$.

Собственные значения и собственные функции этой задачи определяются формулами из п. 1°, где $\nu=\dfrac{\beta-1}{2-\beta}$.

⊙ *Литература*: М. М. Смирнов (1975, стр. 113).

9. Дифференциальные уравнения с частными производными высших порядков

9.1. Уравнения с частными производными третьего порядка

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}=0.$

Линеаризованное уравнение Картевега-де Фриса.

1°. Частные решения:

$$\begin{aligned}
w(x,t)&=a(x^3-6t)+bx^2+cx+k,\\
w(x,t)&=a\sin(\lambda x+\lambda^3 t)+b\cos(\lambda x+\lambda^3 t)+c,\\
w(x,t)&=a\,\mathrm{sh}(\lambda x-\lambda^3 t)+b\,\mathrm{ch}(\lambda x-\lambda^3 t)+c,\\
w(x,t)&=\exp(-\lambda^3 t)\Big[a\exp(\lambda x)+b\exp\left(-\tfrac{1}{2}\lambda x\right)\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\lambda x+c\right)\Big],
\end{aligned}$$

где a, b, c, k, λ — произвольные постоянные.

2°. Область: $-\infty<x\leqslant 0$. Краевая задача.
Заданы начальное и граничное условия:

$$w=0\quad\text{при}\quad t=0,\qquad w=f(t)\quad\text{при}\quad x=0,\qquad w\to 0\quad\text{при}\quad x\to-\infty.$$

Решение:

$$w(x,t)=-\frac{3}{2}\int_0^t \mathrm{Ai}''\left(\frac{x}{(t-\tau)^{1/3}}\right)\frac{f(\tau)}{t-\tau}\,d\tau$$

где $\mathrm{Ai}''(z)$ — вторая производная функции Эйри.

3°. Область: $0\leqslant x<\infty$. Функция

$$w(x,t)=3\int_0^t \mathrm{Ai}''\left(\frac{x}{(t-\tau)^{1/3}}\right)\frac{f(\tau)}{t-\tau}\,d\tau,$$

удовлетворяет уравнению и двум первым условиям, указанным в п. 2°.

⊙ *Литература*: А. В. Фаминский (1999).

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=ax^6\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}.$

Преобразование

$$u(z,\tau)=wx^{-2},\quad z=1/x,\quad \tau=at$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами вида 9.1.1:

$$\frac{\partial u}{\partial\tau}=-\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}.$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=k(t)\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\big[xf(t)+g(t)\big]\dfrac{\partial w}{\partial x}+h(t)w.$

Преобразование

$$w(x,t)=u(z,\tau)\exp\Big[\int h(t)\,dt\Big],\quad z=xF(t)+\int g(t)F(t)\,dt,\quad \tau=\int k(t)F^3(t)\,dt,$$

где $F(t)=\exp\Big[\displaystyle\int f(t)\,dt\Big]$, приводит к уравнению с постоянными коэффициентами вида 9.1.1:

$$\frac{\partial u}{\partial\tau}=\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}.$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = (ax^2 + bx + c)^3 \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}$.

Частный случай уравнения 9.6.4.4 при $k = 1$, $n = 3$. Преобразование

$$w(x,t) = u(z,t)(ax^2 + bx + c), \qquad z = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + (4ac - b^2)\frac{\partial u}{\partial z}.$$

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ax^6 \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}$.

Преобразование $z = 1/x$, $u = wx^{-2}$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -a\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}.$$

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (ax^2 + bx + c)^3 \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}$.

Частный случай уравнения 9.6.4.4 при $k = 2$, $n = 3$. Преобразование

$$w(x,t) = u(z,t)(ax^2 + bx + c), \qquad z = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + (4ac - b^2)\frac{\partial u}{\partial z}.$$

9.2. Одномерные нестационарные уравнения четвертого порядка

9.2.1. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} + a^2\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \Phi(x,t)$

9.2.1-1. Частные решения однородного уравнения (при $\Phi \equiv 0$):

$$w(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,$$

$$w(x,t) = \bigl[A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x) + C\,\mathrm{sh}(\lambda x) + D\cos(\lambda x)\bigr]\exp(-\lambda^4 a^2 t),$$

где A, B, C, D, λ — произвольные постоянные.

9.2.1-2. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Представление решения через функцию Грина.

1°. Будем рассматривать задачи в области $0 \leqslant x \leqslant l$ с начальными условиями общего вида

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0$$

и различными однородными граничными условиями. Решение можно представить через функцию Грина:

$$w(x,t) = \int_0^l f(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^t\!\int_0^l \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau.$$

2°. В разд. 9.2.1-3 — 9.2.1-10 приводятся функции Грина для различных типов граничных условий. Функции Грина находятся по формуле

$$G(x,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\|\varphi_n\|^2}\exp(-\lambda_n^4 a^2 t), \tag{1}$$

где λ_n и $\varphi_n(x)$ определяются путем решения самосопряженной задачи на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка

$$\varphi'''' - \lambda^4\varphi = 0$$

с соответствующими граничными условиями (здесь и далее штрихами обозначены производные по x). Нормы собственных функций можно вычислять по формуле

$$\|\varphi_n\|^2 = \int_0^l \varphi_n^2(x)\,dx = \frac{l}{4}\varphi_n^2(l) + \frac{l}{4\lambda_n^4}\bigl[\varphi_n''(l)\bigr]^2 - \frac{l}{2\lambda_n^4}\varphi_n'(l)\varphi_n'''(l). \tag{2}$$

При записи выражений (1)–(2) считалось, что $\lambda = 0$ не является собственным значением.

9.2.1-3. На границах заданы функция и ее первая производная:

$$w = \partial_x w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w = \partial_x w = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \frac{4}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^4}{\left[\varphi_n''(l)\right]^2} \varphi_n(x)\varphi_n(\xi) \exp(-\lambda_n^4 a^2 t),$$

где

$$\varphi_n(x) = \left[\operatorname{sh}(\lambda_n l) - \sin(\lambda_n l)\right]\left[\operatorname{ch}(\lambda_n x) - \cos(\lambda_n x)\right] - \left[\operatorname{ch}(\lambda_n l) - \cos(\lambda_n l)\right]\left[\operatorname{sh}(\lambda_n x) - \sin(\lambda_n x)\right];$$

λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\operatorname{ch}(\lambda l)\cos(\lambda l) = 1$. Численные значения корней указаны в разд. 9.2.3-2.

9.2.1-4. На границах заданы функция и ее вторая производная:

$$w = \partial_{xx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w = \partial_{xx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\lambda_n x)\sin(\lambda_n \xi) \exp(-\lambda_n^4 a^2 t), \qquad \lambda_n = \frac{\pi n}{l}.$$

9.2.1-5. На границах заданы первая и третья производные:

$$\partial_x w = \partial_{xxx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad \partial_x w = \partial_{xxx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{l} + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\lambda_n x)\cos(\lambda_n \xi) \exp(-\lambda_n^4 a^2 t), \qquad \lambda_n = \frac{\pi n}{l}.$$

9.2.1-6. На границах заданы вторая и третья производные:

$$w_{xx} = \partial_{xxx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w_{xx} = \partial_{xxx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{l} + \frac{3}{l^3}(2x - l)(2\xi - l) + \frac{4}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\varphi_n^2(l)} \exp(-\lambda_n^4 a^2 t),$$

где

$$\varphi_n(x) = \left[\operatorname{sh}(\lambda_n l) - \sin(\lambda_n l)\right]\left[\operatorname{ch}(\lambda_n x) + \cos(\lambda_n x)\right] - \left[\operatorname{ch}(\lambda_n l) - \cos(\lambda_n l)\right]\left[\operatorname{sh}(\lambda_n x) + \sin(\lambda_n x)\right];$$

λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\operatorname{ch}(\lambda l)\cos(\lambda l) = 1$.

9.2.1-7. На границах заданы смешанные условия:

$$w = \partial_x w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w = \partial_{xx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^4 \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{|\varphi_n'(l)\varphi_n'''(l)|} \exp(-\lambda_n^4 a^2 t),$$

где

$$\varphi_n(x) = \left[\operatorname{sh}(\lambda_n l) - \sin(\lambda_n l)\right]\left[\operatorname{ch}(\lambda_n x) - \cos(\lambda_n x)\right] - \left[\operatorname{ch}(\lambda_n l) - \cos(\lambda_n l)\right]\left[\operatorname{sh}(\lambda_n x) - \sin(\lambda_n x)\right];$$

λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\operatorname{tg}(\lambda l) - \operatorname{th}(\lambda l) = 0$.

9.2.1-8. На границах заданы смешанные условия:

$$w = \partial_x w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad \partial_{xx} w = \partial_{xxx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

Функция Грина:

$$G(x, \xi, t) = \frac{4}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\varphi_n^2(l)} \exp(-\lambda_n^4 a^2 t),$$

где

$$\varphi_n(x) = \bigl[\operatorname{sh}(\lambda_n l) + \sin(\lambda_n l)\bigr]\bigl[\operatorname{ch}(\lambda_n x) - \cos(\lambda_n x)\bigr] - \bigl[\operatorname{ch}(\lambda_n l) + \cos(\lambda_n l)\bigr]\bigl[\operatorname{sh}(\lambda_n x) - \sin(\lambda_n x)\bigr];$$

λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\operatorname{ch}(\lambda l)\cos(\lambda l) = -1$.

9.2.1-9. На границах заданы смешанные условия:

$$w = \partial_{xx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad \partial_x w = \partial_{xxx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

Функция Грина:

$$G(x, \xi, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \sin(\lambda_n x)\sin(\lambda_n \xi)\exp(-\lambda_n^4 a^2 t), \qquad \lambda_n = \frac{\pi(2n+1)}{2l}.$$

9.2.1-10. На границах заданы смешанные условия:

$$w = \partial_{xx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad \partial_{xx} w = \partial_{xxx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

Функция Грина:

$$G(x, \xi, t) = \frac{4}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\varphi_n^2(l)} \exp(-\lambda_n^4 a^2 t),$$

где

$$\varphi_n(x) = \sin(\lambda_n l)\operatorname{sh}(\lambda_n x) + \operatorname{sh}(\lambda_n l)\sin(\lambda_n x);$$

λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\operatorname{tg}(\lambda l) - \operatorname{th}(\lambda l) = 0$.

9.2.2. Уравнение вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a^2 \dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0$

Это уравнение встречается в задачах о поперечных колебаниях упругого стержня.

9.2.2-1. Частные решения:

$$w(x,t) = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)t + A_1 x^3 + B_1 x^2 + C_1 x + D_1,$$
$$w(x,t) = \bigl[A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x) + C\operatorname{sh}(\lambda x) + D\cos(\lambda x)\bigr]\sin(\lambda^2 at),$$
$$w(x,t) = \bigl[A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x) + C\operatorname{sh}(\lambda x) + D\cos(\lambda x)\bigr]\cos(\lambda^2 at),$$

где A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1, λ — произвольные постоянные.

9.2.2-2. Область: $-\infty < x < \infty$. Задача Коши.

Заданы начальные условия:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0, \qquad \partial_t w = ag''(x) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Решение Буссинеска:

$$w(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f\bigl(x - 2\xi\sqrt{at}\bigr)\bigl(\cos\xi^2 + \sin\xi^2\bigr)\,d\xi + $$
$$+ \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g\bigl(x - 2\xi\sqrt{at}\bigr)\bigl(\cos\xi^2 - \sin\xi^2\bigr)\,d\xi.$$

⊙ *Литература*: И. Снеддон (1955, стр. 136–138).

9.2.2-3. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Свободные колебания полубесконечного стержня.

Заданы следующие условия:

$$w = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \qquad \partial_t w = 0 \quad \text{при} \quad t = 0 \qquad \text{(начальные условия)},$$
$$w = f(t) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad \partial_{xx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \qquad \text{(граничные условия)}.$$

Решение Буссинеска:

$$w(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x/\sqrt{2at}}^{\infty} f\Bigl(t - \frac{x^2}{2a\xi^2}\Bigr)\Bigl(\sin\frac{\xi^2}{2} + \cos\frac{\xi^2}{2}\Bigr)\,d\xi.$$

⊙ *Литература*: И. Снеддон (1955, стр. 139–141).

9.2.2-4. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Различные краевые задачи.

О решениях различных краевых задач см. разд. 9.2.3 при $\Phi \equiv 0$.

9.2.3. Уравнение вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a^2 \dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \Phi(x,t)$

Это уравнение встречается в задачах о вынужденных колебаниях упругого стержня.

9.2.3-1. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Представление решения через функцию Грина.

1°. Будем рассматривать задачи в области $0 \leqslant x \leqslant l$ с начальными условиями общего вида

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0, \qquad \partial_t w = g(x) \quad \text{при} \quad t = 0$$

и различными однородными граничными условиями. Решение можно представить через функцию Грина:

$$w(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l f(\xi) G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^l g(\xi) G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^t \int_0^l \Phi(\xi,\tau) G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau.$$

2°. В разд. 9.2.3-2 — 9.2.3-9 приводятся функции Грина для различных типов граничных условий. Функции Грина находятся по формуле

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n^2 \|\varphi_n\|^2} \sin(\lambda_n^2 a t), \tag{1}$$

где λ_n и $\varphi_n(x)$ определяются путем решения самосопряженной задачи на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка

$$\varphi'''' - \lambda^4 \varphi = 0$$

с соответствующими граничными условиями (здесь и далее штрихами обозначены производные по x). Нормы собственных функций можно вычислять по формуле А. Н. Крылова (1949, стр. 201–204):

$$\|\varphi_n\|^2 = \int_0^l \varphi_n^2(x)\,dx = \frac{l}{4}\varphi_n^2(l) + \frac{l}{4\lambda_n^4}\bigl[\varphi_n''(l)\bigr]^2 - \frac{l}{2\lambda_n^4}\varphi_n'(l)\varphi_n'''(l). \tag{2}$$

При записи выражений (1)–(2) считалось, что $\lambda = 0$ не является собственным значением.

9.2.3-2. Оба конца стержня жестко закреплены.

Заданы граничные условия:

$$w = \partial_x w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w = \partial_x w = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \frac{4}{al} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2}{\bigl[\varphi_n''(l)\bigr]^2} \varphi_n(x)\varphi_n(\xi) \sin(\lambda_n^2 a t),$$

где

$\varphi_n(x) = \bigl[\operatorname{sh}(\lambda_n l) - \sin(\lambda_n l)\bigr]\bigl[\operatorname{ch}(\lambda_n x) - \cos(\lambda_n x)\bigr] - \bigl[\operatorname{ch}(\lambda_n l) - \cos(\lambda_n l)\bigr]\bigl[\operatorname{sh}(\lambda_n x) - \sin(\lambda_n x)\bigr]$;
λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\operatorname{ch}(\lambda l)\cos(\lambda l) = 1$. Численные значения корней можно определять по формулам:

$$\lambda_n = \frac{\mu_n}{l}, \quad \text{где} \quad \mu_1 = 1{,}875, \quad \mu_2 = 4{,}694, \quad \mu_n = \frac{\pi}{2}(2n-1) \quad \text{при} \quad n \geqslant 3.$$

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 228–229).

9.2.3-3. Оба конца стержня закреплены на шарнирах.

Заданы граничные условия:

$$w = \partial_{xx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w = \partial_{xx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \frac{2l}{a\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(\lambda_n x) \sin(\lambda_n \xi) \sin(\lambda_n^2 at), \qquad \lambda_n = \frac{\pi n}{l}.$$

⊙ *Литература*: А. Н. Крылов (1949, стр. 194–197), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 228–229).

9.2.3-4. Оба конца стержня свободны.

Заданы граничные условия:

$$w_{xx} = \partial_{xxx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w_{xx} = \partial_{xxx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \frac{t}{l} + \frac{3t}{l^3}(2x-l)(2\xi-l) + \frac{4}{al} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n^2 \varphi_n^2(l)} \sin(\lambda_n^2 at),$$

где

$$\varphi_n(x) = \bigl[\operatorname{sh}(\lambda_n l) - \sin(\lambda_n l)\bigr]\bigl[\operatorname{ch}(\lambda_n x) + \cos(\lambda_n x)\bigr] - \bigl[\operatorname{ch}(\lambda_n l) - \cos(\lambda_n l)\bigr]\bigl[\operatorname{sh}(\lambda_n x) + \sin(\lambda_n x)\bigr];$$

λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\operatorname{ch}(\lambda l)\cos(\lambda l) = 1$. Численные значения корней указаны в разд. 9.2.3-2.

Первые два члена, стоящие перед суммой в выражении для функции Грина, отвечают нулевому собственному значению $\lambda_0 = 0$, которому соответствуют две ортогональные собственные функции $w_0^{(1)} = 1$ и $w_0^{(2)} = 2x - l$, причем $\|w_0^{(1)}\|^2 = l$ и $\|w_0^{(2)}\|^2 = \frac{1}{3}l^3$.

⊙ *Литература*: А. Н. Крылов (1949, стр. 197–199).

9.2.3-5. Один конец стержня закреплен жестко, а другой — шарнирно.

Заданы граничные условия:

$$w = \partial_x w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w = \partial_{xx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{al} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{|\varphi_n'(l)\varphi_n'''(l)|} \sin(\lambda_n^2 at),$$

где

$$\varphi_n(x) = \bigl[\operatorname{sh}(\lambda_n l) - \sin(\lambda_n l)\bigr]\bigl[\operatorname{ch}(\lambda_n x) - \cos(\lambda_n x)\bigr] - \bigl[\operatorname{ch}(\lambda_n l) - \cos(\lambda_n l)\bigr]\bigl[\operatorname{sh}(\lambda_n x) - \sin(\lambda_n x)\bigr];$$

λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\operatorname{tg}(\lambda l) - \operatorname{th}(\lambda l) = 0$.

9.2.3-6. Один конец стержня закреплен жестко, а другой — свободен.

Заданы граничные условия:

$$w = \partial_x w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad \partial_{xx} w = \partial_{xxx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \frac{4}{al} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n^2 \varphi_n^2(l)} \sin(\lambda_n^2 at),$$

где

$$\varphi_n(x) = \bigl[\operatorname{sh}(\lambda_n l) + \sin(\lambda_n l)\bigr]\bigl[\operatorname{ch}(\lambda_n x) - \cos(\lambda_n x)\bigr] - \bigl[\operatorname{ch}(\lambda_n l) + \cos(\lambda_n l)\bigr]\bigl[\operatorname{sh}(\lambda_n x) - \sin(\lambda_n x)\bigr];$$

λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\operatorname{ch}(\lambda l)\cos(\lambda l) = -1$.

9.2.3-7. Один конец стержня закреплен шарнирно, а другой — свободен.

Заданы граничные условия:

$$w = \partial_{xx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad \partial_{xx} w = \partial_{xxx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \frac{4}{al} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n^2 \varphi_n^2(l)} \sin(\lambda_n^2 at),$$

где

$$\varphi_n(x) = \sin(\lambda_n l)\,\mathrm{sh}(\lambda_n x) + \mathrm{sh}(\lambda_n l)\sin(\lambda_n x);$$

λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\mathrm{tg}(\lambda l) - \mathrm{th}(\lambda l) = 0$.

9.2.3-8. На границах заданы первая и третья производные:

$$\partial_x w = \partial_{xxx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad \partial_x w = \partial_{xxx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \frac{t}{l} + \frac{2}{al} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \cos(\lambda_n x)\cos(\lambda_n \xi)\sin(\lambda_n^2 at), \qquad \lambda_n = \frac{\pi n}{l}.$$

9.2.3-9. На границах заданы смешанные граничные условия:

$$w = \partial_{xx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad \partial_x w = \partial_{xxx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{al} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \sin(\lambda_n x)\sin(\lambda_n \xi)\sin(\lambda_n^2 at), \qquad \lambda_n = \frac{\pi(2n+1)}{2l}.$$

9.2.4. Уравнение вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a^2 \dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} + kw = \Phi(x,t)$

9.2.4-1. Частные решения однородного уравнения (при $\Phi \equiv 0$):

$$w(x,t) = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\sin\bigl(t\sqrt{k}\,\bigr),$$
$$w(x,t) = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\cos\bigl(t\sqrt{k}\,\bigr),$$
$$w(x,t) = \bigl[A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x) + C\,\mathrm{sh}(\lambda x) + D\cos(\lambda x)\bigr]\sin\bigl(t\sqrt{a^2\lambda^4 + k}\,\bigr),$$
$$w(x,t) = \bigl[A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x) + C\,\mathrm{sh}(\lambda x) + D\cos(\lambda x)\bigr]\cos\bigl(t\sqrt{a^2\lambda^4 + k}\,\bigr),$$

где A, B, C, D, λ — произвольные постоянные.

9.2.4-2. Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Представление решения через функцию Грина.

1°. Будем рассматривать задачи в области $0 \leqslant x \leqslant l$ с начальными условиями общего вида

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0, \qquad \partial_t w = g(x) \quad \text{при} \quad t = 0$$

и различными однородными граничными условиями. Решение можно представить через функцию Грина:

$$w(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l f(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^l g(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^t \int_0^l \Phi(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau.$$

2°. В разд. 9.2.4-3 — 9.2.4-10 приводятся функции Грина для различных типов граничных условий. Функции Грина находятся по формуле

$$G(x,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\|\varphi_n\|^2} \frac{\sin\bigl(t\sqrt{a^2\lambda_n^4 + k}\,\bigr)}{\sqrt{a^2\lambda_n^4 + k}},$$

где λ_n и $\varphi_n(x)$ определяются путем решения самосопряженной задачи на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка $\varphi'''' - \lambda^4\varphi = 0$ с соответствующими граничными условиями. Нормы собственных функций можно вычислять по формуле (2) из разд. 9.2.3-1.

9.2.4-3. На границах заданы функция и ее первая производная:

$$w = \partial_x w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w = \partial_x w = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \frac{4}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^4 \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\left[\varphi_n''(l)\right]^2}\,\frac{\sin\!\left(t\sqrt{a^2\lambda_n^4+k}\,\right)}{\sqrt{a^2\lambda_n^4+k}}, \qquad \varphi_n''(x) = \frac{d^2\varphi_n}{dx^2},$$

где

$$\varphi_n(x) = \left[\operatorname{sh}(\lambda_n l) - \sin(\lambda_n l)\right]\left[\operatorname{ch}(\lambda_n x) - \cos(\lambda_n x)\right] - \left[\operatorname{ch}(\lambda_n l) - \cos(\lambda_n l)\right]\left[\operatorname{sh}(\lambda_n x) - \sin(\lambda_n x)\right];$$

λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\operatorname{ch}(\lambda l)\cos(\lambda l) = 1$.

9.2.4-4. На границах заданы функция и ее вторая производная:

$$w = \partial_{xx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w = \partial_{xx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\lambda_n x)\sin(\lambda_n \xi)\,\frac{\sin\!\left(t\sqrt{a^2\lambda_n^4+k}\,\right)}{\sqrt{a^2\lambda_n^4+k}}, \qquad \lambda_n = \frac{\pi n}{l}.$$

9.2.4-5. На границах заданы первая и третья производные:

$$\partial_x w = \partial_{xxx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad \partial_x w = \partial_{xxx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \frac{\sin\!\left(t\sqrt{k}\,\right)}{l\sqrt{k}} + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(\lambda_n x)\cos(\lambda_n \xi)\,\frac{\sin\!\left(t\sqrt{a^2\lambda_n^4+k}\,\right)}{\sqrt{a^2\lambda_n^4+k}}, \qquad \lambda_n = \frac{\pi n}{l}.$$

9.2.4-6. На границах заданы вторая и третья производные:

$$w_{xx} = \partial_{xxx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w_{xx} = \partial_{xxx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \left[1 + \frac{3}{l^2}(2x-l)(2\xi-l)\right]\frac{\sin\!\left(t\sqrt{k}\,\right)}{l\sqrt{k}} + \frac{4}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\varphi_n^2(l)}\,\frac{\sin\!\left(t\sqrt{a^2\lambda_n^4+k}\,\right)}{\sqrt{a^2\lambda_n^4+k}},$$

где

$$\varphi_n(x) = \left[\operatorname{sh}(\lambda_n l) - \sin(\lambda_n l)\right]\left[\operatorname{ch}(\lambda_n x) + \cos(\lambda_n x)\right] - \left[\operatorname{ch}(\lambda_n l) - \cos(\lambda_n l)\right]\left[\operatorname{sh}(\lambda_n x) + \sin(\lambda_n x)\right];$$

λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\operatorname{ch}(\lambda l)\cos(\lambda l) = 1$.

9.2.4-7. На границах заданы смешанные условия:

$$w = \partial_x w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w = \partial_{xx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^4 \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{|\varphi_n'(l)\varphi_n'''(l)|}\,\frac{\sin\!\left(t\sqrt{a^2\lambda_n^4+k}\,\right)}{\sqrt{a^2\lambda_n^4+k}},$$

где

$$\varphi_n(x) = \left[\operatorname{sh}(\lambda_n l) - \sin(\lambda_n l)\right]\left[\operatorname{ch}(\lambda_n x) - \cos(\lambda_n x)\right] - \left[\operatorname{ch}(\lambda_n l) - \cos(\lambda_n l)\right]\left[\operatorname{sh}(\lambda_n x) - \sin(\lambda_n x)\right];$$

λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\operatorname{tg}(\lambda l) - \operatorname{th}(\lambda l) = 0$.

9.2.4-8. На границах заданы смешанные условия:

$$w = \partial_x w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad \partial_{xx} w = \partial_{xxx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \frac{4}{l}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\varphi_n^2(l)} \frac{\sin\bigl(t\sqrt{a^2\lambda_n^4 + k}\,\bigr)}{\sqrt{a^2\lambda_n^4 + k}},$$

где

$$\varphi_n(x) = \bigl[\operatorname{sh}(\lambda_n l) + \sin(\lambda_n l)\bigr]\bigl[\operatorname{ch}(\lambda_n x) - \cos(\lambda_n x)\bigr] - \bigl[\operatorname{ch}(\lambda_n l) + \cos(\lambda_n l)\bigr]\bigl[\operatorname{sh}(\lambda_n x) - \sin(\lambda_n x)\bigr];$$

λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\operatorname{ch}(\lambda l)\cos(\lambda l) = -1$.

9.2.4-9. На границах заданы смешанные условия:

$$w = \partial_{xx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad \partial_x w = \partial_{xxx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=0}^{\infty} \sin(\lambda_n x)\sin(\lambda_n \xi) \frac{\sin\bigl(t\sqrt{a^2\lambda_n^4 + k}\,\bigr)}{\sqrt{a^2\lambda_n^4 + k}}, \qquad \lambda_n = \frac{\pi(2n+1)}{2l}.$$

9.2.4-10. На границах заданы смешанные условия:

$$w = \partial_{xx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad \partial_{xx} w = \partial_{xxx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \frac{4}{l}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\varphi_n^2(l)} \frac{\sin\bigl(t\sqrt{a^2\lambda_n^4 + k}\,\bigr)}{\sqrt{a^2\lambda_n^4 + k}},$$

где

$$\varphi_n(x) = \sin(\lambda_n l)\operatorname{sh}(\lambda_n x) + \operatorname{sh}(\lambda_n l)\sin(\lambda_n x);$$

λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\operatorname{tg}(\lambda l) - \operatorname{th}(\lambda l) = 0$.

9.2.5. Другие уравнения

9.2.5-1. Уравнения, содержащие первую производную по t.

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + a^2 \dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} + kw = \Phi(x,t).$

Замена $w(x,t) = e^{-kt}u(x,t)$ приводит к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = e^{kt}\Phi(x,t),$$

которое рассматривается в разд. 9.2.1.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^8 \dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4}.$

Частный случай уравнения 9.6.4.2 при $k = 1$, $n = 4$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = k(t)\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \bigl[xf(t) + g(t)\bigr]\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(t)w.$

Частный случай уравнения 9.6.4.1 при $n = 4$. Преобразование

$$w(x,t) = u(z,\tau)\exp\Bigl[\int h(t)\,dt\Bigr], \quad z = xF(t) + \int g(t)F(t)\,dt, \quad \tau = \int k(t)F^4(t)\,dt,$$

где $F(t) = \exp\Bigl[\int f(t)\,dt\Bigr]$, приводит к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^4 u}{\partial z^4},$$

которое рассматривается в разд. 9.2.1.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = (ax^2 + bx + c)^4 \dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4}.$

Частный случай уравнения 9.6.4.4 при $k = 1$, $n = 4$.

9.2.5-2. Уравнения, содержащие вторую производную по t.

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k\dfrac{\partial w}{\partial t} + a^2 \dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \Phi(x,t).$

При $\Phi(x,t) \equiv 0$ это уравнение описывает поперечные колебания упругого стержня, происходящие в среде с сопротивлением, пропорциональном скорости.

Замена $w(x,t) = \exp\bigl(-\frac{1}{2}kt\bigr)u(x,t)$ приводит к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \tfrac{1}{4}k^2 u = \exp\bigl(\tfrac{1}{2}kt\bigr)\Phi(x,t),$$

которое рассматривается в разд. 9.2.4.

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ax^8 \dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4}.$

Частный случай уравнения 9.6.4.2 при $k = 2$, $n = 4$.

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (ax^2 + bx + c)^4 \dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4}.$

Частный случай уравнения 9.6.4.4 при $k = 2$, $n = 4$.

8. $\left(\dfrac{\partial}{\partial t} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 w = 0.$

1°. Общее решение (два способа представления):

$$w(x,t) = tu_1(x,t) + u_0(x,t),$$
$$w(x,t) = xu_1(x,t) + u_0(x,t),$$

где $u_k = u_k(x,t)$ — произвольные функции, удовлетворяющие уравнению теплопроводности $\partial_t u_k - \partial_{xx} u_k = 0$; $k = 1, 2$.

2°. Фундаментальное решение:

$$\mathscr{E}(x,t) = \frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{\pi}} \exp\Bigl(-\frac{x^2}{4t}\Bigr).$$

3°. Область: $-\infty < x < \infty$. Задача Коши.

Заданы начальные условия:

$$w = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \qquad \partial_t w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Решение:

$$w(x,t) = \frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Bigl[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\Bigr] f(\xi)\,d\xi.$$

⊙ *Литература*: Г. Е. Шилов (1965, стр. 262).

9. $\dfrac{\partial^4 w}{\partial t^4} - \dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0.$

1°. Фундаментальное решение:

$$\mathscr{E}(x,t) = \frac{1}{2\pi}\Bigl\{t\ln\sqrt{x^2+t^2} - x\arctg\frac{x}{t} - \frac{1}{2}(t+x)\ln|t+x| -$$
$$- \frac{1}{2}(t-x)\ln|t-x| + \frac{1}{8}|t+x| + \frac{1}{8}|t-x|\Bigr\}.$$

2°. Область: $-\infty < x < \infty$. Задача Коши.

Заданы начальные условия:

$$w = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \qquad \partial_t w = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \qquad \partial_{tt} w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Решение:

$$w(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{E}(x-\xi,t) f(\xi)\,d\xi.$$

⊙ *Литература*: Г. Е. Шилов (1965, стр. 271).

10. $\dfrac{\partial^4 w}{\partial t^4} - 2\dfrac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} + \dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0.$

Общее решение (три способа представления):

$$w(x,t) = f_1(t-x) + f_2(t+x) + t\big[g_1(t-x) + g_2(t+x)\big],$$
$$w(x,t) = f_1(t-x) + f_2(t+x) + x\big[g_1(t-x) + g_2(t+x)\big],$$
$$w(x,t) = f_1(t-x) + f_2(t+x) + (t+x)g_1(t-x) + (t-x)g_2(t+x),$$

где $f_1(y)$, $f_2(z)$, $g_1(y)$, $g_2(z)$ — произвольные функции.

⊙ *Литература*: А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко (1985, стр. 84).

9.3. Пространственные нестационарные уравнения четвертого порядка

9.3.1. Уравнение вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} + a^2\Big(\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \dfrac{\partial^4 w}{\partial y^4}\Big) = \Phi(x,y,t)$

9.3.1-1. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$. Представление решения через функцию Грина.

Будем рассматривать задачи в прямоугольной области $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$ с начальным условием общего вида

$$w = f(x,y) \quad \text{при} \quad t = 0$$

и различными однородными граничными условиями. Решение можно представить через функцию Грина:

$$w(x,y,t) = \int_0^{l_1}\!\!\int_0^{l_2} f(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\eta\,d\xi + \int_0^t\!\!\int_0^{l_1}\!\!\int_0^{l_2} \Phi(\xi,\eta,\tau)G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\,d\eta\,d\xi\,d\tau.$$

Ниже приводятся функции Грина для различных типов граничных условий.

9.3.1-2. На границах задается функция и ее первые производные:

$$w = \partial_x w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w = \partial_x w = 0 \quad \text{при} \quad x = l_1,$$
$$w = \partial_y w = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad w = \partial_y w = 0 \quad \text{при} \quad y = l_2.$$

Функция Грина:

$$G(x,y,\xi,\eta,t) = \frac{16}{l_1 l_2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_n^4 q_m^4}{\big[\varphi_n''(l_1)\psi_m''(l_2)\big]^2}\varphi_n(x)\psi_m(y)\varphi_n(\xi)\psi_m(\eta)\exp\big[-(p_n^4+q_m^4)a^2 t\big],$$
$$\varphi_n''(x) = \frac{d^2\varphi_n}{dx^2}, \quad \psi_m''(y) = \frac{d^2\psi_m}{dy^2}.$$

Здесь

$$\varphi_n(x) = \big[\operatorname{sh}(p_n l_1) - \sin(p_n l_1)\big]\big[\operatorname{ch}(p_n x) - \cos(p_n x)\big] - \big[\operatorname{ch}(p_n l_1) - \cos(p_n l_1)\big]\big[\operatorname{sh}(p_n x) - \sin(p_n x)\big],$$
$$\psi_m(y) = \big[\operatorname{sh}(q_m l_2) - \sin(q_m l_2)\big]\big[\operatorname{ch}(q_m y) - \cos(q_m y)\big] - \big[\operatorname{ch}(q_m l_2) - \cos(q_m l_2)\big]\big[\operatorname{sh}(q_m y) - \sin(q_m y)\big],$$

где p_n и q_m — положительные корни трансцендентных уравнений

$$\operatorname{ch}(pl_1)\cos(pl_1) = 1, \quad \operatorname{ch}(ql_2)\cos(ql_2) = 1 \qquad (q_m = p_m l_1/l_2).$$

9.3.1-3. На границах задается функция и ее вторые производные:

$$w = \partial_{xx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w = \partial_{xx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = l_1,$$
$$w = \partial_{yy} w = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad w = \partial_{yy} w = 0 \quad \text{при} \quad y = l_2.$$

Функция Грина:

$$G(x,y,\xi,\eta,t) = \frac{4}{l_1 l_2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \sin(p_n x)\sin(q_m y)\sin(p_n\xi)\sin(q_m\eta)\exp\big[-(p_n^4+q_m^4)a^2 t\big],$$
$$p_n = \frac{\pi n}{l_1}, \quad q_m = \frac{\pi m}{l_2}.$$

9.3.1-4. На границах задаются первая и третья производные искомой функции:

$$w_x = \partial_{xxx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w_x = \partial_{xxx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = l_1,$$
$$w_y = \partial_{yyy} w = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad w_y = \partial_{yyy} w = 0 \quad \text{при} \quad y = l_2.$$

Функция Грина:

$$G(x,y,\xi,\eta,t) = \frac{1}{l_1 l_2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_n \varepsilon_m \cos(p_n x) \sin(q_m y) \cos(p_n \xi) \cos(q_m \eta) \exp\bigl[-(p_n^4 + q_m^4) a^2 t\bigr],$$

$$p_n = \frac{\pi n}{l_1}, \quad q_m = \frac{\pi m}{l_2}, \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 2 & \text{при } n \neq 0. \end{cases}$$

9.3.1-5. На границах задаются вторая и третья производные искомой функции:

$$w_{xx} = \partial_{xxx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w_{xx} = \partial_{xxx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = l_1,$$
$$w_{yy} = \partial_{yyy} w = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad w_{yy} = \partial_{yyy} w = 0 \quad \text{при} \quad y = l_2.$$

Функция Грина:

$$G(x,y,\xi,\eta,t) = G_1(x,\xi,t) G_2(y,\eta,t),$$

$$G_1(x,\xi,t) = \frac{1}{l_1} + \frac{3}{l_1^3}(2x - l_1)(2\xi - l_1) + \frac{4}{l_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\varphi_n^2(l_1)} \exp(-p_n^4 a^2 t),$$

$$G_2(y,\eta,t) = \frac{1}{l_2} + \frac{3}{l_2^3}(2y - l_2)(2\eta - l_2) + \frac{4}{l_2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\psi_m(y)\psi_m(\eta)}{\psi_m^2(l_2)} \exp(-q_m^4 a^2 t).$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) = &\bigl[\operatorname{sh}(p_n l_1) - \sin(p_n l_1)\bigr]\bigl[\operatorname{ch}(p_n x) + \cos(p_n x)\bigr] - \\ &- \bigl[\operatorname{ch}(p_n l_1) - \cos(p_n l_1)\bigr]\bigl[\operatorname{sh}(p_n x) + \sin(p_n x)\bigr], \\ \psi_m(y) = &\bigl[\operatorname{sh}(q_m l_2) - \sin(q_m l_2)\bigr]\bigl[\operatorname{ch}(q_m y) + \cos(q_m y)\bigr] - \\ &- \bigl[\operatorname{ch}(q_m l_2) - \cos(q_m l_2)\bigr]\bigl[\operatorname{sh}(q_m y) + \sin(q_m y)\bigr], \end{aligned}$$

где p_n и q_m — положительные корни трансцендентных уравнений

$$\operatorname{ch}(p l_1)\cos(p l_1) = 1, \quad \operatorname{ch}(q l_2)\cos(q l_2) = 1.$$

9.3.1-6. На границах задаются смешанные условия:

$$w = \partial_{xx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad \partial_x w = \partial_{xxx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = l_1,$$
$$w = \partial_{yy} w = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \partial_y w = \partial_{yyy} w = 0 \quad \text{при} \quad y = l_2.$$

Функция Грина:

$$G(x,y,\xi,\eta,t) = \frac{4}{l_1 l_2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sin(p_n x) \sin(q_m y) \sin(p_n \xi) \sin(q_m \eta) \exp\bigl[-(p_n^4 + q_m^4) a^2 t\bigr],$$

$$p_n = \frac{\pi(2n+1)}{2l_1}, \quad q_m = \frac{\pi(2m+1)}{2l_2}.$$

9.3.2. Двумерное уравнение вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a^2 \Delta\Delta w = 0$

Это уравнение описывает двумерные свободные поперечные колебания тонкой упругой пластины, где w — функция поперечного смещения точек срединной плоскости пластины по отношению к исходному плоскому состоянию. Здесь $\Delta\Delta = \Delta^2$, где Δ — оператор Лапласа:

$$\Delta = \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} & \text{в декартовой системе координат,} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \varphi^2} & \text{в полярной системе координат.} \end{cases}$$

9.3.2-1. Частные решения (A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, k, k_1, k_2 — произвольные постоянные):

$$w(x,y,t) = \bigl[A_1\sin(k_1x) + B_1\cos(k_1x)\bigr]\bigl[A_2\sin(k_2y) + B_2\cos(k_2y)\bigr]\sin\bigl[(k_1^2+k_2^2)at\bigr],$$
$$w(x,y,t) = \bigl[A_1\sin(k_1x) + B_1\cos(k_1x)\bigr]\bigl[A_2\sin(k_2y) + B_2\cos(k_2y)\bigr]\cos\bigl[(k_1^2+k_2^2)at\bigr],$$
$$w(x,y,t) = \bigl[A_1\operatorname{sh}(k_1x) + B_1\operatorname{ch}(k_1x)\bigr]\bigl[A_2\operatorname{sh}(k_2y) + B_2\operatorname{ch}(k_2y)\bigr]\sin\bigl[(k_1^2+k_2^2)at\bigr],$$
$$w(x,y,t) = \bigl[A_1\operatorname{sh}(k_1x) + B_1\operatorname{ch}(k_1x)\bigr]\bigl[A_2\operatorname{sh}(k_2y) + B_2\operatorname{ch}(k_2y)\bigr]\cos\bigl[(k_1^2+k_2^2)at\bigr],$$
$$w(r,\varphi,t) = \bigl[A_1J_n(kr) + A_2Y_n(kr) + A_3I_n(kr) + A_4K_n(kr)\bigr]\cos(n\varphi)\sin(k^2at),$$
$$w(r,\varphi,t) = \bigl[A_1J_n(kr) + A_2Y_n(kr) + A_3I_n(kr) + A_4K_n(kr)\bigr]\sin(n\varphi)\cos(k^2at),$$

где $J_n(\xi)$ и $Y_n(\xi)$ — функции Бесселя первого и второго рода, $I_n(\xi)$ и $K_n(\xi)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

9.3.2-2. Область: $-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$. Задача Коши.

Заданы начальные условия:

$$w = f(x,y) \quad \text{при} \quad t=0, \qquad \partial_t w = g(x,y) \quad \text{при} \quad t=0.$$

Решение Пуассона:

$$w(x,y,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f\bigl(x+2\xi\sqrt{at},\ y+2\eta\sqrt{at}\,\bigr)\sin\bigl(\xi^2+\eta^2\bigr)\,d\xi\,d\eta\ +$$
$$+\ \frac{1}{\pi}\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g\bigl(x+2\xi\sqrt{a\tau},\ y+2\eta\sqrt{a\tau}\,\bigr)\sin\bigl(\xi^2+\eta^2\bigr)\,d\xi\,d\eta.$$

Функция Грина:

$$G(x,y,\xi,\eta,t) = \frac{1}{4\pi a}\int_0^t \sin\biggl[\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a\tau}\biggr]\frac{d\tau}{\tau}.$$

⊙ *Литература*: А. Н. Крылов (1949, стр. 140–145), И. Снеддон (1955, стр. 177), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 121, 565–566).

9.3.2-3. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$. Представление решения через функцию Грина.

Будем рассматривать задачи в прямоугольной области $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$ с начальными условиями общего вида

$$w = f(x,y) \quad \text{при} \quad t=0, \qquad \partial_t w = g(x,y) \quad \text{при} \quad t=0$$

и различными однородными граничными условиями. Решение можно представить через функцию Грина:

$$w(x,y,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} f(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\eta\,d\xi + \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} g(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta,t)\,d\eta\,d\xi.$$

В разд. 9.3.2-4 — 9.3.2-6 приводятся функции Грина для трех типов граничных условий.

9.3.2-4. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$. Все края пластинки шарнирно закреплены.

Заданы граничные условия:

$$w = \partial_{xx}w = 0 \quad \text{при} \quad x=0, \qquad w = \partial_{xx}w = 0 \quad \text{при} \quad x=l_1,$$
$$w = \partial_{yy}w = 0 \quad \text{при} \quad y=0, \qquad w = \partial_{yy}w = 0 \quad \text{при} \quad y=l_2.$$

Функция Грина:

$$G(x,y,\xi,\eta,t) = \frac{4}{al_1l_2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sin(p_nx)\sin(q_my)\sin(p_n\xi)\sin(q_m\eta)\frac{\sin(\lambda_{nm}at)}{\lambda_{nm}},$$
$$p_n = \frac{\pi n}{l_1}, \quad q_m = \frac{\pi m}{l_2}, \quad \lambda_{nm} = p_n^2 + q_m^2.$$

9.3.2-5. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$. На краях заданы первая и третья производные:

$$\partial_x w = \partial_{xxx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad \partial_x w = \partial_{xxx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = l_1,$$
$$\partial_y w = \partial_{yyy} w = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \partial_y w = \partial_{yyy} w = 0 \quad \text{при} \quad y = l_2.$$

Функция Грина:

$$G(x,y,\xi,\eta,t) = \frac{1}{al_1 l_2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_n \varepsilon_m \cos(p_n x) \cos(q_m y) \cos(p_n \xi) \cos(q_m \eta) \frac{\sin(\lambda_{nm} at)}{\lambda_{nm}},$$
$$p_n = \frac{\pi n}{l_1}, \quad q_m = \frac{\pi m}{l_2}, \quad \lambda_{nm} = p_n^2 + q_m^2, \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 2 & \text{при } n \neq 0. \end{cases}$$

При $n = m = 0$ отношение $\sin(\lambda_{nm} at)/\lambda_{nm}$ заменяется на at.

9.3.2-6. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$. На краях заданы смешанные условия:

$$w = \partial_{xx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w = \partial_{xx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = l_1,$$
$$\partial_y w = \partial_{yyy} w = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \partial_y w = \partial_{yyy} w = 0 \quad \text{при} \quad y = l_2.$$

Функция Грина:

$$G(x,y,\xi,\eta,t) = \frac{2}{al_1 l_2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \sin(p_n x) \cos(q_m y) \sin(p_n \xi) \cos(q_m \eta) \frac{\sin(\lambda_{nm} at)}{\lambda_{nm}},$$
$$p_n = \frac{\pi n}{l_1}, \quad q_m = \frac{\pi m}{l_2}, \quad \lambda_{nm} = p_n^2 + q_m^2, \quad \varepsilon_m = \begin{cases} 1 & \text{при } m = 0, \\ 2 & \text{при } m \neq 0. \end{cases}$$

9.3.2-7. Область: $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Задача Коши.

Начальные условия для симметричного случая в полярной системе координат:

$$w = f(r) \quad \text{при} \quad t = 0, \qquad \partial_t w = 0 \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Решение:

$$w(r,t) = \frac{1}{2at} \int_0^{\infty} \xi f(\xi) J_0\Bigl(\frac{\xi r}{2at}\Bigr) \sin\Bigl(\frac{\xi^2 + r^2}{4at}\Bigr)\, d\xi,$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя.

⊙ *Литература*: И. Снеддон (1955, стр. 164), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 121, 567–568).

9.3.2-8. Область: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Колебания круглой пластинки.

Начальные и граничные условия для симметричных поперечных колебаний круглой пластинки радиуса R с жестко закрепленным краем в полярной системе координат:

$$w = f(r) \quad \text{при} \quad t = 0, \qquad \partial_t w = g(t) \quad \text{при} \quad t = 0;$$
$$w = 0 \quad \text{при} \quad r = R, \qquad \partial_r w = 0 \quad \text{при} \quad r = R.$$

Решение:

$$w(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bigl[A_n \cos(ak_n^2 t) + B_n \sin(ak_n^2 t)\bigr] \Psi_n(r),$$
$$\Psi_n(r) = I_0(k_n R) J_0(k_n r) - J_0(k_n R) I_0(k_n r),$$

где k_n — положительные корни трансцендентного уравнения (штрих обозначает производную)

$$J_0(kR) I_0'(kR) - I_0(kR) J_0'(kR) = 0,$$

а коэффициенты A_n и B_n определяются по формулам

$$A_n = \frac{1}{\|\Psi_n\|^2} \int_0^R f(r) \Psi_n(r) r\, dr, \quad B_n = \frac{1}{ak_n^2 \|\Psi_n\|^2} \int_0^R g(r) \Psi_n(r) r\, dr,$$
$$\|\Psi_n\|^2 = \tfrac{1}{4} R^6 \bigl[\Psi_n''(R)\bigr]^2 = R^2 J_0^2(k_n R) I_0^2(k_n R).$$

⊙ *Литература*: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1972, стр. 540–542).

9.3.3. Трех- и n-мерные уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a^2\Delta\Delta w = 0$

9.3.3-1. Трехмерный случай. Задача Коши.

Область: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$. Заданы начальные условия:

$$w = f(x,y,z) \quad \text{при} \quad t = 0, \qquad \partial_t w = 0 \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Решение:

$$w(x,y,z,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi a t})^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+\xi, y+\eta, z+\zeta)\cos\Bigl(\frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{4at} - \frac{3\pi}{4}\Bigr)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

⊙ *Литература*: В. С. Владимиров, В. П. Михайлов, А. А. Вашарин и др. (1974, стр. 164).

9.3.3-2. Трехмерный случай. Краевая задача.

Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, $0 \leqslant z \leqslant l_3$ (прямоугольный параллелепипед). Начальные условия:

$$w = f(x,y,z) \quad \text{при} \quad t = 0, \qquad \partial_t w = g(x,y,z) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned}
&w = \partial_{xx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, &\qquad &w = \partial_{xx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = l_1,\\
&w = \partial_{yy} w = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, &\qquad &w = \partial_{yy} w = 0 \quad \text{при} \quad y = l_2,\\
&w = \partial_{zz} w = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, &\qquad &w = \partial_{zz} w = 0 \quad \text{при} \quad z = l_3.
\end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
w(x,y,z,t) = {}&\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\int_0^{l_3} f(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\zeta\,d\eta\,d\xi +\\
&+\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\int_0^{l_3} g(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\zeta\,d\eta\,d\xi,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{gathered}
G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{8}{al_1l_2l_3}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{nmk}}\sin(p_n x)\sin(q_m y)\sin(s_k z)\times\\
\times\sin(p_n\xi)\sin(q_m\eta)\sin(s_k\zeta)\sin(\lambda_{nmk}at),\\
p_n = \frac{\pi n}{l_1}, \quad q_m = \frac{\pi m}{l_2}, \quad s_k = \frac{\pi k}{l_3}, \quad \lambda_{nmk} = p_n^2 + q_m^2 + s_k^2.
\end{gathered}$$

9.3.3-3. n-мерный случай. Задача Коши.

Область: $\mathcal{R}^n = \{-\infty < x_k < \infty;\ k = 1,\,2,\,\ldots,\,n\}$. Заданы начальные условия:

$$w = f(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad t = 0, \qquad \partial_t w = 0 \quad \text{при} \quad t = 0,$$

где $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Решение:

$$w(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi a t})^n}\int_{\mathcal{R}^n} f(\mathbf{y})\cos\Bigl(\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{4at} - \frac{\pi n}{4}\Bigr)\,d\mathbf{y},$$

где $\mathbf{y} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ и $d\mathbf{y} = dy_1\,dy_2\,\ldots\,dy_n$.

⊙ *Литература*: В. С. Владимиров, В. П. Михайлов, А. А. Вашарин и др. (1974, стр. 164).

9.3.3-4. n-мерный случай. Краевая задача.

Область: $V = \{0 \leqslant x_k \leqslant l_k;\ k = 1,\,2,\,\ldots\,n\}$ (n-мерный параллелепипед). Начальные условия:

$$w = f(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad t = 0, \qquad \partial_t w = g(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Граничные условия:

$$w = \partial_{x_k x_k} w = 0 \quad \text{при} \quad x_k = 0, \qquad w = \partial_{x_k x_k} w = 0 \quad \text{при} \quad x_k = l_k.$$

Решение:

$$w(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_V f(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)\, d\mathbf{y} + \int_V g(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)\, d\mathbf{y},$$

где

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \frac{2^n}{a l_1 l_2 \dots l_n} \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{k_1,k_2,\dots,k_n}} \sin(p_{k_1} x_1) \sin(p_{k_2} x_2) \dots \sin(p_{k_n} x_n) \times$$
$$\times \sin(p_{k_1} y_1) \sin(p_{k_2} y_2) \dots \sin(p_{k_n} y_n) \sin\bigl(\lambda_{k_1,k_2,\dots,k_n} a t\bigr),$$
$$p_{k_1} = \frac{\pi k_1}{l_1}, \quad p_{k_2} = \frac{\pi k_2}{l_2}, \quad \dots, \quad p_{k_n} = \frac{\pi k_n}{l_n}, \quad \lambda_{k_1,k_2,\dots,k_n} = p_{k_1}^2 + p_{k_2}^2 + \dots + p_{k_n}^2.$$

9.3.4. Уравнение вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a^2 \Delta\Delta w + kw = \Phi(x, y, t)$

9.3.4-1. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$. Представление решения через функцию Грина.

Будем рассматривать задачи в прямоугольной области $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$ с начальными условиями общего вида

$$w = f(x, y) \quad \text{при} \quad t = 0, \qquad \partial_t w = g(x, y) \quad \text{при} \quad t = 0$$

и различными однородными граничными условиями. Решение можно представить через функцию Грина:

$$w(x, y, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} f(\xi, \eta) G(x, y, \xi, \eta, t)\, d\eta\, d\xi + \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} g(\xi, \eta) G(x, y, \xi, \eta, t)\, d\eta\, d\xi +$$
$$+ \int_0^t \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \Phi(\xi, \eta, \tau) G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t - \tau)\, d\eta\, d\xi\, d\tau.$$

В разд. 9.3.4-2 — 9.3.4-4 приводятся функции Грина для трех типов граничных условий.

9.3.4-2. На границах заданы функция и ее вторые производные:

$$w = \partial_{xx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w = \partial_{xx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = l_1,$$
$$w = \partial_{yy} w = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad w = \partial_{yy} w = 0 \quad \text{при} \quad y = l_2.$$

Функция Грина:

$$G(x, y, \xi, \eta, t) = \frac{4}{l_1 l_2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(p_n x) \sin(q_m y) \sin(p_n \xi) \sin(q_m \eta) \frac{\sin(\lambda_{nm} t)}{\lambda_{nm}},$$
$$p_n = \frac{\pi n}{l_1}, \quad q_m = \frac{\pi m}{l_2}, \quad \lambda_{nm} = \sqrt{a^2 (p_n^2 + q_m^2)^2 + k}.$$

9.3.4-3. На границах заданы первая и третья производные:

$$\partial_x w = \partial_{xxx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad \partial_x w = \partial_{xxx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = l_1,$$
$$\partial_y w = \partial_{yyy} w = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \partial_y w = \partial_{yyy} w = 0 \quad \text{при} \quad y = l_2.$$

Функция Грина:

$$G(x, y, \xi, \eta, t) = \frac{1}{l_1 l_2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_n \varepsilon_m \cos(p_n x) \cos(q_m y) \cos(p_n \xi) \cos(q_m \eta) \frac{\sin(\lambda_{nm} t)}{\lambda_{nm}},$$
$$p_n = \frac{\pi n}{l_1}, \quad q_m = \frac{\pi m}{l_2}, \quad \lambda_{nm} = \sqrt{a^2 (p_n^2 + q_m^2)^2 + k}, \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 2 & \text{при } n \neq 0. \end{cases}$$

9.3.4-4. На границах заданы смешанные условия:

$$w = \partial_{xx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w = \partial_{xx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = l_1,$$
$$\partial_y w = \partial_{yyy} w = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \partial_y w = \partial_{yyy} w = 0 \quad \text{при} \quad y = l_2.$$

Функция Грина:

$$G(x, y, \xi, \eta, t) = \frac{2}{l_1 l_2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \sin(p_n x) \cos(q_m y) \sin(p_n \xi) \cos(q_m \eta) \frac{\sin(\lambda_{nm} t)}{\lambda_{nm}},$$
$$p_n = \frac{\pi n}{l_1}, \quad q_m = \frac{\pi m}{l_2}, \quad \lambda_{nm} = \sqrt{a^2 (p_n^2 + q_m^2)^2 + k}, \quad \varepsilon_m = \begin{cases} 1 & \text{при} \;\; m = 0, \\ 2 & \text{при} \;\; m \neq 0. \end{cases}$$

9.3.5. Уравнение вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a^2 \Big(\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \dfrac{\partial^4 w}{\partial y^4} \Big) + kw = \Phi(x, y, t)$

9.3.5-1. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$. Представление решения через функцию Грина.

Будем рассматривать задачи в прямоугольной области $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$ с начальными условиями общего вида

$$w = f(x, y) \quad \text{при} \quad t = 0, \qquad \partial_t w = g(x, y) \quad \text{при} \quad t = 0$$

и различными однородными граничными условиями. Решение можно представить через функцию Грина:

$$w(x, y, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} f(\xi, \eta) G(x, y, \xi, \eta, t)\, d\eta\, d\xi + \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} g(\xi, \eta) G(x, y, \xi, \eta, t)\, d\eta\, d\xi +$$
$$+ \int_0^t \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \Phi(\xi, \eta, \tau) G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t - \tau)\, d\eta\, d\xi\, d\tau.$$

В разд. 9.3.5-2 — 9.3.5-4 приводятся функции Грина для трех типов граничных условий.

9.3.5-2. На границах заданы функция и ее первые производные:

$$w = \partial_x w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w = \partial_x w = 0 \quad \text{при} \quad x = l_1,$$
$$w = \partial_y w = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad w = \partial_y w = 0 \quad \text{при} \quad y = l_2.$$

Функция Грина:

$$G(x, y, \xi, \eta, t) = \frac{16}{l_1 l_2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_n^4 q_m^4}{\left[\varphi_n''(l_1) \psi_m''(l_2)\right]^2} \varphi_n(x) \psi_m(y) \varphi_n(\xi) \psi_m(\eta) \frac{\sin(\lambda_{nm} t)}{\lambda_{nm}},$$
$$\lambda_{nm} = \sqrt{a^2 (p_n^4 + q_m^4) + k}, \quad \varphi_n''(x) = \frac{d^2 \varphi_n}{dx^2}, \quad \psi_m''(y) = \frac{d^2 \psi_m}{dy^2}.$$

Здесь

$$\varphi_n(x) = \left[\operatorname{sh}(p_n l_1) - \sin(p_n l_1)\right] \left[\operatorname{ch}(p_n x) - \cos(p_n x)\right] -$$
$$- \left[\operatorname{ch}(p_n l_1) - \cos(p_n l_1)\right] \left[\operatorname{sh}(p_n x) - \sin(p_n x)\right],$$
$$\psi_m(y) = \left[\operatorname{sh}(q_m l_2) - \sin(q_m l_2)\right] \left[\operatorname{ch}(q_m y) - \cos(q_m y)\right] -$$
$$- \left[\operatorname{ch}(q_m l_2) - \cos(q_m l_2)\right] \left[\operatorname{sh}(q_m y) - \sin(q_m y)\right],$$

где p_n и q_m — положительные корни трансцендентных уравнений

$$\operatorname{ch}(p l_1) \cos(p l_1) = 1, \quad \operatorname{ch}(q l_2) \cos(q l_2) = 1.$$

9.3.5-3. На границах заданы функция и ее вторые производные:

$$w = \partial_{xx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w = \partial_{xx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = l_1,$$
$$w = \partial_{yy} w = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad w = \partial_{yy} w = 0 \quad \text{при} \quad y = l_2.$$

Функция Грина:

$$G(x, y, \xi, \eta, t) = \frac{4}{l_1 l_2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(p_n x) \sin(q_m y) \sin(p_n \xi) \sin(q_m \eta) \frac{\sin(\lambda_{nm} t)}{\lambda_{nm}},$$
$$p_n = \frac{\pi n}{l_1}, \quad q_m = \frac{\pi m}{l_2}, \quad \lambda_{nm} = \sqrt{a^2 (p_n^4 + q_m^4) + k}.$$

9.3.5-4. На границах заданы первая и третья производные:

$$\partial_x w = \partial_{xxx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad \partial_x w = \partial_{xxx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = l_1,$$
$$\partial_y w = \partial_{yyy} w = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \partial_y w = \partial_{yyy} w = 0 \quad \text{при} \quad y = l_2.$$

Функция Грина:

$$G(x, y, \xi, \eta, t) = \frac{1}{l_1 l_2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_n \varepsilon_m \cos(p_n x) \cos(q_m y) \cos(p_n \xi) \cos(q_m \eta) \frac{\sin(\lambda_{nm} t)}{\lambda_{nm}},$$
$$p_n = \frac{\pi n}{l_1}, \quad q_m = \frac{\pi m}{l_2}, \quad \lambda_{nm} = \sqrt{a^2(p_n^4 + q_m^4) + k}, \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 2 & \text{при } n \neq 0. \end{cases}$$

9.4. Стационарные уравнения четвертого порядка

9.4.1. Бигармоническое уравнение $\Delta\Delta w = 0$

Бигармоническое уравнение встречается в плоских задачах теории упругости (w — функция напряжения Эйри). Оно используется также для описания медленных течений вязкой несжимаемой жидкости (w — функция тока).

Все решения уравнения Лапласа $\Delta w = 0$ (см. разд. 7.1 и 8.1) являются также решениями бигармонического уравнения.

9.4.1-1. Двумерное уравнение. Частные решения.

В прямоугольной декартовой системе координат двумерное бигармоническое уравнение имеет вид

$$\Delta\Delta \equiv \Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

1°. Частные решения:

$$w(x, y) = Ax^3 + Bx^2 y + Cxy^2 + Dy^3 + ax^2 + bxy + cy^2 + \alpha x + \beta y + \gamma,$$
$$w(x, y) = (A \operatorname{ch} \beta x + B \operatorname{sh} \beta x + Cx \operatorname{ch} \beta x + Dx \operatorname{sh} \beta x)(a \cos \beta y + b \sin \beta y),$$
$$w(x, y) = (A \cos \beta x + B \sin \beta x + Cx \cos \beta x + Dx \sin \beta x)(a \operatorname{ch} \beta y + b \operatorname{sh} \beta y),$$
$$w(x, y) = Ar^2 \ln r + Br^2 + C \ln r + D, \quad r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2},$$
$$w(x, y) = (Ax + By + C)(D \operatorname{ch} \beta x + E \operatorname{sh} \beta x)(a \cos \beta y + b \sin \beta y),$$
$$w(x, y) = (Ax + By + C)(D \operatorname{ch} \beta y + E \operatorname{sh} \beta y)(a \cos \beta x + b \sin \beta x),$$
$$w(x, y) = (x^2 + y^2)(D \operatorname{ch} \beta x + E \operatorname{sh} \beta x)(a \cos \beta y + b \sin \beta y),$$
$$w(x, y) = (x^2 + y^2)(D \operatorname{ch} \beta y + E \operatorname{sh} \beta y)(a \cos \beta x + b \sin \beta x),$$

где A, B, C, D, E, a, b, c, α, β, γ — произвольные постоянные.

2°. Фундаментальное решение:

$$\mathscr{E}(x, y) = \frac{1}{8\pi} r^2 \ln r, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

3°. Частные решения бигармонического уравнения в некоторых ортогональных криволинейных системах координат указаны в табл. 30.

⊙ *Литература*: Н. Н. Лебедев, И. П. Скальская, Я. С. Уфлянд (1972, стр. 268–269).

9.4.1-2. Двумерное уравнение. Различные способы представления общего решения.

1°. Различные способы представления общего решения через гармонические функции:

$$w(x, y) = xu_1(x, y) + u_2(x, y),$$
$$w(x, y) = yu_1(x, y) + u_2(x, y),$$
$$w(x, y) = (x^2 + y^2)u_1(x, y) + u_2(x, y),$$

где u_1 и u_2 — произвольные функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа $\Delta u_k = 0$ ($k = 1,\ 2$).

⊙ *Литература*: А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972, стр. 401).

ТАБЛИЦА 30

Частные решения бигармонического уравнения в некоторых ортогональных криволинейных системах координат; A, B, C, D, a, b, λ — произвольные постоянные.

Преобразование	Частные решения
Полярные координаты r, φ: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$	$w = (Ar^{2+\lambda} + Br^{2-\lambda} + Cr^{\lambda} + Dr^{-\lambda})(a\cos\lambda\varphi + b\sin\lambda\varphi)$, $w = Ar^2\ln r + Br^2 + C\ln r + D \quad$ (при $\lambda = 0$)
Биполярные координаты ξ, η: $x = \dfrac{c\,\mathrm{sh}\,\xi}{\mathrm{ch}\,\xi - \cos\eta},\ y = \dfrac{c\sin\eta}{\mathrm{ch}\,\xi - \cos\eta}$	$w = \dfrac{1}{\mathrm{ch}\,\xi - \cos\eta}\bigl[A\,\mathrm{ch}(\lambda+1)\xi + B\,\mathrm{sh}(\lambda+1)\xi + C\,\mathrm{ch}(\lambda-1)\xi + D\,\mathrm{sh}(\lambda-1)\xi\bigr](a\cos\lambda\eta + b\sin\lambda\eta)$
Вырожденные биполярные координаты u, v: $x = \dfrac{u}{u^2+v^2},\ y = -\dfrac{v}{u^2+v^2}$	$w = \dfrac{1}{(u^2+v^2)^2}\bigl[A\,\mathrm{ch}(\lambda u) + B\,\mathrm{sh}(\lambda u) + Cu\,\mathrm{ch}(\lambda u) + Du\,\mathrm{sh}(\lambda u)\bigr]\bigl[a\cos(\lambda v) + b\sin(\lambda v)\bigr]$

2°. Комплексная форма представления общего решения:

$$w(x,y) = \mathrm{Re}\bigl[\bar{z}f(z) + g(z)\bigr],$$

где $f(z)$ и $g(z)$ — произвольные аналитические функции комплексного переменного $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $i^2 = -1$. Символ $\mathrm{Re}[A]$ обозначает действительную часть комплексной величины A.

⦿ *Литература*: А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко (1985, стр. 51).

9.4.1-3. Двумерные краевые задачи для полуплоскости.

1°. Область: $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$. На границе задана искомая функция и ее производная по нормали:

$$w = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \partial_y w = f(x) \quad \text{при} \quad y = 0.$$

Решение:

$$w(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)G(x-\xi, y)\,d\xi, \qquad G(x,y) = \frac{1}{\pi}\frac{y^2}{x^2+y^2}.$$

⦿ *Литература*: Г. Е. Шилов (1965, стр. 262).

2°. Область: $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$. На границе заданы производные искомой величины:

$$\partial_x w = f(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \partial_y w = g(x) \quad \text{при} \quad y = 0.$$

Решение:

$$w(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\left[\mathrm{arctg}\left(\frac{x-\xi}{y}\right) + \frac{y(x-\xi)}{(x-\xi)^2+y^2}\right]d\xi + \frac{y^2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\xi)\,d\xi}{(x-\xi)^2+y^2} + C,$$

где C — произвольная постоянная.

Пример. Рассмотрим задачу о медленном (стоксовом) втекании вязкой жидкости в полуплоскость через щель шириной $2a$ с постоянной скоростью U, направление которой образует с нормалью к границе угол β (угол отсчитывается от нормали против часовой стрелки).

Эта задача после введения функции тока w по формулам $v_x = -\frac{\partial w}{\partial y}$, $v_y = \frac{\partial w}{\partial x}$ (v_x и v_y — компоненты скорости жидкости) сводится к частному случаю предыдущей задачи при

$$f(x) = \begin{cases} U\cos\beta & \text{при } |x| < a, \\ 0 & \text{при } |x| > a, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} U\sin\beta & \text{при } |x| < a, \\ 0 & \text{при } |x| > a. \end{cases}$$

Решение Дина:

$$w(x,y) = \frac{U}{\pi}\bigl[(x-a)\cos\beta + y\sin\beta\bigr]\,\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x-a}\right) - \frac{U}{\pi}\bigl[(x+a)\cos\beta + y\sin\beta\bigr]\,\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x+a}\right) + C.$$

⦿ *Литература*: И. Снеддон (1955, стр. 337–341).

9.4.1-4. Двумерная краевая задача для круга.

Область: $0 \leqslant r \leqslant a$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Граничные условия в полярной системе координат:

$$w = f(\varphi) \quad \text{при} \quad r = a, \qquad \partial_r w = g(\varphi) \quad \text{при} \quad r = a.$$

Решение:

$$w(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi a}(r^2 - a^2)^2 \left[\int_0^{2\pi} \frac{[a - r\cos(\eta - \varphi)] f(\eta)\, d\eta}{[r^2 + a^2 - 2ar\cos(\eta - \varphi)]^2} - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{g(\eta)\, d\eta}{r^2 + a^2 - 2ar\cos(\eta - \varphi)} \right].$$

⊙ *Литература*: А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972, стр. 402).

9.4.1-5. Трехмерное уравнение.

В прямоугольной декартовой системе координат трехмерное бигармоническое уравнение имеет вид

$$\Delta\Delta \equiv \Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial z^2} + 2\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2}.$$

1°. Частные решения в декартовой системе координат:

$$w(x,y,z) = Ar^2 + Br + C + \frac{D}{r}, \quad r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$
$$w(x,y,z) = \big[Ax\sin(\beta x) + B\sin(\beta x) + Cx\cos(\beta x) + D\cos(\beta x)\big]\sin(\mu y)\exp\big(\pm z\sqrt{\beta^2+\mu^2}\,\big),$$
$$w(x,y,z) = \big[Ax\sin(\beta x) + B\sin(\beta x) + Cx\cos(\beta x) + D\cos(\beta x)\big]\cos(\mu y)\exp\big(\pm z\sqrt{\beta^2+\mu^2}\,\big),$$
$$w(x,y,z) = \big[Ax\sin(\beta x) + B\sin(\beta x) + Cx\cos(\beta x) + D\cos(\beta x)\big]\operatorname{sh}(\mu y)\exp\big(\pm z\sqrt{\beta^2-\mu^2}\,\big),$$
$$w(x,y,z) = \big[Ax\sin(\beta x) + B\sin(\beta x) + Cx\cos(\beta x) + D\cos(\beta x)\big]\operatorname{ch}(\mu y)\exp\big(\pm z\sqrt{\beta^2-\mu^2}\,\big),$$
$$w(x,y,z) = \big[Ax\operatorname{sh}(\beta x) + B\operatorname{sh}(\beta x) + Cx\operatorname{ch}(\beta x) + D\operatorname{ch}(\beta x)\big]\operatorname{sh}(\mu y)\sin\big(z\sqrt{\beta^2+\mu^2}\,\big),$$
$$w(x,y,z) = \big[Ax\operatorname{sh}(\beta x) + B\operatorname{sh}(\beta x) + Cx\operatorname{ch}(\beta x) + D\operatorname{ch}(\beta x)\big]\operatorname{ch}(\mu y)\cos\big(z\sqrt{\beta^2+\mu^2}\,\big),$$

где A, B, C, D, β, μ — произвольные постоянные.

2°. Частные решения в цилиндрической системе координат $\big(r = \sqrt{x^2+y^2}\,\big)$:

$$w(r,\varphi,z) = (Ar\cos\varphi + Br\sin\varphi + C)J_n(\mu r)(a_1\cos n\varphi + b_1\sin n\varphi)(a_2\operatorname{ch}\mu z + b_2\operatorname{sh}\mu z),$$
$$w(r,\varphi,z) = (Ar\cos\varphi + Br\sin\varphi + C)Y_n(\mu r)(a_1\cos n\varphi + b_1\sin n\varphi)(a_2\operatorname{ch}\mu z + b_2\operatorname{sh}\mu z),$$
$$w(r,\varphi,z) = (Ar\cos\varphi + Br\sin\varphi + C)I_n(\mu r)(a_1\cos n\varphi + b_1\sin n\varphi)(a_2\cos\mu z + b_2\sin\mu z),$$
$$w(r,\varphi,z) = (Ar\cos\varphi + Br\sin\varphi + C)K_n(\mu r)(a_1\cos n\varphi + b_1\sin n\varphi)(a_2\cos\mu z + b_2\sin\mu z),$$
$$w(r,\varphi,z) = J_n(\mu r)(A\cos n\varphi + B\sin n\varphi)(a_1\operatorname{ch}\mu z + b_1\operatorname{sh}\mu z + a_2 z\operatorname{ch}\mu z + b_2 z\operatorname{sh}\mu z),$$
$$w(r,\varphi,z) = Y_n(\mu r)(A\cos n\varphi + B\sin n\varphi)(a_1\operatorname{ch}\mu z + b_1\operatorname{sh}\mu z + a_2 z\operatorname{ch}\mu z + b_2 z\operatorname{sh}\mu z),$$
$$w(r,\varphi,z) = I_n(\mu r)(A\cos n\varphi + B\sin n\varphi)(a_1\cos\mu z + b_1\sin\mu z + a_2 z\cos\mu z + b_2 z\sin\mu z),$$
$$w(r,\varphi,z) = K_n(\mu r)(A\cos n\varphi + B\sin n\varphi)(a_1\cos\mu z + b_1\sin\mu z + a_2 z\cos\mu z + b_2 z\sin\mu z),$$

где $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;$ A, B, C, a_1, a_2, b_1, b_2, μ — произвольные постоянные; $J_n(\xi)$ и $Y_n(\xi)$ — функции Бесселя; $I_n(\xi)$ и $K_n(\xi)$ — модифицированные функции Бесселя.

3°. Частные решения в сферической системе координат $\big(r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\big)$:

$$w(r) = Ar^2 + Br + C + Dr^{-1},$$
$$w(r,\theta) = \big(Ar^{n+2} + Br^n + Cr^{1-n} + Dr^{-1-n}\big)P_n(\cos\theta),$$
$$w(r,\theta,\varphi) = \big(Ar^{n+2} + Br^n + Cr^{1-n} + Dr^{-1-n}\big)P_n^m(\cos\theta)(a\cos m\varphi + b\sin m\varphi),$$

где $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;$ $m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n;$ A, B, C, D, a, b — произвольные постоянные; $P_n(\xi)$ — полиномы Лежандра; $P_n^m(\xi)$ — присоединенные функции Лежандра, которые определяются формулами:

$$P_n(x) = \frac{1}{n!\,2^n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \quad P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x).$$

4°. Фундаментальное решение:

$$\mathscr{E}(x,y,z) = -\frac{1}{8\pi}\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

5°. Различные способы представления решений бигармонического уравнения через гармонические функции:

$$w(x,y,z) = xu_1(x,y,z) + u_2(x,y,z),$$
$$w(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)u_1(x,y,z) + u_2(x,y,z),$$

где u_1 и u_2 — произвольные функции, удовлетворяющие трехмерному уравнению Лапласа $\Delta_3 u_k = 0$ $(k = 1,\ 2)$. В первой формуле вместо множителя x при u_1 может стоять y или z.

⊙ *Литература*: А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко (1985, стр. 51).

9.4.1-6. n-мерное уравнение.

1°. Частные решения:

$$w(\mathbf{x}) = \sum_{i,j,k=1}^{n} A_{ijk}x_ix_jx_k + \sum_{i,j=1}^{n} B_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} C_ix_i + D,$$

$$w(\mathbf{x}) = Ar^2 + B + Cr^{4-n} + Dr^{2-n}, \quad r^2 = \sum_{k=1}^{n}(x_k - \alpha_k)^2,$$

$$w(\mathbf{x}) = (A + Br^{2-n})\biggl(\sum_{i=1}^{n} C_ix_i + D\biggr), \quad r^2 = \sum_{k=1}^{n}(x_k - \alpha_k)^2,$$

$$w(\mathbf{x}) = \exp\bigl(\pm x_n\sqrt{\lambda_n}\,\bigr)\biggl(\sum_{i=1}^{n} A_ix_i + B\biggr)\prod_{k=1}^{n-1}\sin(\alpha_kx_k + \beta_k), \qquad \lambda_n = \sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k^2,$$

$$w(\mathbf{x}) = \biggl(\sum_{i=1}^{n} A_ix_i + B\biggr)\biggl[\prod_{k=1}^{m-1}\sin(\alpha_kx_k + \beta_k)\biggr]\biggl[\prod_{k=m}^{n}\operatorname{sh}(\gamma_kx_k)\biggr], \qquad \sum_{k=1}^{m-1}\alpha_k^2 - \sum_{k=m}^{n}\gamma_k^2 = 0,$$

где A_{ijk}, B_{ij}, A_i, C_i, A, B, C, D, α_k, β_k, γ_k — произвольные постоянные.

2°. Фундаментальное решение:

$$\mathscr{E}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(n/2)|\mathbf{x}|^{4-n}}{4\pi^{n/2}(n-2)(n-4)} & \text{при } n = 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ \ldots; \\ -\dfrac{1}{8\pi^2}\ln|\mathbf{x}| & \text{при } n = 4. \end{cases}$$

При $n = 2$ см. разд. 9.4.1-1, п. 2°.

⊙ *Литература*: Г. Е. Шилов (1965, стр. 51).

3°. Различные способы представления решений бигармонического уравнения через гармонические функции:

$$w(\mathbf{x}) = x_su_1(\mathbf{x}) + u_2(\mathbf{x}), \qquad s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;$$

$$w(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^2u_1(\mathbf{x}) + u_2(\mathbf{x}), \qquad |\mathbf{x}|^2 = \sum_{k=1}^{n}x_k^2,$$

где u_1 и u_2 — произвольные функции, удовлетворяющие n-мерному уравнению Лапласа $\Delta_n u_m = 0$ $(m = 1,\ 2)$.

⊙ *Литература*: А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко (1985, стр. 51).

9.4.2. Уравнение вида $\Delta\Delta w = \Phi(x,y)$

Неоднородное бигармоническое уравнение. Встречается в плоских задачах теории упругости и гидродинамики.

9.4.2-1. Область: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$.

Решение:

$$w(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi,\eta)\mathscr{E}(x-\xi,y-\eta)\,d\xi\,d\eta, \qquad \mathscr{E}(x,y) = \frac{1}{8\pi}(x^2+y^2)\ln\sqrt{x^2+y^2}.$$

⊙ *Литература*: А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко (1985, стр. 187).

9.4.2-2. Область: $-\infty < x < \infty, 0 \leqslant y < \infty$. Краевая задача.

Рассматривается полуплоскость. На границе заданы производные:

$$\partial_x w = f(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \partial_y w = g(x) \quad \text{при} \quad y = 0.$$

Решение:

$$w(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\Big[\operatorname{arctg}\Big(\frac{x-\xi}{y}\Big) + \frac{y(x-\xi)}{(x-\xi)^2+y^2}\Big]\,d\xi + \frac{y^2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\xi)\,d\xi}{(x-\xi)^2+y^2} +$$
$$+ \frac{1}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{\infty}\Big[\frac{1}{2}(R_+^2 - R_-^2) - R_-^2 \ln\frac{R_+}{R_-}\Big]\Phi(\xi,\eta)\,d\eta + C,$$

где C — произвольная постоянная,

$$R_+^2 = (x-\xi)^2 + (y+\eta)^2, \qquad R_-^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2.$$

⊙ *Литература*: И. Снеддон (1955, стр. 340).

9.4.2-3. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1,\ 0 \leqslant y \leqslant l_2$. Края пластинки шарнирно закреплены.

Рассматривается прямоугольная область. Заданы граничные условия:

$$w = \partial_{xx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w = \partial_{xx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = l_1,$$
$$w = \partial_{yy} w = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad w = \partial_{yy} w = 0 \quad \text{при} \quad y = l_2.$$

Решение:

$$w(x,y) = \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \Phi(\xi,\eta) G(x,y,\xi,\eta)\,d\eta\,d\xi,$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{4}{l_1 l_2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(p_n^2+q_m^2)^2}\sin(p_n x)\sin(q_m y)\sin(p_n\xi)\sin(q_m\eta),$$
$$p_n = \frac{\pi n}{l_1}, \quad q_m = \frac{\pi m}{l_2}.$$

9.4.3. Уравнение вида $\Delta\Delta w - \lambda w = \Phi(x,y)$

9.4.3-1. Однородное уравнение (при $\Phi \equiv 0$).

Это уравнение описывает формы двумерных свободных поперечных колебаний тонкой упругой пластины, где w — функция поперечного смещения точек срединной плоскости пластины по отношению к исходному плоскому состоянию, $k = \lambda^{1/4}$ — частотный параметр. Здесь $\Delta\Delta = \Delta^2$, где Δ — оператор Лапласа:

$$\Delta = \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} & \text{в декартовой системе координат,} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2} & \text{в полярной системе координат.} \end{cases}$$

1°. Частные решения (A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2 — произвольные постоянные):

$$w(x,y) = \big[A_1\sin(k_1x) + B_1\cos(k_1x)\big]\big[A_2\sin(k_2y) + B_2\cos(k_2y)\big], \qquad \lambda = (k_1^2+k_2^2)^2,$$
$$w(x,y) = \big[A_1\sin(k_1x) + B_1\cos(k_1x)\big]\big[A_2\operatorname{sh}(k_2y) + B_2\operatorname{ch}(k_2y)\big], \qquad \lambda = (k_1^2-k_2^2)^2,$$
$$w(x,y) = \big[A_1\operatorname{sh}(k_1x) + B_1\operatorname{ch}(k_1x)\big]\big[A_2\sin(k_2y) + B_2\cos(k_2y)\big], \qquad \lambda = (k_1^2-k_2^2)^2,$$
$$w(x,y) = \big[A_1\operatorname{sh}(k_1x) + B_1\operatorname{ch}(k_1x)\big]\big[A_2\operatorname{sh}(k_2y) + B_2\operatorname{ch}(k_2y)\big], \qquad \lambda = (k_1^2+k_2^2)^2,$$
$$w(r,\varphi) = \big[A_1J_n(kr) + A_2Y_n(kr) + A_3I_n(kr) + A_4K_n(kr)\big]\cos(n\varphi), \quad \lambda = k^4 > 0$$
$$w(r,\varphi) = \big[A_1J_n(kr) + A_2Y_n(kr) + A_3I_n(kr) + A_4K_n(kr)\big]\sin(n\varphi), \quad \lambda = k^4 > 0$$

где $J_n(\xi)$ и $Y_n(\xi)$ — функции Бесселя первого и второго рода, $I_n(\xi)$ и $K_n(\xi)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

2°. Общее решение:

$$w(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y),$$

где u_1 и u_2 — произвольные функции, удовлетворяющие уравнениям Гельмгольца:

$$\Delta u_1 + \sqrt{\lambda}\,u_1 = 0, \qquad \Delta u_2 - \sqrt{\lambda}\,u_2 = 0.$$

О решениях этих уравнений см. разд. 7.3.

9.4.3-2. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$. Краевая задача.

Рассматривается прямоугольник. Заданы граничные условия:

$$w = \partial_{xx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w = \partial_{xx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = l_1,$$
$$w = \partial_{yy} w = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad w = \partial_{yy} w = 0 \quad \text{при} \quad y = l_2.$$

Решение:

$$w(x,y) = \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \Phi(\xi,\eta) G(x,y,\xi,\eta)\, d\eta\, d\xi,$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta,t) = \frac{4}{l_1 l_2} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(p_n x)\sin(q_m y)\sin(p_n \xi)\sin(q_m \eta)}{(p_n^2+q_m^2)^2 - \lambda}, \qquad p_n = \frac{\pi n}{l_1}, \quad q_m = \frac{\pi m}{l_2}.$$

9.4.4. Уравнение вида $\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \dfrac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \Phi(x,y)$

9.4.4-1. Однородное уравнение (при $\Phi \equiv 0$).

1°. Частные решения:

$$w(x,y) = \bigl[A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x) + C\operatorname{sh}(\lambda x) + D\operatorname{ch}(\lambda x)\bigr]\exp\bigl(\tfrac{1}{\sqrt2}\lambda y\bigr)\sin\bigl(\tfrac{1}{\sqrt2}\lambda y\bigr),$$
$$w(x,y) = \bigl[A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x) + C\operatorname{sh}(\lambda x) + D\operatorname{ch}(\lambda x)\bigr]\exp\bigl(\tfrac{1}{\sqrt2}\lambda y\bigr)\cos\bigl(\tfrac{1}{\sqrt2}\lambda y\bigr),$$
$$w(x,y) = \bigl[A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x) + C\operatorname{sh}(\lambda x) + D\operatorname{ch}(\lambda x)\bigr]\exp\bigl(-\tfrac{1}{\sqrt2}\lambda y\bigr)\sin\bigl(\tfrac{1}{\sqrt2}\lambda y\bigr),$$
$$w(x,y) = \bigl[A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x) + C\operatorname{sh}(\lambda x) + D\operatorname{ch}(\lambda x)\bigr]\exp\bigl(-\tfrac{1}{\sqrt2}\lambda y\bigr)\cos\bigl(\tfrac{1}{\sqrt2}\lambda y\bigr),$$

где A, B, C, D, λ — произвольные постоянные.

2°. Общее решение:

$$w(x,y) = \operatorname{Re}\bigl[f(z_1) + g(z_2)\bigr].$$

Здесь $f(z_1)$ и $g(z_2)$ — произвольные аналитические функции комплексных переменных $z_1 = x - \frac{1}{\sqrt2}(1+i)y$ и $z_2 = x + \frac{1}{\sqrt2}(1+i)y$. Символ $\operatorname{Re}[A]$ обозначает действительную часть комплексной величины A.

⊙ *Литература*: А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко (1985, стр. 52).

3°. Область: $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$. Краевая задача.

Рассматривается полуплоскость. Заданы граничные условия:

$$w = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \partial_y w = f(x) \quad \text{при} \quad y = 0.$$

Решение:

$$w(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) G(x-\xi, y)\, d\xi,$$

где

$$G(x,y) = \frac{1}{\pi\sqrt2}\left[\operatorname{arctg}\left(1 - \frac{x\sqrt2}{y}\right) + \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{x\sqrt2}{y}\right)\right].$$

⊙ *Литература*: Г. Е. Шилов (1965, стр. 271).

9.4.4-2. Неоднородное уравнение. Краевые задачи в области $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$.

Будем рассматривать задачи в прямоугольной области с различными однородными граничными условиями. Решение можно представить через функцию Грина:

$$w(x,y) = \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \Phi(\xi,\eta) G(x,y,\xi,\eta)\, d\eta\, d\xi.$$

Ниже приводятся функции Грина для двух типов граничных условий.

1°. На границах задается функция и ее первые производные:

$$w = \partial_x w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w = \partial_x w = 0 \quad \text{при} \quad x = l_1,$$
$$w = \partial_y w = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad w = \partial_y w = 0 \quad \text{при} \quad y = l_2.$$

Функция Грина:

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{16}{l_1 l_2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_n^4 q_m^4 \varphi_n(x)\psi_m(y)\varphi_n(\xi)\psi_m(\eta)}{(p_n^4 + q_m^4)\bigl[\varphi_n''(l_1)\psi_m''(l_2)\bigr]^2}.$$

Здесь

$$\begin{aligned}\varphi_n(x) = &\bigl[\operatorname{sh}(p_n l_1) - \sin(p_n l_1)\bigr]\bigl[\operatorname{ch}(p_n x) - \cos(p_n x)\bigr] - \\ &- \bigl[\operatorname{ch}(p_n l_1) - \cos(p_n l_1)\bigr]\bigl[\operatorname{sh}(p_n x) - \sin(p_n x)\bigr],\\ \psi_m(y) = &\bigl[\operatorname{sh}(q_m l_2) - \sin(q_m l_2)\bigr]\bigl[\operatorname{ch}(q_m y) - \cos(q_m y)\bigr] - \\ &- \bigl[\operatorname{ch}(q_m l_2) - \cos(q_m l_2)\bigr]\bigl[\operatorname{sh}(q_m y) - \sin(q_m y)\bigr],\end{aligned}$$

где p_n и q_m — положительные корни трансцендентных уравнений

$$\operatorname{ch}(pl_1)\cos(pl_1) = 1, \quad \operatorname{ch}(ql_2)\cos(ql_2) = 1.$$

2°. На границах задается функция и ее вторые производные:

$$w = \partial_{xx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w = \partial_{xx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = l_1,$$
$$w = \partial_{yy} w = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad w = \partial_{yy} w = 0 \quad \text{при} \quad y = l_2.$$

Функция Грина:

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{4}{l_1 l_2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{p_n^4 + q_m^4} \sin(p_n x)\sin(q_m y)\sin(p_n \xi)\sin(q_m \eta),$$
$$p_n = \frac{\pi n}{l_1}, \quad q_m = \frac{\pi m}{l_2}.$$

9.4.5. Уравнение вида $\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \dfrac{\partial^4 w}{\partial y^4} + kw = \Phi(x,y)$

9.4.5-1. Частные решения однородного уравнения (при $\Phi \equiv 0$):

$$w(x,y) = \bigl[A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x) + C\operatorname{sh}(\lambda x) + D\operatorname{ch}(\lambda x)\bigr]\exp(\beta y)\sin(\beta y),$$
$$w(x,y) = \bigl[A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x) + C\operatorname{sh}(\lambda x) + D\operatorname{ch}(\lambda x)\bigr]\exp(\beta y)\cos(\beta y),$$
$$w(x,y) = \bigl[A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x) + C\operatorname{sh}(\lambda x) + D\operatorname{ch}(\lambda x)\bigr]\exp(-\beta y)\sin(\beta y),$$
$$w(x,y) = \bigl[A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x) + C\operatorname{sh}(\lambda x) + D\operatorname{ch}(\lambda x)\bigr]\exp(-\beta y)\cos(\beta y),$$

где $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda^4 + k)^{1/4}$; A, B, C, D, λ — произвольные постоянные.

9.4.5-2. Область: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$. Краевые задачи.

1°. Будем рассматривать задачи в прямоугольной области с различными однородными граничными условиями. Решение можно представить через функцию Грина:

$$w(x,y) = \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \Phi(\xi,\eta) G(x,y,\xi,\eta)\,d\eta\,d\xi.$$

Ниже приводятся функции Грина для двух типов граничных условий.

2°. На границах задается функция и ее первые производные:

$$w = \partial_x w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w = \partial_x w = 0 \quad \text{при} \quad x = l_1,$$
$$w = \partial_y w = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad w = \partial_y w = 0 \quad \text{при} \quad y = l_2.$$

Функция Грина:

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{16}{l_1 l_2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_n^4 q_m^4 \varphi_n(x)\psi_m(y)\varphi_n(\xi)\psi_m(\eta)}{(p_n^4 + q_m^4 + k)\bigl[\varphi_n''(l_1)\psi_m''(l_2)\bigr]^2}.$$

Здесь

$$\varphi_n(x) = \bigl[\operatorname{sh}(p_n l_1) - \sin(p_n l_1)\bigr]\bigl[\operatorname{ch}(p_n x) - \cos(p_n x)\bigr] - \\ - \bigl[\operatorname{ch}(p_n l_1) - \cos(p_n l_1)\bigr]\bigl[\operatorname{sh}(p_n x) - \sin(p_n x)\bigr],$$

$$\psi_m(y) = \bigl[\operatorname{sh}(q_m l_2) - \sin(q_m l_2)\bigr]\bigl[\operatorname{ch}(q_m y) - \cos(q_m y)\bigr] - \\ - \bigl[\operatorname{ch}(q_m l_2) - \cos(q_m l_2)\bigr]\bigl[\operatorname{sh}(q_m y) - \sin(q_m y)\bigr],$$

где p_n и q_m — положительные корни трансцендентных уравнений

$$\operatorname{ch}(pl_1)\cos(pl_1) = 1, \quad \operatorname{ch}(ql_2)\cos(ql_2) = 1.$$

3°. На границах задается функция и ее вторые производные:

$$w = \partial_{xx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w = \partial_{xx} w = 0 \quad \text{при} \quad x = l_1,$$
$$w = \partial_{yy} w = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad w = \partial_{yy} w = 0 \quad \text{при} \quad y = l_2.$$

Функция Грина:

$$G(x, y, \xi, \eta) = \frac{4}{l_1 l_2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{p_n^4 + q_m^4 + k} \sin(p_n x) \sin(q_m y) \sin(p_n \xi) \sin(q_m \eta),$$
$$p_n = \frac{\pi n}{l_1}, \quad q_m = \frac{\pi m}{l_2}.$$

9.4.6. Уравнение Стокса (осесимметричные течения вязкой жидкости)

9.4.6-1. Уравнение Стокса для функции тока в сферической системе координат.

Уравнение Стокса для функции тока имеет вид

$$E^2(E^2 w) = 0, \qquad E^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\right).$$

Оно описывает медленные осесимметричные течения вязкой несжимаемой жидкости, w — функция тока, r и θ — сферические координаты. Компоненты скорости жидкости выражаются через функцию тока по формулам $v_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial w}{\partial\theta}$, $v_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial w}{\partial r}$.

Общее решение (A_n, B_n, C_n, D_n, $\tilde{A}_n$, $\tilde{B}_n$, $\tilde{C}_n$, $\tilde{D}_n$ — произвольные постоянные):

$$w(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \bigl(A_n r^n + B_n r^{1-n} + C_n r^{n+2} + D_n r^{3-n}\bigr) \mathcal{J}_n(\cos\theta) + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \bigl(\widetilde{A}_n r^n + \widetilde{B}_n r^{1-n} + \widetilde{C}_n r^{n+2} + \widetilde{D}_n r^{3-n}\bigr) \mathcal{H}_n(\cos\theta), \tag{1}$$

где $\mathcal{J}_n(\zeta)$ и $\mathcal{H}_n(\zeta)$ — функции Гегенбауэра первого и второго рода, которые линейно связаны с функциями Лежандра $P_n(\zeta)$ и $Q_n(\zeta)$:

$$\mathcal{J}_n(\zeta) = \frac{P_{n-2}(\zeta) - P_n(\zeta)}{2n - 1}, \quad \mathcal{H}_n(\zeta) = \frac{Q_{n-2}(\zeta) - Q_n(\zeta)}{2n - 1} \quad (n \geqslant 2).$$

Функции Гегенбауэра первого рода представляются в виде конечного степенного ряда:

$$\mathcal{J}_n(\zeta) = -\frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{d}{d\zeta}\right)^{n-2} \left(\frac{\zeta^2 - 1}{2}\right)^{n-1} = \\ = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-3)}{1 \cdot 2 \ldots n} \left[\zeta^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-3)} \zeta^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-3)(2n-5)} \zeta^{n-4} - \cdots\right].$$

В частных случаях имеем

$$\mathcal{J}_0(\zeta) = 1, \quad \mathcal{J}_1(\zeta) = -\zeta, \quad \mathcal{J}_2(\zeta) = \tfrac{1}{2}(1 - \zeta^2), \quad \mathcal{J}_3(\zeta) = \tfrac{1}{2}\zeta(1 - \zeta^2),$$
$$\mathcal{J}_4(\zeta) = \tfrac{1}{8}(1 - \zeta^2)(5\zeta^2 - 1), \quad \mathcal{J}_5(\zeta) = \tfrac{1}{8}\zeta(1 - \zeta^2)(7\zeta^2 - 3).$$

Функции Гегенбауэра второго рода определяются по формулам

$$\mathcal{H}_0(\zeta) = -\zeta, \quad \mathcal{H}_1(\zeta) = -1, \quad \mathcal{H}_n(\zeta) = \frac{1}{2} \mathcal{J}_n(\zeta) \ln\frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} + \mathcal{K}_n(\zeta) \quad \text{при} \quad n \geqslant 2,$$

где функции $\mathcal{K}_n(\zeta)$ выражаются через функции Гегенбауэра первого рода:

$$\mathcal{K}_n(\zeta) = -\sum_{k}^{\frac{1}{2}n\leqslant k\leqslant \frac{1}{2}n+\frac{1}{2}} \frac{(2n-4k+1)}{(2k-1)(n-k)}\left[1-\frac{(2k-1)(n-k)}{n(n-1)}\right]\mathcal{J}_{n-2k+1}(\zeta),$$

причем ряды начинаются или с $\mathcal{J}_0$ или с $\mathcal{J}_1$ в зависимости от того, нечетное или четное n. В частных случаях имеем

$$\mathcal{K}_2(\zeta)=\tfrac{1}{2}\zeta,\ \mathcal{K}_3(\zeta)=\tfrac{1}{6}(3\zeta^2-2),\ \mathcal{K}_4(\zeta)=\tfrac{1}{24}\zeta(15\zeta^2-13),\ \mathcal{K}_5(\zeta)=\tfrac{1}{120}(105\zeta^4-115\zeta^2+16).$$

При $n\geqslant 2$ функции Гегенбауэра второго рода бесконечны в точках $\zeta=\pm1$, что отвечает $\theta=0$ и $\theta=\pi$. Поэтому, если в физической постановке задачи отсутствуют сингулярные особенности, то помеченные «тильдой» в формуле (1) постоянные должны равняться нулю. В подавляющем большинстве задач об обтекании частиц, капель и пузырей функция тока в сферических координатах описывается формулой (1), где

$$A_1=A_0=B_1=B_0=C_1=C_0=D_1=D_0=0;\quad \widetilde{A}_n=\widetilde{B}_n=\widetilde{C}_n=\widetilde{D}_n=0\quad\text{при}\quad n=2,\,3,\,\ldots$$

Пример 1. В задаче об обтекании твердой сферической частицы поступательным стоксовым потоком для функции тока w выставляются граничные условия:

$$w=0\quad\text{при}\quad r=R,\qquad \partial_r w=0\quad\text{при}\quad r=R,\qquad w\to\tfrac{1}{2}Ur^2\sin^2\theta\quad\text{при}\quad r\to\infty,$$

где R — радиус частицы, U — невозмущенная скорость жидкости на бесконечности.

Решение Стокса:

$$w(r,\theta)=\frac{1}{4}U(r-R)^2\left(2+\frac{R}{r}\right)\sin^2\theta.$$

Здесь остаются лишь слагаемые для $n=2$ в первой сумме формулы (1).

Пример 2. В задаче об обтекании твердой сферической частицы осесимметричным сдвиговым стоксовым потоком для функции тока w выставляются граничные условия:

$$w=0\quad\text{при}\quad r=R,\qquad \partial_r w=0\quad\text{при}\quad r=R,\qquad w\to\tfrac{1}{2}Er^3\sin^2\theta\cos\theta\quad\text{при}\quad r\to\infty,$$

где R — радиус частицы, E — коэффициент сдвига.

Решение:

$$w(r,\theta)=\frac{1}{2}ER^3\left(\frac{r^3}{R^3}-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\frac{R^2}{r^2}\right)\sin^2\theta\cos\theta.$$

Здесь остаются лишь слагаемые для $n=3$ в первой сумме формулы (1).

Пример 3. Задача об обтекании сферической капли (пузыря) поступательным стоксовым потоком сводится к решениям уравнения Стокса вне и внутри капли. Граничное условие на бесконечности указано в примере 1, а на поверхности капли выставляется ряд сопряженных граничных условий (которые приводятся в цитируемой ниже литературе и здесь опускаются).

Решение Адамара — Рыбчинского:

$$w(r,\theta)=\frac{1}{4}Ur^2\left(2-\frac{3\beta+2}{\beta+1}\frac{R}{r}+\frac{\beta}{\beta+1}\frac{R^3}{r^3}\right)\sin^2\theta\quad\text{при}\quad r>R,$$

$$w(r,\theta)=\frac{U}{4(\beta+1)}r^2\left(\frac{r^2}{R^2}-1\right)\sin^2\theta\qquad\text{при}\quad r<R,$$

где R — радиус капли, U — невозмущенная скорость жидкости на бесконечности, β — отношение динамических вязкостей капли и окружающей жидкости (значение $\beta=0$ соответствует газовому пузырю, а $\beta=\infty$ — твердой частице).

Пример 4. Задача об обтекании сферической капли (пузыря) осесимметричным сдвиговым стоксовым потоком сводится к решениям уравнения Стокса вне и внутри капли. Граничное условие на бесконечности указано в примере 2, а на поверхности капли выставляется ряд сопряженных граничных условий (которые приводятся в цитируемой ниже литературе и здесь опускаются).

Решение Тейлора:

$$w(r,\theta)=\frac{1}{2}ER^3\left(\frac{r^3}{R^3}-\frac{1}{2}\frac{5\beta+2}{\beta+1}+\frac{3}{2}\frac{\beta}{\beta+1}\frac{R^2}{r^2}\right)\sin^2\theta\cos\theta\quad\text{при}\quad r>R,$$

$$w(r,\theta)=\frac{3}{4}\frac{ER^3}{\beta+1}\frac{r^3}{R^3}\left(\frac{r^2}{R^2}-1\right)\sin^2\theta\cos\theta\qquad\text{при}\quad r<R,$$

где R — радиус капли, E — коэффициент сдвига, β — отношение динамических вязкостей капли и окружающей жидкости (значение $\beta=0$ соответствует газовому пузырю, а $\beta=\infty$ — твердой частице).

⊙ *Литература*: G. I. Taylor (1932), В. Г. Левич (1959), Дж. Хаппель, Г. Бреннер (1976, стр. 144–162), А. М. Кутепов, А. Д. Полянин, А. В. Вязьмин, Д. А. Казенин (1996, стр. 41–44).

9.4.6-2. Уравнение Стокса в биполярной системе координат.

При решении осесимметричных задач об обтекании двух сферических частиц (капель, пузырей) используются биполярные координаты ξ, η, которые связаны с цилиндрическими координатами $\rho = r\cos\theta$, $z = r\sin\theta$ следующим образом:

$$\rho = \frac{a\sin\xi}{\operatorname{ch}\eta - \cos\xi}, \quad z = \frac{a\operatorname{sh}\eta}{\operatorname{ch}\eta - \cos\xi}.$$

Общее решение уравнения $E^2(E^2 w) = 0$ в биполярной системе координат имеет вид

$$w(\xi,\eta) = \frac{1}{(\operatorname{ch}\eta - \cos\xi)^{3/2}}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{J}_{n+1}(\cos\xi) f_n(\eta) + \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_{n+1}(\cos\xi) g_n(\eta)\right],$$
$$f_n(\eta) = A_n \operatorname{ch}\bigl[(n-\tfrac{1}{2})\eta\bigr] + B_n \operatorname{sh}\bigl[(n-\tfrac{1}{2})\eta\bigr] + C_n \operatorname{ch}\bigl[(n+\tfrac{3}{2})\eta\bigr] + D_n \operatorname{sh}\bigl[(n+\tfrac{3}{2})\eta\bigr],$$
$$g_n(\eta) = \widetilde{A}_n \operatorname{ch}\bigl[(n-\tfrac{1}{2})\eta\bigr] + \widetilde{B}_n \operatorname{sh}\bigl[(n-\tfrac{1}{2})\eta\bigr] + \widetilde{C}_n \operatorname{ch}\bigl[(n+\tfrac{3}{2})\eta\bigr] + \widetilde{D}_n \operatorname{sh}\bigl[(n+\tfrac{3}{2})\eta\bigr],$$

где A_n, B_n, C_n, D_n, $\widetilde{A}_n$, $\widetilde{B}_n$, $\widetilde{C}_n$, $\widetilde{D}_n$ — произвольные постоянные; $\mathcal{J}_n(\zeta)$ и $\mathcal{H}_n(\zeta)$ — функции Гегенбауэра.

⊙ *Литература*: Дж. Хаппель, Г. Бреннер (1976, стр. 311–314).

9.4.6-3. Уравнение Стокса в системе координат сплюснутого эллипсоида.

При решении осесимметричных задач об эллипсоидальных частиц используются координаты сплюснутого эллипсоида ξ, η, которые связаны с цилиндрическими координатами $\rho = r\cos\theta$, $z = r\sin\theta$ следующим образом:

$$\rho = c\operatorname{ch}\xi\sin\eta, \quad z = c\operatorname{sh}\xi\cos\eta.$$

Решение уравнения $E^2(E^2 w) = 0$, описывающее обтекание сплюснутого эллипсоида вращения потоком жидкости параллельно его оси, имеет вид

$$w = \frac{1}{2}Uc^2\operatorname{ch}^2\xi\sin^2\eta\left\{1 - \frac{[\lambda/(\lambda^2+1)] - [(\lambda_0^2-1)/(\lambda_0^2+1)]\operatorname{arcctg}\lambda}{[\lambda_0/(\lambda_0^2+1)] - [(\lambda_0^2-1)/(\lambda_0^2+1)]\operatorname{arcctg}\lambda_0}\right\}, \quad \lambda = \operatorname{sh}\xi,\ \lambda_0 = \operatorname{sh}\xi_0.$$

Здесь w — функция тока, U — скорость жидкости, а постоянные c и λ_0 связаны с полуосями эллипсоида a и b ($a > b$) следующими соотношениями: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $\lambda_0 = b/c$.

⊙ *Литература*: Дж. Хаппель, Г. Бреннер (1976, стр. 169–174).

9.5. Линейные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

► *Обозначения*: $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$, $\mathbf{y} = \{y_1, \dots, y_n\}$, $\boldsymbol{\omega} = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$, $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, $|\boldsymbol{\omega}| = \sqrt{\omega_1^2 + \dots + \omega_n^2}$, $\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{x} = \omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n$.

9.5.1. Фундаментальные решения. Задача Коши

9.5.1-1. Область: $\mathcal{R}^n = \{-\infty < x_k < \infty;\ k = 1, \dots, n\}$.

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами

$$P\Bigl(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Bigr) \equiv \sum_{s=0}^{M} a_{s_1,\dots,s_n} \frac{\partial^s}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_n^{s_n}}, \qquad s = s_1 + \dots + s_n,$$

где $s_1, \dots, s_n$ — неотрицательные целые числа, $a_{s_1,\dots,s_n}$ — некоторые постоянные, M — порядок оператора. Фундаментальным решением, соответствующим этому оператору, называется обобщенная функция $\mathscr{E}(\mathbf{x}) = \mathscr{E}(x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющая уравнению

$$P\Bigl(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Bigr)\mathscr{E}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}),$$

где $\delta(\mathbf{x}) = \delta(x_1)\delta(x_2)\dots\delta(x_n)$ — дельта-функция в n-мерном евклидовом пространстве.

Фундаментальное решение $\mathscr{E}(\mathbf{x})$ имеется у любого дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. Фундаментальное решение не единственно, оно определяется с точностью до слагаемого $w_0(\mathbf{x})$, являющегося произвольным решением однородного уравнения $P\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)w_0(\mathbf{x})=0$.

Решение неоднородного уравнения

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)w=\Phi(\mathbf{x})$$

с произвольное правой частью имеет вид

$$w(\mathbf{x})=\mathscr{E}(\mathbf{x})*\Phi(\mathbf{x}),\qquad \mathscr{E}(\mathbf{x})*\Phi(\mathbf{x})=\int_{\mathcal{R}^n}\mathscr{E}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\Phi(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}.$$

Здесь $d\mathbf{y}=dy_1\ldots dy_n$ и считается, что свертка $\mathscr{E}*\Phi$ имеет смысл.

⦿ *Литература*: Г. Е. Шилов (1965, стр. 158–179), В. С. Владимиров (1971, стр. 192–194), С. Г. Крейн (1972, стр. 515).

9.5.1-2. Область: $0\leqslant t<\infty$, $-\infty<x_k<\infty$; $k=1,\ldots,n$. Задача Коши.

Рассмотрим теперь линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами $P\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$, имеющий порядок m по переменному t. Обобщенная функция $\mathscr{E}(t,\mathbf{x})=\mathscr{E}(t,x_1,\ldots,x_n)$, которая является решением уравнения

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\mathscr{E}(t,\mathbf{x})=0$$

и удовлетворяет начальным условиям*

$$\mathscr{E}\big|_{t=0}=0,\quad \frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0,\quad\ldots,\quad \frac{\partial^{m-2}\mathscr{E}}{\partial t^{m-2}}\bigg|_{t=0}=0,\quad \frac{\partial^{m-1}\mathscr{E}}{\partial t^{m-1}}\bigg|_{t=0}=\delta(\mathbf{x}),\tag{1}$$

называется фундаментальным решением задачи Коши, соответствующим оператору P.

Решение задачи Коши для линейного дифференциальное уравнения

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)w=0\tag{2}$$

с начальными условиями специального вида

$$w\big|_{t=0}=0,\quad \frac{\partial w}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0,\quad\ldots,\quad \frac{\partial^{m-2}w}{\partial t^{m-2}}\bigg|_{t=0}=0,\quad \frac{\partial^{m-1}w}{\partial t^{m-1}}\bigg|_{t=0}=f(\mathbf{x})$$

дается формулой

$$w(t,\mathbf{x})=\mathscr{E}(t,\mathbf{x})*f(\mathbf{x}),\qquad \mathscr{E}(t,\mathbf{x})*f(\mathbf{x})\equiv\int_{\mathcal{R}^n}\mathscr{E}(t,\mathbf{x}-\mathbf{y})f(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}.$$

⦿ *Литература*: С. Г. Крейн (1972, стр. 516–517).

9.5.1-3. Решение задачи Коши для начальных условий общего вида.

В случае начальных условий общего вида

$$w\big|_{t=0}=f_0(\mathbf{x}),\quad \frac{\partial w}{\partial t}\bigg|_{t=0}=f_1(\mathbf{x}),\quad\ldots,\quad \frac{\partial^{m-2}w}{\partial t^{m-2}}\bigg|_{t=0}=f_{m-2}(\mathbf{x}),\quad \frac{\partial^{m-1}w}{\partial t^{m-1}}\bigg|_{t=0}=f_{m-1}(\mathbf{x})\tag{3}$$

решение уравнения (2) ищется в виде суммы

$$w(t,\mathbf{x})=\mathscr{E}(t,\mathbf{x})*\varphi_0(\mathbf{x})+\frac{\partial\mathscr{E}(t,\mathbf{x})}{\partial t}*\varphi_1(\mathbf{x})+\cdots+\frac{\partial^{m-1}\mathscr{E}(t,\mathbf{x})}{\partial t^{m-1}}*\varphi_{m-1}(\mathbf{x}).\tag{4}$$

* Число начальных условий может быть меньше m (см. разд. 9.5.4-1).

Каждое слагаемое в (4) удовлетворяет уравнению (2), а функции $\varphi_{m-1}, \varphi_{m-2}, \ldots, \varphi_0$ последовательно находятся путем решения линейной системы

$$f_0(\mathbf{x}) = \varphi_{m-1}(\mathbf{x}),$$

$$f_1(\mathbf{x}) = \varphi_{m-2}(\mathbf{x}) + \frac{\partial^m \mathscr{E}(0,\mathbf{x})}{\partial t^m} * \varphi_{m-1}(\mathbf{x}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$f_k(\mathbf{x}) = \varphi_{m-k-1}(\mathbf{x}) + \frac{\partial^m \mathscr{E}(0,\mathbf{x})}{\partial t^m} * \varphi_{m-k}(\mathbf{x}) + \cdots + \frac{\partial^{m+k-1} \mathscr{E}(0,\mathbf{x})}{\partial t^{m+k-1}} * \varphi_{m-1}(\mathbf{x}), \quad k = 2, \ldots, m-1,$$

которая получена последовательным дифференцированием формулы (4) с последующей подстановкой значения $t = 0$ и учетом начальных условий (1) и (3).

◉ *Литература*: Г. Е. Шилов (1965, стр. 257).

9.5.2. Дифференциальные уравнения эллиптического типа

9.5.2-1. Однородный эллиптический дифференциальный оператор.

Линейный однородный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами порядка k имеет вид

$$P_k\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big) \equiv \sum a_{s_1,\ldots,s_n} \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)^{s_1} \ldots \Big(\frac{\partial}{\partial x_n}\Big)^{s_n}, \qquad \sum_{i=1}^n s_i = k,$$

где $s_1, \ldots, s_n$ — неотрицательные целые числа. Здесь и далее по определению полагается: $\big(\frac{\partial}{\partial x_1}\big)^{s_1} \ldots \big(\frac{\partial}{\partial x_n}\big)^{s_n} \equiv \frac{\partial^{s_1+\cdots+s_n}}{\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_n^{s_n}}$.

Свойство линейного однородного дифференциального оператора порядка k:

$$P_k\Big(b\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, b\frac{\partial}{\partial x_n}\Big) = b^k P_k\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big), \qquad b \neq 0 \ \text{— произвольная постоянная.}$$

Линейный однородный дифференциальный оператор P_k называется эллиптическим, если при замене в P_k символов $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ переменными $\omega_1, \ldots, \omega_n$ получается многочлен $P_k(\omega_1, \ldots, \omega_n)$, не обращающийся в нуль при $\boldsymbol{\omega} \neq 0$, т. е.

$$P_k(\omega_1, \ldots, \omega_n) \equiv \sum a_{s_1,\ldots,s_n} \omega_1^{s_1} \ldots \omega_n^{s_n} \neq 0 \qquad \text{при} \quad |\boldsymbol{\omega}| \neq 0.$$

Линейное дифференциальное уравнение

$$P_k\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big) w \equiv \sum a_{s_1,\ldots,s_n} \frac{\partial^{s_1+\cdots+s_n} w}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_n^{s_n}} = 0, \qquad \sum_{i=1}^n s_i = k, \tag{1}$$

называется эллиптическим, если соответствующий линейный однородный дифференциальный оператор P_k является эллиптическим.

9.5.2-2. Эллиптический дифференциальный оператор общего вида.

В общем случае линейный дифференциальный оператор порядка k с постоянными коэффициентами имеет вид

$$\mathscr{P}_k\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big) = P_k\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big) + \sum_{i=0}^{k-1} P_i\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big),$$

где P_k — главная часть оператора, P_j — линейные однородные дифференциальные операторы порядка j ($j = 0, 1 \ldots, k$). Оператор $\mathscr{P}_k$ называется эллиптическим, если его главная часть P_k является эллиптической.

Линейное дифференциальное уравнение

$$\mathscr{P}_k\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big) w = 0 \tag{2}$$

называется эллиптическим, если соответствующий линейный дифференциальный оператор $\mathscr{P}_k$ является эллиптическим.

Замечание. Линейный эллиптический оператор и линейное эллиптическое дифференциальное уравнение могут быть только четного порядка $k = 2m$, где m натуральное число.

9.5.2-3. Фундаментальное решение однородного эллиптического уравнения.

Фундаментальное решение однородного эллиптического уравнения (1) при $k=2m$ описывается формулами:

$$\mathscr{E}(\mathbf{x}) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{4(2\pi)^{n-1}(2m-n)!}\int_{\Omega_n}|\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{x}|^{2m-n}\frac{d\Omega_n}{P_{2m}(\boldsymbol{\omega})}, \qquad \text{если } n \text{ — нечетно и } 2m \geqslant n;$$

$$\mathscr{E}(\mathbf{x}) = \frac{(-1)^{\frac{n-2}{2}}}{(2\pi)^{n}(2m-n)!}\int_{\Omega_n}|\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{x}|^{2m-n}\ln|\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{x}|\frac{d\Omega_n}{P_{2m}(\boldsymbol{\omega})}, \qquad \text{если } n \text{ — четно и } 2m \geqslant n;$$

$$\mathscr{E}(\mathbf{x}) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\int_{\Omega_n}\delta^{(n-2m-1)}(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{x})\frac{d\Omega_n}{P_{2m}(\boldsymbol{\omega})}, \qquad \text{если } n \text{ — нечетно и } 2m < n;$$

$$\mathscr{E}(\mathbf{x}) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}(n-2m-1)!}{(2\pi)^{n}}\int_{\Omega_n}|\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{x}|^{2m-n}\frac{d\Omega_n}{P_{2m}(\boldsymbol{\omega})}, \qquad \text{если } n \text{ — четно и } 2m < n.$$

Здесь интегрирование ведется по поверхности n-мерной сферы единичного радиуса Ω_n, которая задается уравнением $|\boldsymbol{\omega}|=1$; $\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{x}=\omega_1x_1+\dots+\omega_nx_n$, $P_{2m}(\boldsymbol{\omega})=P_{2m}(\omega_1,\dots,\omega_n)$.

Фундаментальное решение является обычной функцией, аналитичной при $\mathbf{x}\neq 0$, которая в окрестности начала координат (при $|\mathbf{x}|\to 0$) описывается соотношениями

$$\mathscr{E}(\mathbf{x}) = \begin{cases} b_{n,m}|\mathbf{x}|^{2m-n}, & \text{если } n \text{ — нечетно или } n \text{ — четно и } n > 2m;\\ c_{n,m}|\mathbf{x}|^{2m-n}\ln|\mathbf{x}|, & \text{если } n \text{ — четно и } n \leqslant 2m.\end{cases}$$

Здесь $b_{n,m}$ и $c_{n,m}$ — некоторые постоянные, отличные от нуля. При $2m>n$ фундаментальное решение в начале координат имеет непрерывные производные до порядка $2m-n-1$.

9.5.2-4. Фундаментальное решение эллиптического уравнения общего вида.

Фундаментальное решение эллиптического уравнения общего вида (2) при $k=2m$ можно найти по формуле

$$\mathscr{E}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_n} Z_\omega(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{x},\,-n)\,d\Omega_n, \tag{3}$$

где

$$Z_\omega(\xi,\lambda) = \frac{1}{\sigma_n\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\bigl(\frac{\lambda+1}{2}\bigr)}\int_{-\infty}^{\infty}G(\xi-\eta,\,\boldsymbol{\omega})|\eta|^{\lambda}\,d\eta, \quad \sigma_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}.$$

Здесь функция $G(\xi,\,\boldsymbol{\omega})$ является фундаментальным решением линейного обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$\mathscr{P}_{2m}\Bigl(\omega_1\frac{d}{d\xi},\,\dots,\,\omega_n\frac{d}{d\xi}\Bigr)G(\xi,\,\boldsymbol{\omega}) = \delta(\xi).$$

В случае нечетного числа измерений фундаментальное решение (3) можно представить в виде

$$\mathscr{E}(\mathbf{x}) = A_n\int_{\Omega_n}\Bigl[\frac{\partial^{n-1}}{\partial\xi^{n-1}}G(\xi,\,\boldsymbol{\omega})\Bigr]d\Omega_n, \qquad A_n = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\sigma_n(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,1\cdot 3\dots(n-2)}.$$

⦿ *Литература*: И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов (1959, стр. 157–164), С. Г. Крейн (1972, стр. 519–521).

9.5.3. Дифференциальные уравнения гиперболического типа

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами $P\bigl(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\bigr)$, порядок которого по переменному t равен m. Линейный однородный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами P называется гиперболическим, если при любых значениях $\omega_1,\dots,\omega_n$, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{s=1}^{n}\omega_s^2=1$, алгебраическое уравнение m-го порядка относительно λ:

$$P(\lambda,\omega_1,\dots,\omega_n)=0$$

имеет m вещественных и различных корней.

Фундаментальное решение задачи Коши при $m \geqslant n-1$:

$$\mathscr{E}(t,\mathbf{x}) = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}(m-n-1)!}\int\limits_{H=0}(\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}+t)^{m-n-1}\frac{[\operatorname{sign}(\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}+t)]^{m-1}}{|\nabla H|\operatorname{sign}(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla H)}\,d\sigma_H, \quad \text{если } n \text{ — нечетно;}$$

$$\mathscr{E}(t,\mathbf{x}) = \frac{2(-1)^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^{n}(m-n-1)!}\int\limits_{H=0}\frac{(\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}+t)^{m-n-1}}{|\nabla H|\operatorname{sign}(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla H)}\ln\left|\frac{\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}+t}{\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}}\right|d\sigma_H, \quad \text{если } n \text{ — четно.}$$

Здесь использованы обозначения:

$$H = P(1,\xi_1,\ldots,\xi_n), \quad |\nabla H| = \sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial \xi_1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial H}{\partial \xi_n}\right)^2}, \quad \boldsymbol{\xi}\cdot\nabla H = \xi_1\frac{\partial H}{\partial \xi_1}+\cdots+\xi_n\frac{\partial H}{\partial \xi_n},$$

σ_H — элемент поверхности $H=0$.

Фундаментальное решение задачи Коши при $m < n-1$:

$$\mathscr{E}(t,\mathbf{x}) = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{(2\pi)^{n-1}}\int\limits_{H=0}\frac{\delta^{(n-m)}(\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}+t)}{|\nabla H|\operatorname{sign}(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla H)}\,d\sigma_H, \qquad \text{если } n \text{ — нечетно;}$$

$$\mathscr{E}(t,\mathbf{x}) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}(n-m)!}{(2\pi)^{n}}\int\limits_{H=0}\frac{(\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}+t)^{m-n-1}}{|\nabla H|\operatorname{sign}(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla H)}\,d\sigma_H, \qquad \text{если } n \text{ — четно.}$$

⊙ *Литература*: И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов (1959, стр. 174–179), С. Г. Крейн (1972, стр. 523–525).

9.5.4. Регулярные уравнения. Число начальных условий в задаче Коши

9.5.4-1. Уравнения с двумя независимыми переменными ($0 \leqslant t < \infty$, $-\infty < x < \infty$).

1°. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами вида

$$\frac{\partial^m w}{\partial t^m} = \sum_{k=0}^{m-1} p_k\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^k w}{\partial t^k}, \tag{1}$$

где $p_k(z)$ — многочлен степени k, $i^2=-1$. Пусть $r=r(\sigma)$ — число корней (с учетом их кратности) характеристического уравнения

$$\lambda^m - \sum_{k=0}^{m-1} p_k(\sigma)\lambda^k = 0, \tag{2}$$

вещественные части которых при данном σ неположительны (или ограничены сверху). Если число r одинаково* для всех $\sigma \in (-\infty,\infty)$, то уравнение (1) будем называть регулярным с показателем регулярности r.

Классические уравнения — уравнения теплопроводности, волновое и Лапласа — относятся к регулярным уравнениям.

2°. В задаче Коши для регулярного уравнения (1) следует выставлять r начальных условий вида

$$w\big|_{t=0} = f_0(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t}\bigg|_{t=0} = f_1(x), \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{r-2} w}{\partial t^{r-2}}\bigg|_{t=0} = f_{r-2}(x), \quad \frac{\partial^{r-1} w}{\partial t^{r-1}}\bigg|_{t=0} = f_{r-1}(x). \tag{3}$$

Важно подчеркнуть, что в общем случае показатель регулярности r может отличаться от порядка уравнения m по переменной t. Например, для двумерного уравнения Лапласа $\partial_{tt}w = -\partial_{xx}w$ имеем $r=1$, $m=2$ (здесь обозначено $t=y$ и рассматривается первая краевая задача в полуплоскости $y \geqslant 0$). Для уравнения теплопроводности $\partial_t w = \partial_{xx} w$ и волнового уравнения $\partial_{tt} w = \partial_{xx} w$ имеем соответственно $r=m=1$ и $r=m=2$.

---

* С точностью до множества меры нуль.

Пример 1. Укажем показатели регулярности для некоторых уравнений четвертого порядка:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad (r=1,\ m=2); \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad (r=2,\ m=2);$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 w = 0 \quad (r=2,\ m=4); \qquad \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} - a^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad (r=3,\ m=4).$$

3°. Специальное решение $\mathscr{E} = \mathscr{E}(t,x)$, удовлетворяющее начальным условиям

$$\mathscr{E}\big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{r-2}\mathscr{E}}{\partial t^{r-2}}\bigg|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial^{r-1}\mathscr{E}}{\partial t^{r-1}}\bigg|_{t=0} = \delta(x), \tag{4}$$

называется фундаментальным решением.

Фундаментальное решение можно найти, сделав в уравнении (1) (при $w = \mathscr{E}$) и начальных условиях (4) преобразование Фурье по пространственной переменной.

Пример 2. Рассмотрим полигармоническое уравнение:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^n w = 0. \tag{5}$$

Учитывая представление $\frac{\partial^2}{\partial x^2} = -\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)^2$, запишем характеристическое уравнение (2) в виде

$$(\lambda^2 - \sigma^2)^n = 0.$$

Оно имеет одно решение $\lambda = -|\sigma|$, вещественная часть которого неположительна. С учетом кратности корня, находим показатель регулярности $r = n$.

В уравнении (5) (при $w = \mathscr{E}$) и начальных условиях (4) при $r = n$ сделаем преобразование Фурье по пространственной переменной:

$$U(t,\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma x}\mathscr{E}(t,x)\,dx.$$

В результате получим задачу для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - \sigma^2\right)^n U = 0 \tag{6}$$

с начальными условиями

$$U\big|_{t=0} = 0, \quad U'_t\big|_{t=0} = 0, \quad \ldots, \quad U_t^{(n-2)}\big|_{t=0} = 0, \quad U_t^{(n-1)}\big|_{t=0} = 1. \tag{7}$$

Ограниченное решение задачи (6)–(7) имеет вид

$$U(t,\sigma) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-|\sigma|t}.$$

Применяя обратное преобразования Фурье, находим фундаментальное решение полигармонического уравнения:

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}(t,x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma x}U(t,\sigma)\,d\sigma = \frac{1}{2\pi}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma x-|\sigma|t}\,d\sigma \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\left(\int_0^{\infty} e^{-i\sigma x-\sigma t}\,d\sigma + \int_{-\infty}^{0} e^{-i\sigma x+\sigma t}\,d\sigma\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{1}{t+ix} + \frac{1}{t-ix}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\frac{t}{t^2+x^2}.
\end{aligned}$$

4°. В случае начальных условий общего вида (3) решение уравнения (1) ищется с помощью помощью фундаментального решения в виде суммы

$$w(t,x) = \mathscr{E}(t,x) * \varphi_0(x) + \frac{\partial\mathscr{E}(t,x)}{\partial t} * \varphi_1(x) + \cdots + \frac{\partial^{r-1}\mathscr{E}(t,x)}{\partial t^{r-1}} * \varphi_{r-1}(x). \tag{8}$$

Каждое слагаемое в (8) удовлетворяет уравнению (1), а функции $\varphi_{r-1}, \varphi_{r-2}, \ldots, \varphi_0$ последовательно находятся путем решения линейной системы

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= \varphi_{r-1}(x), \\
f_1(x) &= \varphi_{r-2}(x) + \frac{\partial^r\mathscr{E}(0,x)}{\partial t^r} * \varphi_{r-1}(x), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
f_k(x) &= \varphi_{r-k-1}(x) + \frac{\partial^r\mathscr{E}(0,x)}{\partial t^r} * \varphi_{r-k}(x) + \cdots + \frac{\partial^{r+k-1}\mathscr{E}(0,x)}{\partial t^{r+k-1}} * \varphi_{r-1}(x), \quad k = 2, \ldots, r-1,
\end{aligned}$$

которая получена последовательным дифференцированием формулы (8) с последующей подстановкой значения $t = 0$ и учетом начальных условий (3)–(4).

В частном случае $f_0(x) = f_1(x) = \ldots = f_{r-2}(x) = 0$ в формуле (8) следует положить $\varphi_0(x) = f_{r-1}(x)$, $\varphi_1(x) = \ldots = \varphi_{r-1}(x) = 0$.

⊙ *Литература*: Г. Е. Шилов (1965, стр. 243–272).

9.5.4-2. Уравнения со многими независимыми переменными ($0 \leqslant t < \infty$, $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$).

Решение задачи Коши для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$P\Big(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big) w = 0 \tag{9}$$

при произвольном числе пространственных переменных $x_1, \ldots, x_n$ можно свести к решению задачи Коши с одной пространственной переменной ξ. Будем считать, что вспомогательный линейный дифференциальный оператор

$$P_\omega\Big(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \xi}\Big) \equiv P\Big(\frac{\partial}{\partial t}, \omega_1 \frac{\partial}{\partial \xi}, \ldots, \omega_n \frac{\partial}{\partial \xi}\Big),$$

зависящий от двух независимых переменных t и ξ, таков, что для уравнения

$$P_\omega\Big(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \xi}\Big) v = 0 \tag{10}$$

задача Коши корректна. Тогда фундаментальное решение задачи Коши для исходного уравнения (9) дается формулой

$$\mathscr{E}(t, \mathbf{x}) = \int_{\Omega_n} v_\omega(t, \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x}, -n)\, d\Omega_n.$$

Здесь

$$v_\omega(t, \xi, \lambda) = \frac{1}{\sigma_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\big(\frac{\lambda+1}{2}\big)} \int_{-\infty}^{\infty} G_\omega(t, \xi - \eta) |\eta|^\lambda \, d\eta, \qquad \sigma_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)},$$

где $G_\omega(t, \xi)$ — фундаментальное решение задачи Коши для вспомогательного уравнения (10).

В случае нечетного числа пространственных переменных можно использовать более простую формулу

$$\mathscr{E}(t, \mathbf{x}) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \big(\frac{n-1}{2}\big)!}{\sigma_n \pi^{\frac{n-1}{2}} (n-1)!} \int_{\Omega_n} \Big[\frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}} G_\omega(t, \xi)\Big] d\Omega_n, \qquad \xi = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x}.$$

Замечание. Указанные формулы справедливы для всех уравнений, для которых корректна задача Коши.

⊙ *Литература*: И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов (1959, стр. 170–173), С. Г. Крейн (1972, стр. 523–524).

9.5.4-3. Стационарные однородные регулярные уравнения ($\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$).

Линейный дифференциальный оператор $P_k\big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\big)$ называется регулярным, если он однороден и если на множестве, которое задается уравнением $P_k(\omega_1, \ldots, \omega_n) = 0$, градиент функции $P_k(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ не обращается в нуль при $|\boldsymbol{\omega}| \neq 0$.

Фундаментальное решение линейного регулярного дифференциального уравнения $P_k\big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\big) w = 0$, порождаемого линейным регулярным дифференциальным оператором P_k, имеет вид

$$\mathscr{E}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_n} \frac{\varphi_{nk}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x})}{P_k(\boldsymbol{\omega})}\, d\Omega_n, \tag{11}$$

где функция $\varphi_{nk}(z)$ описывается следующими формулами:

$$\varphi_{nk}(z) = \frac{(-1)^{\frac{n-2}{2}}}{(2\pi)^n (k-n)!} z^{k-n} \ln|z|, \qquad \text{если } n \text{ — четно и } k \geqslant n;$$

$$\varphi_{nk}(z) = \frac{(-1)^{\frac{n+2k}{2}} (n-k-1)!}{(2\pi)^n} z^{k-n}, \qquad \text{если } n \text{ — четно и } k < n;$$

$$\varphi_{nk}(z) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{4(2\pi)^{n-1} (k-n)!} z^{k-n} \operatorname{sign} z, \qquad \text{если } n \text{ — нечетно и } k \geqslant n;$$

$$\varphi_{nk}(z) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}} \delta^{(n-k-1)}(z), \qquad \text{если } n \text{ — нечетно и } k < n.$$

При этом интеграл в (11) понимается в смысле регуляризованного значения

$$\mathscr{E}(\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathscr{E}_\varepsilon(\mathbf{x}), \qquad \mathscr{E}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_n^{(\varepsilon)}} \frac{\varphi_{nk}(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{x})}{P_k(\boldsymbol{\omega})}\, d\Omega_n^{(\varepsilon)},$$

где $\Omega_n^{(\varepsilon)}$ — множество точек на сфере единичного радиуса, для которых выполняется неравенство $|P_k(\boldsymbol{\omega})| > \varepsilon$.

⦿ *Литература*: И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов (1959, стр. 165–170), С. Г. Крейн (1972, стр. 522).

9.5.5. Некоторые уравнения специального типа

1. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = P_n\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big) w, \qquad P_n(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0, \quad i^2 = -1.$

Считается, что выполнено условие $\operatorname{Re} P_n(z) \leqslant C < \infty$ при всех действительных z.

1°. Область: $-\infty < x < \infty$. Задача Коши.

Задано начальное условие:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0. \tag{1}$$

Решение:

$$w(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi, t) f(\xi)\, d\xi, \qquad G(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\bigl[tP_n(\lambda) - ix\lambda\bigr]\, d\lambda.$$

2°. Решение задачи Коши с начальным условием (1) для неоднородного уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial t} = P_n\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big) w + \Phi(x,t)$$

дается формулой

$$w(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi,t) f(\xi)\, d\xi + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi, t-\tau)\Phi(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau,$$

где выражение для функции $G(x,t)$ дано в п. 1°.

⦿ *Литература*: В. С. Владимиров, В. П. Михайлов, А. А. Вашарин и др. (1974, стр. 164–165), С. Г. Крейн (1972, стр. 517).

2. $\displaystyle \Big(\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial}{\partial x}\Big)^n w = 0, \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots$

1°. Общее решение (два способа представления):

$$w(x,t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^k f_k(x+at),$$

$$w(x,t) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k f_k(x+at),$$

где $f_k = f_k(z)$ — произвольные функции.

2°. Фундаментальное решение:

$$\mathscr{E}(x,t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\delta(x+at).$$

3. $\left(\dfrac{\partial}{\partial t} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^n w = 0, \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots$

1°. Общее решение (два способа представления):

$$w(x,t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^k u_k(x,t),$$
$$w(x,t) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k u_k(x,t),$$

где $u_k = u_k(x,t)$ — произвольные функции, удовлетворяющие уравнению теплопроводности $\partial_t u_k - \partial_{xx} u_k = 0$.

2°. Фундаментальное решение:

$$\mathscr{E}(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,(n-1)!} t^{n-3/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right).$$

3°. Область: $-\infty < x < \infty$. Задача Коши.
Заданы начальные условия:

$$w\big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{n-2} w}{\partial t^{n-2}}\bigg|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial^{n-1} w}{\partial t^{n-1}}\bigg|_{t=0} = f(x),$$

Решение:

$$w(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\mathscr{E}(x-\xi,t)\,d\xi.$$

⊙ *Литература*: Г. Е. Шилов (1965, стр. 262).

4. $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^n w = 0, \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots$

1°. Общее решение (два способа представления):

$$w(x,t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^k \big[f_k(x+t) + g_k(x-t)\big],$$
$$w(x,t) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \big[f_k(x+t) + g_k(x-t)\big],$$

где $f_k = f_k(y)$ и $g_k = g_k(z)$ — произвольные функции.

2°. Фундаментальное решение:

$$\mathscr{E}(x,t) = \frac{(-1)^{n-1}}{4^n(n-1)!}\Bigg[\operatorname{sign}(x-t)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2t)^k(x-t)^{2n-k-2}}{k!(n-k-1)!} + {}$$
$$+ (-1)^n \operatorname{sign}(x+t)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-2t)^k(x+t)^{2n-k-2}}{k!(n-k-1)!}\Bigg].$$

⊙ *Литература*: Г. Е. Шилов (1965, стр. 271).

5. $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^n w = 0, \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots$

Полигармоническое уравнение порядка n с двумя независимыми переменными.

1°. Общее решение (два способа представления):

$$w(x,y) = \sum_{k=0}^{n-1} r^{2k} u_k(x,y), \qquad r = \sqrt{x^2+y^2},$$
$$w(x,y) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k u_k(x,y),$$

где $u_k(x,y)$ — произвольные гармонические функции ($\Delta u_k = 0$). Во второй формуле вместо x^k может стоять y^k.

2°. Область: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$. Фундаментальное решение:

$$\mathscr{E}(x,y) = \frac{1}{\pi 2^{2n-1}\big[(n-1)!\big]^2} r^{2n-2} \ln r, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

3°. Область: $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$. Краевая задача.
Заданы граничные условия:

$$w\big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y}\bigg|_{y=0} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial^{n-2} w}{\partial y^{n-2}}\bigg|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial^{n-1} w}{\partial y^{n-1}}\bigg|_{y=0} = f(x),$$

Решение:

$$w(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) G(x-\xi, y)\, d\xi, \qquad G(x,y) = \frac{1}{\pi(n-1)!} \frac{y^n}{x^2+y^2}.$$

См. также пример 2 в разд. 9.5.4-1.

⊙ *Литература*: Г. Е. Шилов (1965, стр. 51, 262), Л. Д. Фаддеев (1998, стр. 451).

6. $\displaystyle\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^n w = \Phi(x,y), \qquad n = 1,\ 2,\ \dots$

Неоднородное полигармоническое уравнение порядка n с двумя независимыми переменными.
Частное решение:

$$w(x,y) = \frac{1}{\pi 2^{2n}\big[(n-1)!\big]^2} \int_{-\infty}^{\infty}\!\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi,\eta)\big[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\big]^{n-1} \ln\big[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\big]\, d\xi\, d\eta.$$

Общее решение получается сложением частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения (см. уравнение 9.5.5.5, п. 1°).

7. $\displaystyle\Delta_n^m w = 0, \qquad \Delta_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$

Полигармоническое уравнение порядка m с n независимыми переменными. При $m = 1$ см. разд. 7.1 и 8.1. При $m = 2$ см. разд. 9.4.1. При $n = 2$ см. уравнения 9.5.5.5 и 9.5.5.6.

1°. Частные решения:

$$w(\mathbf{x}) = \sum_{s=0}^{m-1} x_j^s u_s(\mathbf{x}), \qquad j = 1,\ 2,\ \dots,\ n,$$

где $u_s(\mathbf{x})$ — произвольные гармонические функции ($\Delta_n u_s = 0$).

2°. Фундаментальное решение при $m \geqslant 1$, $n \geqslant 3$:

$$\mathscr{E}(\mathbf{x}) = \begin{cases} b_{n,m}|\mathbf{x}|^{2m-n}, & \text{если } n \text{ — нечетно или } n \text{ — четно и } n > 2m; \\ c_{n,m}|\mathbf{x}|^{2m-n} \ln|\mathbf{x}|, & \text{если } n \text{ — четно и } n \leqslant 2m. \end{cases}$$

Здесь

$$b_{n,m} = \frac{\Gamma(n/2)}{2^m (m-1)!\, \pi^{n/2} (2-n)(4-n)\dots(2m-n)},$$

$$c_{n,m} = \frac{\Gamma(n/2)}{2^m (m-1)!\, \pi^{n/2} (2-n)(4-n)\dots(2m_0-2-n)(2m_0+2-n)(2m_0+4-n)\dots(2m-n)},$$

где $m_0 = n/2$. Формула для коэффициента $c_{n,m}$ формально получается из формулы для коэффициента $b_{n,m}$ путем отбрасывания в знаменателе множителя $(2m_0 - n)$ равного нулю.

⊙ *Литература*: Г. Е. Шилов (1965, стр. 51).

8. $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_k \Delta^k w = 0, \qquad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$

Частные решения:

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{m} u_n(x,y),$$

где u_n — решения уравнений Гельмгольца $\Delta u_n - \lambda_n u_n = 0$, а λ_n — корни характеристического уравнения $\sum\limits_{k=0}^{m} a_k \lambda^k = 0$.

⊙ *Литература*: А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко (1985, стр. 51).

9. $\sum_{k=0}^{m} a_k L^k[w] = 0.$

Здесь L — произвольный линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами с любым числом независимых переменных $x_1, \dots, x_n$.

Частные решения:

$$w(x_1, \dots, x_n) = \sum_{s=1}^{m} C_s u_s(x_1, \dots, x_n),$$

где u_s — решения уравнений $L[u_s] - \lambda_s u_s = 0$, λ_s — корни характеристического уравнения $\sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k = 0$, C_s — произвольные постоянные.

9.6. Линейные уравнения высших порядков с переменными коэффициентами

9.6.1. Уравнения, содержащие первую производную по t

9.6.1-1. Постановка задачи для уравнения с двумя независимыми переменными.

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение с частными производными

$$\frac{\partial w}{\partial t} - L_{x,t}[w] = \Phi(x,t), \tag{1}$$

где $L_{x,t}$ — линейный дифференциальный оператор n-го порядка по пространственной переменной x общего вида

$$L_{x,t}[w] \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k(x,t) \frac{\partial^k w}{\partial x^k}, \dots + a_1(x,t) \frac{\partial w}{\partial x} + a_0(x,t) w, \tag{2}$$

коэффициенты которого $a_k = a_k(x,t)$ являются достаточно гладкими функциями обоих аргументов при $t \geqslant 0$, $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$. Нижние индексы у оператора $L_{x,t}$ показывают, что он зависит от переменных x и t.

Для функции $w = w(x,t)$ выставляем начальное условие

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \tag{3}$$

и неоднородные граничные условия общего вида

$$\begin{aligned} \Gamma_m^{(1)}[w] &\equiv \sum_{k=0}^{n-1} b_{mk}^{(1)}(t) \frac{\partial^k w}{\partial x^k} = g_m^{(1)}(t) \quad \text{при} \quad x = x_1 \qquad (m = 1, \dots, s), \\ \Gamma_m^{(2)}[w] &\equiv \sum_{k=0}^{n-1} b_{mk}^{(2)}(t) \frac{\partial^k w}{\partial x^k} = g_m^{(2)}(t) \quad \text{при} \quad x = x_2 \qquad (m = s+1, \dots, n), \end{aligned} \tag{4}$$

где $s \geqslant 1$, $n \geqslant s+1$. Будем считать, что оба набора краевых форм $\Gamma_m^{(1)}[w]$ $(m=1,\dots,s)$ и $\Gamma_m^{(2)}[w]$ $(m = s+1, \dots, n)$ линейно независимы, т. е. для любых функций $\psi_m = \psi_m(t)$ выполнены неравенства

$$\sum_{m=1}^{s} \psi_m(t) \Gamma_m^{(1)}[w] \not\equiv 0, \qquad \sum_{m=s+1}^{n} \psi_m(t) \Gamma_m^{(2)}[w] \not\equiv 0.$$

В дальнейшем будем рассматривать нестационарную краевую задачу (1), (3), (4).

9.6.1-2. Случай однородных граничных условий общего вида. Функция Грина.

Решение уравнения (1) с начальным условием (3) и однородными граничными условиями

$$\begin{aligned} \Gamma_m^{(1)}[w] &= 0 \quad \text{при} \quad x = x_1 \qquad (m = 1, \dots, s), \\ \Gamma_m^{(2)}[w] &= 0 \quad \text{при} \quad x = x_2 \qquad (m = s+1, \dots, n) \end{aligned} \tag{5}$$

можно записать в виде

$$w(x,t) = \int_{x_1}^{x_2} f(y)G(x,y,t,0)\,dy + \int_0^t \int_{x_1}^{x_2} \Phi(y,\tau)G(x,y,t,\tau)\,dy\,d\tau. \tag{6}$$

Здесь $G(x,y,t,\tau)$ — функция Грина, которая при $t > \tau \geqslant 0$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{\partial G}{\partial t} - L_{x,t}[G] = 0 \tag{7}$$

с неоднородным начальным условием специального вида

$$G = \delta(x-y) \quad \text{при} \quad t = \tau \tag{8}$$

и однородными граничными условиями

$$\begin{aligned} &\Gamma_m^{(1)}[G] = 0 \quad \text{при} \quad x = x_1 \qquad (m = 1, \ldots, s), \\ &\Gamma_m^{(2)}[G] = 0 \quad \text{при} \quad x = x_2 \qquad (m = s+1, \ldots, n). \end{aligned} \tag{9}$$

В задачу (7)–(9) величины y и τ входят как свободные параметры ($x_1 \leqslant y \leqslant x_2$), $\delta(x)$ — дельта-функция.

Важно подчеркнуть, что функция Грина G не зависит от функций $\Phi(x,t)$, $f(x)$, $g_m^{(1)}(t)$, $g_m^{(2)}(t)$, характеризующих различные неоднородности краевой задачи. Если коэффициенты a_k, $b_{mk}^{(1)}$, $b_{mk}^{(2)}$, определяющие дифференциальный оператор (2) и граничные условия (4), не зависят от времени t, то функция Грина зависит только от трех аргументов $G(x,y,t,\tau) = G(x,y,t-\tau)$.

⊙ *Литература*: Математическая энциклопедия (1977, т. 1, стр. 1130).

9.6.1-3. Случай неоднородных граничных условий. Предварительные преобразования.

Для решения задачи с неоднородными граничными условиями (1), (3), (4) выберем некоторую достаточно гладкую «пробную функцию» $\varphi = \varphi(x,t)$, которая удовлетворяет тем же самым граничным условиям, что и искомая функция:

$$\begin{aligned} &\Gamma_m^{(1)}[\varphi] = g_m^{(1)}(t) \quad \text{при} \quad x = x_1 \qquad (m = 1, \ldots, s), \\ &\Gamma_m^{(2)}[\varphi] = g_m^{(2)}(t) \quad \text{при} \quad x = x_2 \qquad (m = s+1, \ldots, n). \end{aligned} \tag{10}$$

В остальном выбор «пробной функции» φ произволен и не связан с решением рассматриваемого уравнения (таких функций существует бесконечно много).

Перейдем от $w = w(x,t)$ к новой искомой величине $u = u(x,t)$ по формуле

$$w(x,t) = u(x,t) + \varphi(x,t). \tag{11}$$

Подставляя (11) в (1), (3), (4), получим задачу для уравнения с измененной правой частью

$$\frac{\partial u}{\partial t} - L_{x,t}[u] = \overline{\Phi}(x,t), \qquad \overline{\Phi}(x,t) = \Phi(x,t) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} + L_{x,t}[\varphi], \tag{12}$$

с неоднородным начальным условием

$$u = f(x) - \varphi(x,0) \quad \text{при} \quad t = 0 \tag{13}$$

и однородными граничными условиями

$$\begin{aligned} &\Gamma_m^{(1)}[u] = 0 \quad \text{при} \quad x = x_1 \qquad (m = 1, \ldots, s), \\ &\Gamma_m^{(2)}[u] = 0 \quad \text{при} \quad x = x_2 \qquad (m = s+1, \ldots, n). \end{aligned} \tag{14}$$

Решение задачи (12)–(14) можно найти с помощью функции Грина по формуле (6), в которой надо соответственно заменить w на u, $\Phi(x,t)$ на $\overline{\Phi}(x,t)$, $f(x)$ на $\overline{f}(x) = f(x) - \varphi(x,0)$. Учитывая (11), для w имеем следующее представление:

$$\begin{aligned} w(x,t) = &\int_{x_1}^{x_2} f(y)G(x,y,t,0)\,dy + \int_0^t \int_{x_1}^{x_2} \Phi(y,\tau)G(x,y,t,\tau)\,dy\,d\tau + \varphi(x,t) - \\ &- \int_{x_1}^{x_2} \varphi(y,0)G(x,y,t,0)\,dy - \int_0^t \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}(y,\tau)G(x,y,t,\tau)\,dy\,d\tau + \\ &+ \int_0^t \int_{x_1}^{x_2} G(x,y,t,\tau)L_{y,\tau}[\varphi(y,\tau)]\,dy\,d\tau. \end{aligned} \tag{15}$$

Меняя порядок интегрирования в предпоследнем интеграле и интегрируя по частям по переменной τ с учетом начального условия для функции Грина (8), получим

$$\int_0^t \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} G\,d\tau = \varphi(y,t)\delta(x-y) - \varphi(y,0)G(x,y,t,0) - \int_0^t \varphi(y,\tau)\frac{\partial G}{\partial\tau}(x,y,t,\tau)\,d\tau. \tag{16}$$

Преобразуем внутренний интеграл последнего слагаемого в решении (15) с помощью формулы Лагранжа — Грина [Э. Камке (1971, стр. 185)]:

$$\int_{x_1}^{x_2} GL_{y,\tau}[\varphi]\,dy = \int_{x_1}^{x_2} \varphi L^*_{y,\tau}[G]\,dy + \mathscr{L}[\varphi,G]\big|_{y=x_1}^{y=x_2}, \tag{17}$$

$$L^*_{y,\tau}[G] \equiv \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{\partial^k}{\partial y^k}\bigl[a_k(y,\tau)G\bigr], \quad \mathscr{L}[\varphi,G] \equiv \sum_{r=0}^{n-1}\sum_{p+q=r}(-1)^p \frac{\partial^q\varphi}{\partial y^q}\frac{\partial^p}{\partial y^p}\bigl[a_{r+1}(y,\tau)G\bigr],$$

где $L^*_{x,t}[w]$ дифференциальная форма, сопряженная с $L_{x,t}[w]$ (2); $\varphi = \varphi(y,\tau)$; p и q — целые неотрицательные числа.

Используя равенства (16) и (17), представим решение (15) в следующем виде:

$$w(x,t) = \int_{x_1}^{x_2} f(y)G(x,y,t,0)\,dy + \int_0^t\int_{x_1}^{x_2} \Phi(y,\tau)G(x,y,t,\tau)\,dy\,d\tau + \int_0^t \mathscr{L}[\varphi,G]\big|_{y=x_1}^{y=x_2}\,d\tau. \tag{18}$$

При выводе этой формулы было учтено, что функция Грина относительно параметров y и τ удовлетворяет сопряженному уравнению*

$$\frac{\partial G}{\partial\tau} + L^*_{y,\tau}[G] = 0.$$

Для дальнейшего анализа билинейную дифференциальную форму $\mathscr{L}[\varphi,G]$ удобно представить в виде

$$\mathscr{L}[\varphi,G] = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\partial^k\varphi}{\partial y^k}\Psi_k[G], \qquad \Psi_k[G] = \sum_{s=0}^{n-k-1}(-1)^s\frac{\partial^s}{\partial y^s}\bigl[a_{s+k+1}(y,\tau)G\bigr]. \tag{19}$$

Отметим, что в частном случае оператора (2) биномиального вида

$$L_{x,t}[w] = a_n\frac{\partial^n w}{\partial x^n} + a_0(x,t)w, \qquad a_n = \text{const},$$

дифференциальные формы в (19) записываются так:

$$\mathscr{L}[\varphi,G] = a_n\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k-1}\frac{\partial^k\varphi}{\partial y^k}\frac{\partial^{n-k-1}G}{\partial y^{n-k-1}}, \qquad \Psi_k[G] = a_n(-1)^{n-k-1}\frac{\partial^{n-k-1}G}{\partial y^{n-k-1}}.$$

9.6.1-4. Случай неоднородных граничных условий специального вида.

Рассмотрим неоднородные граничные условия специального вида, которые часто встречаются в приложениях:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{k_m} w}{\partial x^{k_m}} &= g^{(1)}_{k_m}(t) \quad \text{при} \quad x = x_1 \qquad (m = 1,\dots,s),\\ \frac{\partial^{k_m} w}{\partial x^{k_m}} &= g^{(2)}_{k_m}(t) \quad \text{при} \quad x = x_2 \qquad (m = s+1,\dots,n). \end{aligned} \tag{20}$$

Без ограничения общности считаем, что выполнены неравенства

$$n-1 \geqslant k_1 > k_2 > \ldots > k_s, \qquad n-1 \geqslant k_{s+1} > k_{s+2} > \ldots > k_n.$$

Функция Грина удовлетворяет соответствующим однородным граничным условиям, которые получаются из (20) заменой w на G при $g^{(1)}_{k_m}(t) = g^{(2)}_{k_m}(t) = 0$.

---

* Это уравнение можно вывести рассмотрев случай однородных начального и граничных условий и используя большой произвол в выборе пробной функции $\varphi = \varphi(x,t)$. При этом надо учесть, что само решение не должно зависеть от конкретного вида функции φ (поскольку она не фигурирует в исходной постановке задачи). Путем подходящего выбора пробной функции можно вывести также граничные условия (21).

Сопряженные по отношению к (20) однородные граничные условия, которым удовлетворяет функция Грина по переменным y, τ, имеют вид

$$\begin{aligned} &\Psi_{k_\beta}[G]=0 \quad \text{при} \quad x=x_1 \qquad (k_\beta\neq k_m,\ \beta=s+1,\dots,n;\ m=1,\dots,s),\\ &\Psi_{k_\beta}[G]=0 \quad \text{при} \quad x=x_2 \qquad (k_\beta\neq k_m,\ \beta=1,\dots,s;\ m=s+1,\dots,n). \end{aligned} \tag{21}$$

Сюда входят линейные дифференциальные формы $\Psi_k[G]$, указанные в (19). На каждой границе рассматриваемого интервала совокупность значений индексов $\{k_\beta\}$ в граничных операторах (21) вместе с совокупностью порядков производных $\{k_m\}$ в граничных условиях (20) дает полный набор неотрицательных целых чисел от 0 до $n-1$.

Учитывая, что пробная функция φ должна удовлетворять граничным условиям (20), а функция Грина G условиям (21), преобразуем решение (18) к следующему виду:

$$\begin{aligned} w(x,t)=&\int_{x_1}^{x_2} f(y)G(x,y,t,0)\,dy+\int_0^t\int_{x_1}^{x_2}\Phi(y,\tau)G(x,y,t,\tau)\,dy\,d\tau-\\ &-\sum_{m=1}^{s}\int_0^t g_{k_m}^{(1)}(\tau)\Psi_{k_m}[G]\big|_{y=x_1}d\tau+\sum_{m=s+1}^{n}\int_0^t g_{k_m}^{(2)}(\tau)\Psi_{k_m}[G]\big|_{y=x_2}d\tau, \end{aligned} \tag{22}$$

где $\Psi_{k_m}[G]$ — дифференциальные операторы по переменной y определены в (19).

Формула (22) позволяет с помощью функции Грина сразу находить решение неоднородной краевой задачи (1), (3), (20) для произвольных функций $\Phi(x,t)$, $f(x)$, $g_{k_m}^{(1)}(t)$ $(m=1,\dots,s)$ и $g_{k_m}^{(2)}(t)$ $(m=s+1,\dots,n)$.

9.6.1-5. Случай неоднородных граничных условий общего вида.

Выразив в (4) при $x=x_1$ и $x=x_2$ старшие производные через младшие, приведем граничные условия к канонической форме

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^{k_m}w}{\partial x^{k_m}}+\sum_{i=0}^{k_m-1}c_{mi}^{(1)}(t)\frac{\partial^i w}{\partial x^i}=h_{k_m}^{(1)}(t) \quad \text{при} \quad x=x_1 \qquad (m=1,\dots,s),\\ &\frac{\partial^{k_m}w}{\partial x^{k_m}}+\sum_{i=0}^{k_m-1}c_{mi}^{(2)}(t)\frac{\partial^i w}{\partial x^i}=h_{k_m}^{(2)}(t) \quad \text{при} \quad x=x_2 \qquad (m=s+1,\dots,n), \end{aligned} \tag{23}$$

где главные члены в разных граничных условиях будут разными

$$n-1\geqslant k_1>k_2>\ldots>k_s,\qquad n-1\geqslant k_{s+1}>k_{s+2}>\ldots>k_n,$$

а в суммах (23) отсутствуют соответственно производные порядков $k_1,k_2,\dots,k_s$ (при $x=x_1$) и $k_{s+1},k_{s+2},\dots,k_n$ (при $x=x_2$), т. е.

$$\begin{aligned} &c_{mi}^{(1)}(t)=0 \quad \text{при} \quad i=k_j \qquad (j=1,\dots,s),\\ &c_{mi}^{(2)}(t)=0 \quad \text{при} \quad i=k_j \qquad (j=s+1,\dots,n). \end{aligned}$$

Можно показать, что решение задачи (1), (3), (23) дается формулой

$$\begin{aligned} w(x,t)=&\int_{x_1}^{x_2} f(y)G(x,y,t,0)\,dy+\int_0^t\int_{x_1}^{x_2}\Phi(y,\tau)G(x,y,t,\tau)\,dy\,d\tau-\\ &-\sum_{m=1}^{s}\int_0^t h_{k_m}^{(1)}(\tau)\Psi_{k_m}[G]\big|_{y=x_1}d\tau+\sum_{m=s+1}^{n}\int_0^t h_{k_m}^{(2)}(\tau)\Psi_{k_m}[G]\big|_{y=x_2}d\tau, \end{aligned} \tag{24}$$

где $\Psi_{k_m}[G]$ — дифференциальные операторы по переменной y определены в (19). Формула (24) аналогична формуле (22), однако в нее входит функция Грина, удовлетворяющая более сложным однородным граничным условиям, которые получаются из (23) заменой w на G при $h_{k_m}^{(1)}(t)=h_{k_m}^{(2)}(t)=0$.

9.6.2. Уравнения, содержащие вторую производную по t

9.6.2-1. Случай однородных начальных и граничных условий.

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \psi(x,t)\frac{\partial w}{\partial t} - \sum_{k=0}^{n} a_k(x,t)\frac{\partial^k w}{\partial x^k} = \Phi(x,t). \tag{1}$$

Для функции $w = w(x,t)$ выставляем однородные начальные условия

$$\begin{aligned} w &= 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \\ \partial_t w &= 0 \quad \text{при} \quad t = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

и однородные граничные условия

$$\begin{aligned} \Gamma_m^{(1)}[w] &= 0 \quad \text{при} \quad x = x_1 \qquad (m = 1, \dots, s), \\ \Gamma_m^{(2)}[w] &= 0 \quad \text{при} \quad x = x_2 \qquad (m = s+1, \dots, n), \end{aligned} \tag{3}$$

где явный вид граничных операторов $\Gamma_m^{(1)}[w]$ и $\Gamma_m^{(2)}[w]$ указан в разд. 9.6.1-1.

Решение задачи (1)–(3) можно записать в виде*

$$w(x,t) = \int_0^t \int_{x_1}^{x_2} \Phi(y,\tau) G(x,y,t,\tau)\, dy\, d\tau. \tag{4}$$

Здесь $G = G(x,y,t,\tau)$ — функция Грина, которая при $t > \tau \geqslant 0$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + \psi(x,t)\frac{\partial G}{\partial t} - \sum_{k=0}^{n} a_k(x,t)\frac{\partial^k G}{\partial x^k} = 0 \tag{5}$$

с полуоднородными начальными условиями специального вида

$$\begin{aligned} G &= 0 \qquad\quad \text{при} \quad t = \tau, \\ \partial_t G &= \delta(x-y) \quad \text{при} \quad t = \tau \end{aligned} \tag{6}$$

и соответствующими однородными граничными условиями

$$\begin{aligned} \Gamma_m^{(1)}[G] &= 0 \quad \text{при} \quad x = x_1 \qquad (m = 1, \dots, s), \\ \Gamma_m^{(2)}[G] &= 0 \quad \text{при} \quad x = x_2 \qquad (m = s+1, \dots, n). \end{aligned} \tag{7}$$

В задачу (5)–(7) величины y и τ входят как свободные параметры ($x_1 \leqslant y \leqslant x_2$), $\delta(x)$ — дельта-функция.

Справедливость формулы (4) проверяется путем непосредственной подстановки ее в уравнение, начальные и граничные условия (1)–(3) с учетом свойств функции Грина (5)–(7).

9.6.2-2. Случай неоднородных начальных и граничных условий.

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение (1) с неоднородными начальными условиями общего вида

$$\begin{aligned} w &= f_0(x) \quad \text{при} \quad t = 0, \\ \partial_t w &= f_1(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

и неоднородными граничными условиями, которые приведены к канонической форме (см. разд. 9.6.1-5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{k_m} w}{\partial x^{k_m}} + \sum_{i=0}^{k_m-1} c_{mi}^{(1)}(t)\frac{\partial^i w}{\partial x^i} &= h_{k_m}^{(1)}(t) \quad \text{при} \quad x = x_1 \qquad (m = 1, \dots, s), \\ \frac{\partial^{k_m} w}{\partial x^{k_m}} + \sum_{i=0}^{k_m-1} c_{mi}^{(2)}(t)\frac{\partial^i w}{\partial x^i} &= h_{k_m}^{(2)}(t) \quad \text{при} \quad x = x_2 \qquad (m = s+1, \dots, n). \end{aligned} \tag{9}$$

* Считается, что задача (1)–(3) корректна.

Вводя пробную функцию $\varphi = \varphi(x,t)$, которая удовлетворяет неоднородным начальным и граничным условиям (8)–(9), и рассуждая таким же образом как это делалось в разд. 9.6.1-3 для более простого уравнения, можно получить решение задачи (1), (8), (9) в виде

$$
\begin{aligned}
w(x,t) = {} & \int_0^t \int_{x_1}^{x_2} \Phi(y,\tau) G(x,y,t,\tau)\, dy\, d\tau - \\
& - \int_{x_1}^{x_2} f_0(y) \frac{\partial}{\partial\tau}\Big[G(x,y,t,\tau)\Big]_{\tau=0} dy + \int_{x_1}^{x_2} \big[f_1(y) + f_0(y)\psi(y,0)\big] G(x,y,t,0)\, dy - \\
& - \sum_{m=1}^{s} \int_0^t h^{(1)}_{k_m}(\tau) \Psi_{k_m}[G]\big|_{y=x_1} d\tau + \sum_{m=s+1}^{n} \int_0^t h^{(2)}_{k_m}(\tau) \Psi_{k_m}[G]\big|_{y=x_2} d\tau,
\end{aligned} \tag{10}
$$

где $\Psi_{k_m}[G]$ — дифференциальные операторы по переменной y определены в формуле (19) из разд. 9.6.1-3.

Замечание. Если коэффициенты уравнения (1) и граничных условий (9) не зависят от времени, т. е.

$$
\psi = \psi(x), \quad a_k = a_k(x), \quad c^{(1)}_{mi} = \text{const}, \quad c^{(2)}_{mi} = \text{const},
$$

то в решении (10) следует положить

$$
G(x,y,t,\tau) = G(x,y,t-\tau), \qquad \frac{\partial}{\partial\tau} G(x,y,t,\tau)\bigg|_{\tau=0} = -\frac{\partial}{\partial t} G(x,y,t).
$$

9.6.3. Нестационарные задачи со многими пространственными переменными

9.6.3-1. Уравнения с частной производной первого порядка по переменной t.

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор по переменным $x_1, \ldots, x_n$:

$$
\mathfrak{L}_{\mathbf{x},t}[w] \equiv \sum A_{k_1,\ldots,k_n}(x_1,\ldots,x_n,t) \frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n} w}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}, \tag{1}
$$

коэффициенты которого $A_{k_1,\ldots,k_n}$ являются достаточно гладкими (при необходимости и ограниченными) функциями этих переменных и времени t. Считаем, что коэффициенты при старших производных не обращаются в нуль.

1°. *Задача Коши* ($t \geqslant 0$, $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$). Решение задачи Коши для линейного неоднородного параболического дифференциального уравнения с переменными коэффициентами

$$
\frac{\partial w}{\partial t} - \mathfrak{L}_{\mathbf{x},t}[w] = \Phi(\mathbf{x},t) \tag{2}
$$

с начальным условием

$$
w = f(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad t = 0 \tag{3}
$$

дается формулой

$$
w(\mathbf{x},t) = \int_0^t \int_{\mathcal{R}^n} \Phi(\mathbf{y},\tau) \mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)\, d\mathbf{y}\, d\tau + \int_{\mathcal{R}^n} f(\mathbf{y}) \mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t,0)\, d\mathbf{y}, \qquad d\mathbf{y} = dy_1 \ldots dy_n. \tag{4}
$$

Здесь $\mathscr{E} = \mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)$ — фундаментальное решение задачи Коши, которое при $t > \tau \geqslant 0$ удовлетворяет уравнению

$$
\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t} - \mathfrak{L}_{\mathbf{x},t}[\mathscr{E}] = 0 \tag{5}
$$

и специальному начальному условию

$$
\mathscr{E}\big|_{t=\tau} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{6}
$$

В задачу (5), (6) величины $\mathbf{y}$ и τ входят как свободные параметры ($\mathbf{y} \in \mathcal{R}^n$), $\delta(\mathbf{x})$ — n-мерная дельта-функция.

Если коэффициенты $A_{k_1,\ldots,k_n}$ оператора (1) не зависит от времени t, то фундаментальное решение имеет вид $\mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau) = \mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)$. Если коэффициенты оператора (1) являются константами, то $\mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau) = \mathscr{E}(\mathbf{x}-\mathbf{y},t-\tau)$.

2°. *Краевые задачи* ($t \geqslant 0$, $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$). Решение линейных краевых задач в пространственной области $\mathcal{D}$ для уравнения (2) с начальным условием (3) и однородными граничными условиями при $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{D}$ (эти условия здесь не выписываются) дается формулой (4), в которой область интегрирования $\mathcal{R}^n$ следует заменить на $\mathcal{D}$. При этом под $\mathscr{E}$ понимается функция Грина, которая помимо уравнения (5) и начального условия (6) должна еще удовлетворять таким же однородным граничным условиям при $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{D}$, что и исходное уравнение (2). Для краевых задач параметр $\mathbf{y}$ изменяется в той же области, что и переменная $\mathbf{x}$, т. е. $\mathbf{y} \in \mathcal{D}$.

⊙ *Литература*: Математическая энциклопедия (1977, т. 1, стр. 1130).

9.6.3-2. Уравнения с частной производной второго порядка по переменной t.

1°. *Задача Коши* ($t \geqslant 0$, $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$). Решение задачи Коши для линейного неоднородного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \mathfrak{L}_{\mathbf{x},t}[w] = \Phi(\mathbf{x},t), \tag{7}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{aligned} w &= f(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad t = 0, \\ \partial_t w &= g(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad t = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

дается формулой

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x},t) = \int_0^t \int_{\mathcal{R}^n} \Phi(\mathbf{y},\tau)\mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)\,d\mathbf{y}\,d\tau - \\ - \int_{\mathcal{R}^n} f(\mathbf{y})\Big[\frac{\partial}{\partial\tau}\mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)\Big]_{\tau=0} d\mathbf{y} + \int_{\mathcal{R}^n} g(\mathbf{y})\mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t,0)\,d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Здесь $\mathscr{E} = \mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)$ — фундаментальное решение задачи Коши

$$\frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial t^2} - \mathfrak{L}_{\mathbf{x},t}[\mathscr{E}] = 0,$$

$$\mathscr{E}\big|_{t=\tau} = 0, \qquad \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t}\Big|_{t=\tau} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}),$$

в которую $\mathbf{y}$ и τ входят как параметры.

Если коэффициенты $A_{k_1,\dots,k_n}$ оператора (1) не зависит от времени t, то фундаментальное решение имеет вид $\mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau) = \mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)$ и справедливо равенство $\frac{\partial}{\partial\tau}\mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)\big|_{\tau=0} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t)$. Если коэффициенты оператора (1) являются константами, то $\mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau) = \mathscr{E}(\mathbf{x}-\mathbf{y},t-\tau)$.

2°. Решение задачи Коши для более сложного линейного неоднородного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \psi(\mathbf{x},t)\frac{\partial w}{\partial t} - \mathfrak{L}_{\mathbf{x},t}[w] = \Phi(\mathbf{x},t)$$

с начальными условиями (8) имеет вид

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x},t) = \int_0^t \int_{\mathcal{R}^n} \Phi(\mathbf{y},\tau)\mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)\,d\mathbf{y}\,d\tau - \\ - \int_{\mathcal{R}^n} f(\mathbf{y})\Big[\frac{\partial}{\partial\tau}\mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)\Big]_{\tau=0} d\mathbf{y} + \int_{\mathcal{R}^n} [g(\mathbf{y}) + \psi(\mathbf{y},0)f(\mathbf{y})]\mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t,0)\,d\mathbf{y}. \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь $\mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)$ — соответствующее фундаментальное решение задачи Коши:

$$\frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial t^2} + \psi(\mathbf{x},t)\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t} - \mathfrak{L}_{\mathbf{x},t}[\mathscr{E}] = 0,$$

$$\mathscr{E}\big|_{t=\tau} = 0, \qquad \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t}\Big|_{t=\tau} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

3°. *Краевые задачи* ($t \geqslant 0$, $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$). Решение линейных краевых задач в пространственной области $\mathcal{D}$ для уравнения (7) с начальными условиями (8) и однородными граничными условиями при $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{D}$ (эти условия здесь не выписываются) дается формулой (9), в которой область интегрирования $\mathcal{R}^n$ следует заменить на $\mathcal{D}$. При этом под $\mathscr{E}$ понимается функция Грина, которая помимо уравнения и начальных условий (8) должна еще удовлетворять таким же однородным граничным условиям, что и исходное уравнение (7).

9.6.4. Некоторые уравнения специального типа

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = k(t)\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + \bigl[xf(t)+g(t)\bigr]\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(t)w.$

Преобразование

$$w(x,t) = u(z,\tau)\exp\Bigl[\int h(t)\,dt\Bigr],\quad z = xF(t) + \int g(t)F(t)\,dt,\quad \tau = \int k(t)F^n(t)\,dt,$$

где $F(t) = \exp\Bigl[\int f(t)\,dt\Bigr]$, приводит к более простому уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^n u}{\partial z^n}.$$

2. $\dfrac{\partial^k w}{\partial t^k} = ax^{2n}\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}.$

Преобразование $z = 1/x$, $u = wx^{1-n}$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} = a(-1)^n\frac{\partial^n u}{\partial z^n}.$$

3. $\dfrac{\partial^k w}{\partial t^k} = \displaystyle\sum_{m=0}^{n} a_m x^m \frac{\partial^m w}{\partial x^m}.$

Замена $z = \ln|x|$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами.

4. $\dfrac{\partial^k w}{\partial t^k} = (ax^2+bx+c)^n\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}.$

Преобразование

$$w(x,t) = u(z,t)(ax^2+bx+c)^{\frac{n-1}{2}},\qquad z = \int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами.

5. $\Bigl(\dfrac{\partial}{\partial t} - L_x\Bigr)^n w = 0,\qquad n = 1,\,2,\,\ldots$

Здесь L_x — линейный дифференциальный оператор любого порядка по пространственной переменной x, коэффициенты которого могут зависеть от x.

1°. Общее решение:

$$w(x,t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^k u_k(x,t),$$

где $u_k = u_k(x,t)$ — произвольные функции, удовлетворяющие исходному уравнению при $n=1$: $\bigl(\partial_t - L_x\bigr)u_k = 0$.

2°. Фундаментальное решение:

$$\mathscr{E}_n(x,t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathscr{E}_1(x,t),$$

где $\mathscr{E}_1(x,t)$ — фундаментальное решение уравнения при $n=1$.

Замечание. Линейный дифференциальный оператор L_x может зависеть от любого числа пространственных переменных.

6. $\Bigl(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - L_x\Bigr)^n w = 0,\qquad n = 1,\,2,\,\ldots$

Здесь L_x — линейный дифференциальный оператор любого порядка по пространственной переменной x, коэффициенты которого могут зависеть от x.

1°. Общее решение:

$$w(x,t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^k u_k(x,t),$$

где $u_k = u_k(x,t)$ — произвольные функции, удовлетворяющие исходному уравнению при $n=1$: $\bigl(\partial_{tt} - L_x\bigr)u_k = 0$.

2°. Пусть в задаче Коши для частного случая уравнения при $n = 1$ корректно выставлять одно начальное условие при $t = 0$ (для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами L_x это означает, что уравнение при $n = 1$ является регулярным с показателем регулярности $r = 1$). Тогда фундаментальное решение исходного уравнения можно найти по формуле

$$\mathscr{E}_n(x,t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathscr{E}_1(x,t),$$

где $\mathscr{E}_1(x,t)$ — фундаментальное решение уравнения при $n = 1$.

Замечание. Линейный дифференциальный оператор L_x может зависеть от любого числа пространственных переменных.

7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_k L^k[w] = 0.$

Здесь L — произвольный линейный дифференциальный оператор с любым числом независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Частные решения:

$$w(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{s=1}^{m} C_s u_s(x_1, \ldots, x_n),$$

где u_s — решения уравнений $L[u_s] - \lambda_s u_s = 0$, λ_s — корни характеристического уравнения $\sum\limits_{k=0}^{m} a_k\lambda^k = 0$, C_s — произвольные постоянные.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Абрамовиц М., Стиган И. (ред.). Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979. — 832 с.

Акуленко Л. Д., Нестеров С. В. Определение частот и форм колебаний неоднородных распределенных систем с граничными условиями третьего рода. // Прикл. матем. и механика, 1997, т. 61, № 4, с. 531–538.

Акуленко Л. Д., Нестеров С. В. Колебания неоднородной мембраны. // Изв. РАН. Механика твердого тела, 1999, № 6, с. 191–202.

Акуленко Л. Д., Нестеров С. В. Собственные значения однородной эллиптической мембраны. // Изв. РАН. Механика твердого тела, 2000, № 1, с. 191–202.

Араманович И. Г., Левин В. И. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1969. — 288 с.

Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. — М.: Наука, 1974. — 432 с.

Бабич В. М., Капилевич М. Б., Михлин С. Г. и др. Линейные уравнения математической физики. — М.: Наука, 1964. — 368 с.

Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. 1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. — М.: Наука, 1973. — 296 с.

Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. — М.: Наука, 1974. — 296 с.

Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. 3. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. — М.: Наука, 1967. — 300 с.

Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований, тт. 1–2. — М.: Наука, 1969–1970.

Бицадзе А. В. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1976. — 296 с.

Бицадзе А. В., Калиниченко Д. Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. — М.: Наука, 1985. — 312 с.

Борзых А. А., Черепанов Г. П. Плоская задача теории конвективной теплопередачи и массообмена. // Прикл. матем. и механика, 1978, т. 42, № 5, с. 848–855.

Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. — М.: Наука, 1972. — 686 с.

Бутковский А. Г. Характеристики систем с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1979. — 224 с.

Винокуров В. А., Садовничий В. А. Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма — Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом. // Изв. РАН. Серия математическая, 2000, т. 64, № 4, с. 47–108.

Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1971. — 512 с.

Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1976. — 280 с.

Владимиров В. С., Михайлов В. П., Вашарин А. А. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. — М.: Наука, 1974. — 272 с.

Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. — М.: Физматлит, 1959. — 328 с.

Гулд С. Вариационные методы в задачах о собственных значениях. — М.: Мир, 1970. — 328 с.

Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С. Массотеплообмен реагирующих частиц с потоком. — М.: Наука, 1985. — 336 с.

Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. — М.: Наука, 1971. — 288 с.

Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. — М.: Высшая школа, 1965. — 568 с.

Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. — М.: Наука, 1974. — 544 с.

Зайцев В., Полянин А. D. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными. — М.: Международная программа образования, 1996. — 496 с.

Зайцев В., Полянин А. D. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1995. — 560 с.

Камке Е. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1971. — 576 с.

Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. — М.: Наука, 1964. — 488 с.

Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1968. — 720 с.

Костюченко А. Г., Саргсян И. С. Распределение собственных значений (самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы). — М.: Наука, 1979. — 400 с.

Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. — М.: Высшая школа, 1970. — 712 с.

Крейн С. Г. (ред.) Функциональный анализ. — М.: Наука, 1964. — 424 с.

Крейн С. Г. (ред.) Функциональный анализ. — М.: Наука, 1972. — 544 с.

Крылов А. Н. Собрание трудов: III Математика, ч. 2. — М.: Изд. АН СССР, 1949. — 482 с.

Курант Р. Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964. — 830 с.

Кутепов А. М., Полянин А. Д., Запрянов З. Д., Вязьмин А. В., Казенин Д. А. Химическая гидродинамика. — М.: Квантум, 1996. — 336 с.

Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1973. — 736 с.

Лаврик В. И., Савенков В. Н. Справочник по конформным отображениям. — Киев: Наукова Думка, 1970. — 252 с.

Ламб Г. Гидродинамика. — М.: Гостехиздат, 1947. — 928 с.

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. — М.: Наука, 1974. — 752 с.

Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. — М.: Физматлит, 1959. — 700 с.

Лебедев Н. Н., Скальская И. П., Уфлянд Я. С. Сборник задач по математической физике. — М.: Гостехиздат, 1955. — 420 с.

Левитан Б. М., Саргсян И. С. Операторы Штурма — Лиувилля и Дирака. — М.: Наука, 1988.

Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1973. — 848 с.

Лыков А. В. Теория теплопроводности. — М.: Высшая школа, 1967. — 600 с.

Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложения функций Матье. — М.: Иностранная литература, 1953. — 476 с.

Манжиров А. В., Полянин А. D. Методы решения интегральных уравнений: Справочник. — М.: Факториал, 1999. — 272 с.

Математическая энциклопедия. — М.: Советская энциклопедия, 1977.

Миллер У. (мл.). Симметрия и разделение переменных. — М.: Мир, 1981. — 344 с.

Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. — М.: Наука, 1970. — 512 с.

Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики, т. 1. — М.: Иностранная литература, 1958. — 930 с.

Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики, т. 2. — М.: Иностранная литература, 1960. — 886 с.

Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969. — 528 с.

Новиков Е. А. О турбулентной диффузии в потоке с поперечным градиентом скорости. // Прикл. мат. и мех., 1958, т. 22, № 3, с. 412–414.

Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. — М.: Физматгиз, 1961. — 400 с.

Положий Г. Н. Уравнения математической физики. — М.: Высшая школа, 1964. — 560 с.

Полянин А. Д. Структура решений линейных нестационарных краевых задач механики и математической физики. // Доклады РАН, 2000*а*, т. 373, № 5, с. 628–631.

Полянин А. Д. Неполное разделение переменных в нестационарных задачах механики и математической физики. // Доклады РАН, 2000*b*, т. 375, № 4.

Полянин А. Д. Линейные задачи тепло- и массопереноса: Общие формулы и результаты. // Теор. основы хим. технологии, 2000*c*, т. 34, № 6.

Полянин А. D., Вязьмин А. В., Журов А. И., Казенин Д. А. Справочник по точным решениям уравнений тепло- и массопереноса. — М.: Факториал, 1998. — 368 с.

Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. — М.: Наука, 1981. — 799 с.

Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной. — М.: Наука, 1974. — 320 с.

Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. — М.: Наука, 1966. — 448 с.

Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 2. — М.: Наука, 1974. — 656 с.

Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 3, ч. 2. — М.: Наука, 1974. — 672 с.

Смирнов М. М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. — М.: Наука, 1964. — 205 с.

Смирнов М. М. Задачи по уравнениям математической физики. — М.: Наука, 1975. — 112 с.

Снеддон И. Преобразования Фурье. — М.: Иностранная литература, 1955. — 668 с.

Соболев С. Л. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966. — 444 с.

Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1972. — 736 с.

Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа, т. 2. — М.: Физматлит, 1963. — 516 с.

Фаддеев Л. Д. (ред.). Математическая физика: Энциклопедия. — М.: Большая российская энциклопедия, 1998. — 691 с.

Фаминский А. В. О смешанных задачах для уравнения Кортевега-де Фриса при нерегулярных начальных данных. // Доклады АН СССР, 1999, т. 366, № 1, с. 28–29.

Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. — М.: Мир, 1976. — 632 с.

Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. — М.: Мир, 1965. — 379 с.

Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными, т. 2. — М.: Мир, 1986. — 456 с.

Черпаков П. В. Теория регулярного теплообмена. — М.: Энергия, 1975. — 225 с.

Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс. — М.: Наука, 1965. — 502 с.

Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1974. — 712 с.

Arscott F. Periodic Differential Equations. — New York: Macmillan (Pergamon), 1964.

Arscott F. The Whittaker — Hill equation and the wave equation in paraboloidal coordinates. // Proc. Roy. Soc. Edinburg, 1967, Vol. A67, pp. 265–276.

Batchelor G. K. Mass transfer from a particle suspended in fluid with a steady linear ambient velocity distribution. // J. Fluid Mech., 1979, Vol. 95, № 2, pp. 369–400.

Beyer W. H. CRC Standard Mathematical Tables and Formulae. — Boca Raton: CRC Press, 1991. — 609 p.

Boyer C. The maximal kinematical invariance group for an arbitrary potential. // Helv. Phys. Acta, 1974, Vol. 47, pp. 589–605.

Boyer C. Lie theory and separation of variables for equation $iU_t + \Delta_2 U - (\alpha/x_1^2 + \beta/x_2^2)U = 0$. // SIAM J. Math. Anal., 1976, Vol. 7, pp. 230–263.

Bôcher M. Die Reihenentwickelungen der Potentialtheory, Leipzig, 1894. — 332 S.

Brychkov Yu. A., Prudnikov A. P. Integral Transforms of Generalized Functions. — New York: Gordon & Breach, 1989.

Butkov E. Mathematical Physics. — Mass.: Addison–Wesley, Reading, 1968.

Davis B. Integral Transforms and Their Applications. — New York: Springer-Verlag, 1978.

Davis E. J. Exact solutions for a class of heat and mass transfer problems. // Can. J. Chem. Eng., 1973, Vol. 51, No. 5, pp. 562–572.

Deavours C. A. An exact solution for the temperature distribution in parallel plate Poiseuille flow. // Trans. ASME, J. Heat Transfer, 1974, Vol. 96, № 4.

Elrick D. E. Source functions for diffusion in uniform shear flows. // Australian J. Phys., 1962, Vol. 15, № 3, pp. 283–288.

Farlow S. J. Partial Differential Equations for Scientists and Engineers. — New York: John Wiley & Sons, 1982.

Graetz L. Über die Warmeleitungsfähigkeit von Flüssigkeiten. // Annln. Phys., 1883, Bd. 18, S. 79–84.

Ibragimov N. H. (editor). CRC Handbook of Lie Group to Differential Equations, Vol. 1. — Boca Raton: CRC Press, 1994. — 429 p.

Ivanov V. I., Trubetskov M. K. Handbook of Conformal Mapping with Computer–Aided Visualization, Boca Raton: CRC Press, 1994. — 360 p.

Kalnins E. On the separation of variables for the Laplace equation in two- and three-dimensional Minkowski space. // SIAM J. Math. Anal. Hung., 1975, Vol. 6, pp. 340–373.

Kalnins E., Miller W. (Jr.) Lie theory and separation of variables, 5: The equations $iU_t + U_{xx} = 0$ and $iU_t + U_{xx} - c/x^2 U = 0$. // J. Math. Phys., 1974, Vol. 15, pp. 1728–1737.

Kalnins E., Miller W. (Jr.) Lie theory and separation of variables, 8: Semisubgroup coordinates for $\Psi_{tt} - \Delta_2\Psi = 0$. // J. Math. Phys., 1975, Vol. 16, pp. 2507–2516.

Kalnins E., Miller W. (Jr.) Lie theory and separation of variables, 9: Orthogonal R-separable coordinate systems for the wave equation $\Psi_{tt} - \Delta_2\Psi = 0$. // J. Math. Phys., 1976, Vol. 17, pp. 331–335.

Kalnins E., Miller W. (Jr.) Lie theory and separation of variables, 10: Nonorthogonal R-separable solutions of the wave equation $\Psi_{tt} - \Delta_2\Psi = 0$. // J. Math. Phys., 1976, Vol. 17, pp. 356–368.

Makarov A., Smorodinsky J., Valiev K., Winternitz P. A systematic search for nonrelativistic systems with dynamical symmetries. Part I: The integrals of motion. // Nuovo Cimento, 1967, Vol. 52A, pp. 1061–1084.

Meixner J., Schäfke F. Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionnen. — Berlin: Springer-Verlag, 1965.

Miles J. W. Integral Transforms in Applied Mathematics. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1971.

Moon P., Spencer D. Field Theory Handbook. — Berlin: Springer-Verlag, 1961.

Murphy G.M. Ordinary Differential Equations and Their Solutions. — New York: D. Van Nostrand, 1960.

Niederer U. The maximal kinematical invariance group of the harmonic oscillator. // Helv. Phys. Acta, 1973, Vol. 46, pp. 191–200.

Nusselt W. Abhängigkeit der Wärmeübergangzahl con der Rohränge. // VDI Zeitschrift, 1910, Bd. 54, № 28, S. 1154–1158.

Rimmer P. L. Heat transfer from a sphere in a stream of small Reynolds number. // J. Fluid Mech., 1968, Vol. 32, № 1, pp. 1–7.

Rotem Z., Neilson, J. E. Exact solution for diffusion to flow down an incline. // Can. J. Chem. Eng., 1966, Vol. 47, pp. 341–346.

Sutton W. G. L. On the equation of diffusion in a turbulent medium. // Proc. Poy. Soc., Ser. A, 1943, Vol. 182, № 988, pp. 48–75.

Taylor G. I. Viscosity of a fluid containing small drops of another fluid. // Proc. Poy. Soc., Ser. A, 1932, Vol. 138, № 834, pp. 41–48.

Urvin K., Arscott F. Theory of the Whittaker — Hill equation. // Proc. Roy. Soc., 1970, Vol. A69, pp. 28–44.

Zauderer E. Partial Differential Equations of Applied Mathematics. — New York: John Wiley & Sons, 1983.

Zwillinger D. Handbook of Differential Equations. — Boston: Academic Press, 1989. — 673 p.

Справочное издание

ПОЛЯНИН Андрей Дмитриевич

СПРАВОЧНИК ПО ЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЯМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Оригинал-макет *А.И. Журова, А.Д. Полянина*

ЛР № 071930 от 06.07.99.
Подписано в печать 21.02.01. Формат 70x100/16.
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 46,5. Уч.-изд. л. 51. Тираж 5000 экз. Заказ № 590.

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117864 Москва, ул. Профсоюзная, 90

Отпечатано с готовых диапозитивов
в РГУП «Чебоксарская типография № 1»
428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, 15